

# LE THEOREME DE GERSTENHABER POUR TROIS MATRICES

PATRICK TELLER 24 FEVRIER 2022

## RÉSUMÉ.

Ce travail résoud de manière affirmative le Problème de Gerstenhaber sur la dimension de l'algèbre engendrée par trois matrices commutantes.

Nous rappelons sans démonstrations la décomposition de Weyr des matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et l'allure du commutant d'une matrice de Weyr nilpotente, dont les éléments seront appelés matrices fractales.

Nous montrons aussi dans le 2. que deux matrices fractales commutantes sont simultanément trigonalisables et nous définissons l'extraction qui transforme  $F(z_1, \dots, z_t)$  en  $F(z_2, \dots, z_t)$ .

Nous démontrons dans le 3. un Théorème de type « Cayley-Hamilton » pour les matrices fractales : si on désigne par  $\chi$  le polynôme caractéristique du bloc  $M_{1,1}$  de la matrice fractale  $M$ , la matrice  $\chi(M)$  appartient à  $WC[W, M]$ . Un couple de matrices fractales commutantes  $A$  et  $B$  étant choisi, nous appliquons ce dernier résultat aux matrices du faisceau engendré par  $A$  et  $B$ , aboutissant à l'idéal  $\mathcal{Y}(A, B) = \langle \chi_{rA+sB}(rX+sY), (r,s) \in \mathbb{C}^2 \rangle$ .

Dans le 4. nous comparons les dimensions des algèbres quotients  $\mathbb{C}[W, A, B]/WC[W, A, B]$ , et  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$  puis nous démontrons que la dimension de  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$  est majorée par  $z_1$ .

Nous montrons que la dimension de  $WC[W, A, B]$  est majorée par celle de l'algèbre extraite  $\mathbb{C}[{}^tWWW, {}^tWAW, {}^tWBW]$ , ce qui permet de raisonner par récurrence sur le nombre de parts de la composition considérée.

Le cas général de trois matrices commutantes  $(A, B, C)$  est traité dans le 5. par la décomposition de  $C$  en somme directe de matrices de Weyr,  $W_i + \lambda_i I$ , et la décomposition correspondante pour  $A$  et  $B$ .

## 1. INTRODUCTION

Il est bien connu que la dimension de l'algèbre (unitaire) engendrée par une matrice ou deux matrices commutantes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , est inférieure ou égale à  $n$  et ce résultat, d'abord établi dans le cadre de la Géométrie Algébrique [3], a été ensuite démontré soit avec les outils de l'Algèbre Linéaire [1], soit de la Géométrie Algébrique dans la belle et rapide preuve de Guralnick [4], qui fait remonter l'idée de base à [7] ou même de la Théorie des Modules [8].

L'analogie, dans le cas de  $k > 3$  matrices commutantes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est faux, on trouvera un contre-exemple élémentaire dans [10]; reste donc le cas de trois matrices commutantes.

Le problème « des trois matrices » reste très largement ouvert; les méthodes s'appuyant sur la Géométrie Algébrique dépendaient de l'irréductibilité de la variété formée par les  $k$ -uplets de matrices commutantes mais cette irréductibilité n'est pas vraie pour  $k=3$ , pour la majeure partie des valeurs de  $n$  ([5],[6],[12]); de son côté l'Algèbre Commutative, qui a été l'occasion de démonstrations plus élémentaires dans le cas de deux matrices [1], n'a permis la résolution du problème que dans des cas particuliers [9].

Le point de vue de la Géométrie Algébrique, c'est-à-dire la question de l'irréductibilité de la variété des triplets de matrices commutantes, a été poursuivi dans les travaux de K. Sivic [12] et de A. Sethuraman [10] avec des résultats partiels relatifs à la régularité des matrices (c'est-à-dire la dimension maximale des sous-espaces propres) tandis que les auteurs de [6], se sont lancés dans une recherche intensive d'une algèbre commutative engendrée par trois matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , dont la dimension serait inférieure à  $n$  [5].

Nous avons fait le choix de l'étude des matrices « fractales », en partant de l'hypothèse « naïve », suivant laquelle l'allure très particulière de ces matrices devait (pouvait) receler des secrets utiles.

## 2. MATRICES DE WEYR

On trouvera ici un rappel des définitions et des résultats élémentaires concernant les Matrices de Weyr; les constructions et les démonstrations peuvent être trouvées dans l'article d'exposition d'Helen Shapiro [11] et le livre original et très riche de J. Clark, K. O'Meara, C. Vinsonhalter [6].

### Définition 1.

La matrice de Weyr associée à la composition  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_t$  de  $n$

On appelle matrice de Weyr nilpotente, associée à la composition  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_t$  de  $n$ , la matrice définie par blocs comme suit:

1.  $W = (W_{i,j})$  où le bloc  $W_{i,j}$  appartient à  $\mathcal{M}_{z_i, z_j}(\mathbb{C})$ ;

2.  $\forall i \in \{1, \dots, t-1\}$ ,  $W_{i, i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i, z_{i+1}}(\mathbb{C})$

3. si  $j \neq i+1$ ,  $W_{i,j} = 0$ ;

$$\text{d'où } W = \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W_{z_{t-1}, z_t} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$W$  est appelée la matrice de Weyr nilpotente associée à la composition  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_t$ ;  $W$  est nilpotente d'ordre  $t$ .

**Théorème 2.** *Toute matrice nilpotente  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est semblable à une unique matrice de Weyr nilpotente  $W$ .*

**Théorème 3.** *Toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est semblable (de manière unique, à l'ordre près) à une matrice en blocs de Weyr*

$\begin{pmatrix} \lambda_1 I + W_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I + W_2 & & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I + W_r \end{pmatrix}$ , où les  $W_i$  sont des matrices de Weyr nilpotentes.

**Théorème 4.** (Le commutant de la matrice de Weyr nilpotente  $W(z_1, \dots, z_t)$ )

Soient  $W=(W_{i,j})$  une matrice de Weyr nilpotente et une matrice  $A=(A_{i,j})$

$AW=WA$  si et seulement si

1.  $\forall(i, j), i > j \implies A_{i,j} = 0$

2.  $\forall(i, j), i \leq j \quad A_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$  (que l'on peut écrire  ${}^t W_{i,i+1} A_{ij} W_{j,j+1} = A_{i+1,j+1}$ )

Une telle matrice sera appelée matrice fractale associée à la composition  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_t$ , l'ensemble des matrices fractales associées à la composition  $z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_t$  sera noté  $F(z_1, \dots, z_t)$  ou  $F$  s'il n'y a pas d'ambiguïté, c'est le commutant de  $W$ , c'est donc une algèbre.

Dans une matrice fractale  $A$  le bloc  $A_{1,1}$  sera appelé bloc directeur.

Voici un exemple de matrice fractale associée à la composition (5,3,2,1)

$$M = \begin{pmatrix} a & b & d & p & u & g & i & z & l & dd & A \\ 0 & c & e & q & v & h & j & zz & m & ee & B \\ 0 & 0 & f & r & w & 0 & k & aa & n & ff & C \\ 0 & 0 & 0 & s & x & 0 & 0 & bb & 0 & gg & D \\ 0 & 0 & 0 & t & y & 0 & 0 & cc & 0 & hh & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & d & g & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & e & h & j & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & k & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
 est une matrice fractale; elle est triangulaire

supérieure par blocs, on remarquera qu'en effet chaque bloc  $M_{i,j}$  contient une copie de son successeur « en diagonale »  $M_{i+1,j+1}$ .

**Théorème 5.** Trigonalisation d'une matrice fractale

Toute matrice fractale est semblable à une matrice fractale triangulaire supérieure.

De même, si on considère deux matrices fractales  $A$  et  $B$  telles que  $AB=BA$ , elles sont simultanément semblables à deux matrices fractales, triangulaires supérieures, qui commutent entre elles.

**Démonstration.** □

Soit  $M=(M_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, t\}^2}$  une matrice fractale; on notera comme plus haut pour chaque  $i$  de  $\{1, \dots, t\}$   $M_{i,i} = \begin{pmatrix} M_{i+1,i+1} & * \\ 0 & N_i \end{pmatrix}$ , avec  $M_{t+1,t+1} = (0)$ .

Les matrices  $N_i$ , étant à coefficients complexes, il existe pour tout  $i$  une matrice  $P_i$  inversible telle que  $P_i^{-1} N_i P_i = T_i$  est triangulaire supérieure, puis on pose  $Q_{t+1} = (0)$  et pour  $i=t$  à  $i=1$   $Q_i = \begin{pmatrix} Q_{i+1} & 0 \\ 0 & P_i \end{pmatrix}$ .

On montre par une récurrence immédiate que les blocs  $Q_i^{-1} M_{i,i} Q_i$  sont triangulaires supérieures et, par suite, si on pose  $Q=(Q_i)$ , alors  $Q^{-1} M Q$  est triangulaire supérieure.



3)  $\Psi$  est un endomorphisme d'algèbres de  $F(z_1, \dots, z_t)$  vers  $F(z_1, \dots, z_t)$  (mise à part la question de l'image de la matrice unité)

4) Le noyau de  $\Psi$  est l'annulateur de l'élément  $W$ .

**Démonstration.**

$$\begin{pmatrix} {}^tW_{1,2} & 0 & & & & \\ 0 & {}^tW_{2,3} & 0 & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & {}^tW_{t,t-1} & 0 \end{pmatrix} (M_{i,j}) \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & 0 & W_{2,3} & & & & \\ & 0 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & W_{z_{t-1}, z_1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & M'_{2,2} & \dots & \dots & M'_{2,t} \\ \dots & 0 & M'_{3,3} & & \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M'_{t,t} \end{pmatrix}$$

où  $M'_{k,q} = {}^tW_{k-1,k} M_{k-1,q-1} W_{q-1,q}$  si  $(k,q) \in \{1, \dots, t\}^2$  et  $M'_{k,q} = (0)$  sinon.

Le Théorème 4 entraîne que si  $k > 1$  et  $q > 1$   $M'_{k,q} = M_{k,q}$  d'où l'extrait  ${}^tWMW$

de la matrice fractale  $M = (M_{i,j})$  est la matrice 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M_{2,2} & \dots & \dots & \dots & M_{2,t_1} \\ \dots & 0 & M_{3,3} & & \dots & \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M_{t,t} \end{pmatrix}.$$

2) Si on pose  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_2' \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & 0 \\ 0 & B_2' \end{pmatrix}$  l'égalité  $AB = BA$  entraîne  $A_{1,1}B_{1,1} = B_{1,1}A_{1,1}$  et

$A_2'B_2' = B_2'A_2'$  et, de même,  $AW = WA$  et  $BW = WB$  entraînent que  $A_2'$  et  $B_2'$  commutent avec  $W_2$ .

3) Considérons deux matrices fractales  $A$  et  $B$ ,  ${}^tWAW {}^tWBW = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2'B_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (AB)_2' \end{pmatrix}$ , selon les principes de la multiplication par blocs, et ceci est égal, d'après les alinéas au-dessus, à  ${}^tWABW$ .

La linéarité est, quant à elle, évidente. □

### 3. UN THÉORÈME DE TYPE CAYLEY-HAMILTON POUR LES MATRICES FRACTALES

Rappelons le résultat classique sur la famille génératrice de l'algèbre engendrée par deux matrices commutantes, ici  $W$  (nilpotente sous forme de Weyr) et  $M$ :

**Théorème 9.**

La famille  $(I, M, \dots, M^{z_1-1}, W, WM, \dots, WM^{z_2-1}, \dots, W^{t-1}, W^{t-1}M, \dots, W^{t-1}M^{z_t-1})$  engendre l'algèbre  $\mathbb{C}[W, M]$  (Barria et Halmos [1] dans le cadre Jordan, O'Meara, Clark, Visonhalter... [6] dans le cadre de Weyr)

Comme dans le Problème de Gerstenhaber pour deux matrices la notion de matrice cyclique joue un rôle important dans l'étude du problème pour trois matrices.

**Définition 10.** Matrice cyclique, Matrice fractale à « bloc directeur cyclique »

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est dite cyclique lorsqu'elle possède l'une de ces propriétés équivalentes:

i) son polynôme minimal  $\pi_M(X)$  est égal à son polynôme caractéristique  $\chi_M(X)$

ii) pour chaque valeur propre le sous-espace propre est de dimension 1  
 iii) elle est semblable à une matrice « compagnon », c'est-à-dire une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -m_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -m_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -m_{n-1} \end{pmatrix}$$

Une matrice dont le polynôme caractéristique est simplement scindé est cyclique.

Une matrice fractale sera dite « à diagonale cyclique » lorsque le bloc directeur est cyclique.

**Lemme 11.** Soit une matrice fractale  $M=(M_{i,j})$ , si le bloc directeur  $M_{1,1}$  est cyclique alors pour tout  $j$  le bloc  $M_{j,j}$  est cyclique.

**Démonstration.**

découle immédiatement du ii) de la définition . □

**Définition 12.** Matrice fractale à diagonale cyclique

Une matrice fractale  $M=(M_{i,j})$  sera dite à diagonale cyclique lorsque les blocs diagonaux  $M_{i,i}$  sont cycliques.

**Lemme 13.** Toute matrice fractale est la limite d'une suite de matrices fractales à bloc directeur cyclique.

**Démonstration.**

Soit une matrice fractale  $M$  et la matrice fractale  $S(\frac{d_1}{n}, \frac{d_2}{n^2}, \dots, \frac{d_{z_1}}{n^{z_1}})$  définie comme suit:

$$i) \text{ le bloc directeur est la matrice diagonale } S_{1,1} \begin{pmatrix} \frac{d_1}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{n^2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \frac{d_{z_1}}{n^{z_1}} \end{pmatrix}$$

ii) les autres blocs de la première ligne de blocs  $S_{1,j}$ , pour  $j > 1$ , sont nuls.

Il est facile de voir que  $(M_{1,1} + S_{1,1}(\frac{d_1}{n}, \frac{d_2}{n^2}, \dots, \frac{d_{z_1}}{n^{z_1}}))$  tend vers  $M_{1,1}$  et qu'un bon choix des  $d_i$  rend les matrices  $M_{1,1} + S_{1,1}(\frac{d_1}{n}, \frac{d_2}{n^2}, \dots, \frac{d_{z_1}}{n^{z_1}})$  cycliques; il ne reste plus qu'à déduire les autres blocs diagonaux et construire la matrice fractale  $S$  à partir des contraintes i) et ii). □

Nous aurons besoin du résultat suivant

**Théorème 14.** Cayley-Hamilton pour matrices fractales

Soient une matrice fractale  $M$  et  $\chi$  le polynôme caractéristique du bloc  $M_{1,1}$ , alors  $\chi(M)$  appartient à  $W\mathbb{C}[W, M]$ .

**Démonstration.** -

Dans un premier temps établissons le résultat dans le cas à diagonale cyclique

Soit  $\chi(X)$  désigne le polynôme caractéristique de  $M_{1,1}$ ,  $\chi(M)$  appartient à  $W\mathbb{C}[W, M]$  et s'écrit donc  $Q(M) + WR(M, W)$  où  $Q$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $z_1$  et  $R(M, W)$  est un polynôme en  $M$  et  $W$ .

Comme  $M$  est triangulaire supérieure par blocs le bloc directeur de  $\chi(M)$  est égal à  $\chi(M_{1,1})$  qui est nul; d'autre part comme le bloc directeur de  $W$  est nul et comme  $R(M, W)$  est une matrice fractale celui de  $WR(W, M)$  est nul aussi.

Par suite le bloc directeur de  $Q(M) = WR(W, M) - \chi(M)$  est nul, or, comme  $M$  est fractale,  $Q(M_{1,1}) = Q(M)_{1,1} = 0$  donc  $Q(X)$  est un multiple du polynôme minimal de  $M_{1,1}$ , qui est  $\chi(X)$  parce que  $M$  est cyclique, or le degré de  $\chi(X)$  est égal à  $z_1$  qui est strictement supérieur à celui de  $Q(X)$  donc  $Q(X) = 0$  et, par suite  $\chi(M) = WR(W, M)$ .

Soit maintenant le cas général:  $M$  est alors la limite d'une suite de matrices à diagonale cyclique  $M_n$ .

Pour tout  $n$   $\chi_{M_{n,1,1}}(M_n)$  appartient à  $WC[W, M_n]$ ; d'une part  $\chi_{M_{n,1,1}}$  tend vers  $\chi_{M_{1,1}}$  par continuité du polynôme caractéristique en fonction de sa matrice, d'où  $\chi_{M_{n,1,1}}(M_n)$  tend vers  $\chi_{M_{1,1}}(M)$ ; nous allons montrer que la limite  $\chi_{M_{1,1}}(M)$  appartient à  $WC[W, M]$ .

L'appartenance d'un vecteur  $V$  à un sous-espace engendré par une famille finie  $\{V_1, \dots, V_q\}$  peut s'exprimer par le fait qu'il existe une sous-famille dont le rang est conservé lors de l'ajout de  $V$ .

$W$  étant nilpotente d'indice  $t$  et les matrices  $M_n$  appartenant à  $F$  une famille génératrice  $\mathcal{G}$  de  $WC[W, M_n]$  sera constituée par les matrices  $W^p M_n^q$  pour  $0 \leq p \leq t-1$  et  $0 \leq q \leq \dim(F)$ ; l'appartenance de  $\chi_{M_{n,1,1}}(M_n)$  à  $WC[W, M_n]$  pour tout  $n$  peut se lire comme suit: quel que soit  $n$  il existe une sous famille de  $\mathcal{G}$  dont le rang est conservé quand on lui ajoute  $\chi_{M_{n,1,1}}(M_n)$  et, quitte à considérer une sous-suite, il existe une famille finie  $\mathcal{G}'$  telle que pour tout  $n$  le rang de  $\{W^p M_n^q, (p, q) \in \mathcal{G}'\}$  est égal à celui de  $\mathcal{G}' \cup \{\chi_{M_{n,1,1}}(M_n)\}$ , or ces matrices ont toutes une limite d'où le rang de  $\{W^p M^q, (p, q) \in \mathcal{G}'\}$  est égal à celui de  $\mathcal{G}' \cup \{\chi_{M_{1,1}}(M)\}$ .

Ce qui établit que dans le cas général  $\chi_{M_{1,1}}(M)$  appartient à  $WC[W, M]$ .  $\square$

**Proposition 15.** *L'idéal  $\mathcal{Y}(A, B)$*

Soient deux matrices fractales commutantes  $A$  et  $B$ ,  $(a_1, \dots, a_{z_1})$  et  $(b_1, \dots, b_{z_1})$  les diagonales des blocs  $A_{1,1}$  et  $B_{1,1}$ , alors quel que soit  $P(X, Y)$  appartenant à  $\mathcal{Y}(A, B) = \langle \prod_{i=1}^{z_1} (rX + sY - (ra_i + sb_i)), (r, s) \in \mathbb{C}^2 \rangle$ ,  $P(A, B)$  appartient à  $WC[W, A, B]$ .

**Démonstration.**

Soient deux matrices fractales commutantes  $A$  et  $B$ , le Théorème 14 entraîne que, quels que soient les scalaires  $(r, s)$ ,  $rA + sB$  est une matrice fractale et  $\mathbb{C}[W, rA + sB]$  est inclus dans  $\mathbb{C}[W, A, B]$ , donc  $\chi_{rA_{1,1} + sB_{1,1}}(rA + sB)$  appartient à  $WC[W, A, B]$ . Comme nous pouvons supposer que  $A$  et  $B$  sont triangulaires supérieures (proposition 5), si on désigne les diagonales de  $A_{1,1}$  et  $B_{1,1}$  par  $(a_1, \dots, a_{z_1})$  et  $(b_1, \dots, b_{z_1})$ , alors  $\chi_{rA_{1,1} + sB_{1,1}}(rA + sB) = \prod_{i=1}^{z_1} (rA + sB - (ra_i + sb_i)I_n)$ .

Si on désigne pour tout  $(r, s)$  par  $\chi_{r,s}(X, Y)$  le polynôme  $\prod_{i=1}^{z_1} (rX + sY - (ra_i + sb_i))$  et par  $\mathcal{Y}(A, B)$  l'idéal de  $\mathbb{C}[X, Y]$  engendré par les polynômes  $\chi_{r,s}(X, Y)$ , alors quel que soit le polynôme  $P(X, Y)$  appartenant à  $\mathcal{Y}(A, B)$ ,  $P(A, B)$  appartient à  $WC[W, A, B]$ .

Si on désigne par  $I(A, B)$  l'ensemble des polynômes  $P(X, Y)$  de  $\mathbb{C}[X, Y]$  tels que  $P(A, B)$  appartient à  $W(\mathbb{C}[W, A, B])$ ,  $I(A, B)$  est un idéal de  $\mathbb{C}[X, Y]$  qui contient  $\mathcal{Y}(A, B)$ , d'où la dimension de l'algèbre-quotient  $\mathbb{C}[X, Y]/I(A, B)$  est majorée par celle de  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$ ; l'avantage que présente le quotient  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$  c'est qu'il est plus facile à étudier.

Remarquons enfin que, comme  $\mathbb{C}[X, Y]$  est Noetherien, il existe un ensemble fini  $T$  de couples  $(r, s)$  tel que  $\mathcal{Y}(A, B) = \langle \chi_{r,s}(X, Y), (r, s) \in T \rangle$ .  $\square$

#### 4. LE CALCUL DES DIMENSIONS

##### 4.1. La dimension du quotient $\mathbb{C}[W, A, B]/W\mathbb{C}[W, A, B]$ .

###### Proposition 16.

$\mathbb{C}[W, A, B]/W\mathbb{C}[W, A, B]$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[X, Y]/I(A, B)$

###### Démonstration.

Soit le morphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{C}[X, Y]$  vers  $\mathbb{C}[W, A, B]/W\mathbb{C}[W, A, B]$  qui associe à tout polynôme  $P(X, Y)$  de  $\mathbb{C}[X, Y]$  la classe  $P(A, B) + W\mathbb{C}[W, A, B]$ .

Il est immédiat que  $\varphi$  est surjective et que son noyau est l'idéal  $I(A, B)$ .

Par suite  $\mathbb{C}[W, A, B]/W\mathbb{C}[W, A, B]$  est isomorphe à  $\mathbb{C}[X, Y]/I(A, B)$ .  $\square$

###### Proposition 17. la dimension de $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$

###### Démonstration.

$\mathcal{Y}(A, B)$  est un idéal zéro-dimensionnel d'où la dimension du quotient  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$  sera égale à la somme des multiplicités de ses zéros [2].

$\mathcal{Y}(A, B)$  est engendré par les produits  $\prod (rX + sY - (ra_i + sb_i))$ , donc si  $(x, y)$  est un zéro de  $\mathcal{Y}(A, B)$  il existe pour chaque couple  $(r, s)$  un couple  $(a_i, b_i)$  tel que  $rx + sy = ra_i + sb_i$ ; en particulier pour le cas  $r=0, s=1$  il existe  $k$  tel que  $y = b_k$  et pour le cas  $r=1, s=0$  il existe un  $q$  tel que  $x = a_q$ ; donc pour  $(q, k)$  il existe  $i$  tel que  $ra_q + sb_k = ra_i + sb_i$ , ce qui équivaut à  $r(a_q - a_i) = s(b_i - b_k)$ ; comme l'ensemble des couples des valeurs des quotients  $r/s$  est infini il est nécessaire que  $a_q - a_i = b_i - b_k = 0$ , d'où le zéro est de la forme  $(a_i, b_i)$ ; la réciproque est immédiate.

L'idéal  $\mathcal{Y}(A, B)$  étant engendré par des produits le calcul de la multiplicité d'un couple  $(a_i, b_i)$  est assez immédiat: on change de repère pour amener le couple considéré en  $(0, 0)$  et on différencie ou bien on localise en  $(0, 0)$ .

En résumé les zéros de  $\mathcal{Y}(A, B)$  sont les couples  $(a_i, b_i)$ , il y en a  $z_1$  (autant que le nombre de termes de la diagonale de  $A$  ou de  $B$ ), donc la dimension du quotient  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$  est égale à  $z_1$ .  $\square$

###### Remarque 18.

On peut aussi avoir recours aux bases de Grobner pour déterminer une base, d'où la dimension, de l'algèbre  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$ ; dans ce cas la remarque énoncée à la fin de la proposition 15 sera fort utile.

D'où

###### Théorème 19.

La dimension de  $\mathbb{C}[W, A, B]$  est inférieure ou égale à  $\dim(W\mathbb{C}[W, A, B]) + z_1$ .

###### Démonstration.



La dimension de  $\mathbb{C}[W, A, B]/W\mathbb{C}[W, A, B]$ , égale à celle de  $\mathbb{C}[X, Y]/I(A, B)$ , qui est inférieure ou égale à la dimension de  $\mathbb{C}[X, Y]/\mathcal{Y}(A, B)$ , donc à  $z_1$ .  $\square$

#### 4.2. La dimension de l'Algèbre $\mathbb{C}[W, A, B]$ .

##### Lemme 20.

Soient  $(a, b)$  appartenant à  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$  et  $m = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , pour tout entier positif  $k$   $m^{k+1} = m \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ .

##### Démonstration.

Simple calcul.  $\square$

##### Théorème 21. (Le problème de Gerstenhaber pour trois matrices dont $W$ )

Soient  $(A, B, W) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$  où  $AW = WA, BW = WB, AB = BA$  alors  $\dim(\mathbb{C}[A, B, W]) \leq \sum_{k=1 \dots t_1} z_k = n$ .

##### Démonstration.

La démonstration se fera par récurrence sur  $t$ .

0) Si  $t_1=1$  le résultat est immédiat:  $A=A_{1,1}, B=B_{1,1}$  et  $W=I$ ; il suffit d'invoquer le Théorème de Gerstenhaber pour deux matrices.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à  $t-1$ .

Selon la proposition 8  $W'_2$  est nilpotente, associée à la composition  $F(z_2, \dots, z_t)$  et  $A'_2, B'_2$  des matrices de  $F(z_2, \dots, z_t)$  commutantes, donc l'hypothèse de récurrence entraîne que  $\dim(\mathbb{C}[W'_2, A'_2, B'_2]) \leq \sum_{k=2 \dots t} z_k$ .

Posons  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A'_{1,2} \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B'_{1,2} \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix}$  et  $W = \begin{pmatrix} 0 & W'_{1,2} \\ 0 & W'_2 \end{pmatrix}$ ; pour  $k \geq 0$  le lemme 20 entraîne  $W^{k+1} A^q B^r = \begin{pmatrix} 0 & W'_{1,2} \\ 0 & W'_2 \end{pmatrix}^{k+1} A^q B^r = \begin{pmatrix} 0 & W'_{1,2} \\ 0 & W'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W'^k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^q_{1,1} B^r_{1,1} & * \\ 0 & A'^q_2 B'^r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & W'_{1,2} \\ 0 & W'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W'^k_2 A'^q_2 B'^r_2 \end{pmatrix}$ . La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & W'_{1,2} \\ 0 & W'_2 \end{pmatrix}$  n'étant pas inversible la dimension de  $\text{Vect}(W^{k+1} A^q B^r)_{q \geq 0, k \geq 0, r \geq 0}$  est inférieure ou égale à celle de  $\text{Vect}(W'^k_2 A'^q_2 B'^r_2)_{q \geq 0, k \geq 0, r \geq 0}$ , qui est  $\mathbb{C}[W'_2, A'_2, B'_2]$  et qui est inférieure ou égale à  $\sum_{k=2 \dots t} z_k$ .

Donc la dimension de  $\text{Vect}(W^{k+1} A^q B^r)_{q \geq 0, k \geq 0, r \geq 0} = W\mathbb{C}[W, A, B]$  est inférieure ou égale à  $\sum_{k=2 \dots t} z_k$  et le Théorème 19 a établi que la dimension de  $\mathbb{C}[W, A, B]$  est inférieure ou égale à  $z_1$  plus celle de  $W\mathbb{C}[W, A, B]$ .

D'où la dimension de  $\mathbb{C}[A, B, W]$  est inférieure ou égale à  $\sum_{k=1 \dots t} z_k = n$ .  $\square$

## 5. LE THÉORÈME DE GERSTENHABER

##### Théorème 22.

La dimension de l'Algèbre engendrée par trois matrices commutantes  $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$  est inférieure ou égale à  $n$ .

**Démonstration.** on désignera par  $a, b, c$  les endomorphismes représentés par  $A, B, C$  dans la base canonique.

Soit  $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$  le polynôme minimal de  $C$ , il en découle la décomposition de  $\mathbb{C}^n$  en somme directe  $\mathbb{C}^n = \bigoplus \text{Ker}(c - \lambda_i I)^{n_i}$ ; il est facile de montrer qu'un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{C}^n$  commute avec  $c$  si et seulement si pour tout  $i$   $f(\text{Ker}(c - \lambda_i I)^{n_i})$  est inclus dans  $\text{Ker}(c - \lambda_i I)^{n_i}$ , d'où, si  $P$  représente le passage à une base associée à la décomposition  $\mathbb{C}^n = \bigoplus \text{Ker}(c - \lambda_i I)^{n_i}$ ,

$P^{-1}CP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I + W_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I + W_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I + W_r \end{pmatrix}$ , et  $P^{-1}AP$  et  $P^{-1}BP$  sont diagonales par

blocs  $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & A_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & B_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_r \end{pmatrix}$  et pour tout  $k$   $A_k$  et  $B_k$  commu-

tent.

Enfin, après avoir remarqué que le commutant de  $\lambda_i I + W_i$  c'est le commutant de  $W_i$ , on applique alors le résultat du Théorème 21 à chaque triplet  $(A_i, B_i, W_i)$ .  $\square$

Ce qui achève la démonstration du Théorème de Gerstenhaber pour trois matrices.

Références:

- [1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, *Linear Multilinear Algebra* 27 (1990), 147-157
- [2] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Using Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998
- [3] M. Gerstenhaber, « *On dominance and varieties of commuting matrices* », *Ann. Math.*, vol. 73, 1961, p. 324-348
- [4] R.M. Guralnick, A note on Commuting Pairs of Matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, vol.31, p 71-75, 1992.
- [5] J. Holbrook, K.C. O'Meara, Some Thoughts On Gerstenhaber's Theorem, *Linear Algebra and its Applications*, 466, p 267-295, 2015.
- [6] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, *Advanced Topics in Linear Algebra*, Oxford University Press, 2011.
- [7] T.S. Motzkin, O. Taussky, Pairs of Matrices with Property L. II, *Transactions of the American Mathematical Society*, 80, p.387-405, 1955.
- [8] M.G. Neubauer, D.J.Saltman, Two-Generated Commutative Subalgebras of  $M_n(F)$ , *Journal of Algebra*, 164, p.545-562, 1994.
- [9] J. Rajchgot, M. Satriano, New Classes of examples satisfying the three matrix analog of Gerstenhaber's theorem, arXiv.org.1711.10109, 2017
- [10] A.Sethuraman, The Algebra generated by Three Commuting Matrices, *Mathematics Newsletter, Ramanujan Math. Soc.*, 21 number 2, September 2011, 26-31.
- [11] H. Shapiro, The Weyr Characteristic, *American Mathematical Monthly*, 106, december, p 919-929, 1999.
- [12] K. Sivic, Varieties of triples of commuting matrices, Ph.D. Thesis, University of Ljubljana, Slovenia, (2001).