La vie des Matrices fractales

PAR PATRICK TELLER

25 septembre 2022

On supposera connues les définitions générales concernant les Matrices de Weyr et les Matrices fractales. [1]

Soit $0 < n_2 \leq n_1$ deux entiers naturels, $F(n_1, n_2)$ l'Algèbre fractale associée, W la matrice de Weyr nilpotente associée et une matrice fractale A , avec f l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique.

Le phénomène suivant a pu être remarqué:

S'il existe un couple d'indices (i_1, j_1) avec $0 < i_1 < j_1 \leq n_2$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, n_1 - 1\}$ $(A^k)_{(i_1, j_1)} = 0$, alors $\chi_{1,1}(A)_{(i_1, j_1 + n_1)} = 0$, où $\chi_{1,1}$ désigne le polynôme caractéristique du bloc $A_{1,1}$.

Sur le plan visuel on considère une case $(i_1 + n_1, j_1 + n_1)$ du bloc $A_{2,2}$, on suppose qu'elle est nulle dans les matrices A^k pour tout $k \in \{0, \dots, n_1 - 1\}$, (et avec elle la case (i_1, j_1)) alors la case $(i_1, j_1 + n_1)$ est nulle dans la matrice $\chi_{1,1}(A)$; on dira que le zéro de la case (i_1, j_1) s'est décalqué sur la case $(i_1, j_1 + n_1)$ de la matrice $\chi_{1,1}(A)$.

Exemple:

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & -4 & 7 & -8 & -10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que les puissances de A ont bien des zéros en position $(2,1)$, $(2,3)$, $(4,1)$, $(4,2)$, $(4,3)$ et dans les lignes 5 à 7 et colonnes 1 à 4.

Le polynôme caractéristique de $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est égal à $\chi_{1,1}(t) = (t-7)^2 t^2$ et

$$\chi_{1,1}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -462 & -182 & -1386 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3234 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -924 & -364 & -2772 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Ceci concerne les cases } (2,1+4), (2,3+4),$$

et les cases des trois dernières lignes-trois dernières colonnes.

L'interprétation « naturelle » de la nullité d'un terme $a_{i,j}(k)$ d'une matrice A^k consiste à énoncer le fait que $f^k(e_j)$ appartient à $\text{Vect}(e_u, u \neq i)$, ce qu'on peut exprimer comme suit, avec φ_i la forme linéaire $x \rightarrow \langle x, e_i \rangle$, $\varphi_i(f^k(e_j)) = 0$.

malheureusement on ne voit pas où interviendrait là un polynôme caractéristique. En fait l'explication est fournie par le Théorème suivant.

1 Le Théorème qui éclaire tout

Rappelons que l'Algèbre commutative $\mathbf{C}[A, W]$ engendrée par A et W admet comme famille génératrice la famille $(I, A, \dots, A^{n_1-1}, W, WA, \dots, WA^{n_2-1})$. [1]

Théorème 1.

Si $\chi_{1,1}$ désigne le polynôme caractéristique du bloc $A_{1,1}$ la matrice $\chi_{1,1}(A)$ appartient à l'idéal $WC[A, W]$

Démonstration.

Comme A est triangulaire par blocs $\chi_{1,1}(A)$ s'écrit $\begin{vmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ et appliquant le rappel $\chi_{1,1}(A)$ est égal à $Q(A) + WR(A, W)$, où Q est un polynôme de degré strictement inférieur à n_1 et R est un polynôme en deux variables.

Comme le bloc $(WR(A, W))_{1,1}$ est nul on en déduit que le bloc $(Q(A))_{1,1}$ est nul.

Or comme A est triangulaire par blocs $(Q(A))_{1,1} = Q(A_{1,1})$ est nul.

Dans le cas où $A_{1,1}$ est cyclique on peut alors déduire que Q est un polynôme annulateur de $A_{1,1}$, donc un multiple de son polynôme caractéristique, or le polynôme caractéristique est de degré n_1 alors que le degré de Q est strictement inférieur à n_1 , d'où Q est le polynôme nul.

Par suite $\chi(A) = WR(A, W)$.

Dans le cas général:

M est alors la limite d'une suite de matrices cycliques (M_n) .

Pour tout n $\chi_{M_{n_1,1}}(M_n)$ appartient à $WC[W, M_n]$; $\chi_{M_{n_1,1}}$ tend vers $\chi_{M_{1,1}}$ par continuité du polynôme caractéristique en fonction de sa matrice, d'où $\chi_{M_{n_1,1}}(M_n)$ tend vers $\chi_{M_{1,1}}(M)$; nous allons montrer que la limite $\chi_{M_{1,1}}(M)$ appartient à $WC[W, M]$.

L'appartenance d'un vecteur V à un sous-espace engendré par une famille finie $\{V_1, \dots, V_q\}$ peut s'exprimer par le fait qu'il existe une sous-famille libre de celle-ci dont le rang est conservé lors de l'ajout de V .

W étant nilpotente d'indice t et les matrices M_n appartenant à F , une famille génératrice $\mathcal{G}_n$ de $WC[W, M_n]$ sera constituée par les matrices $W^p M_n^q$ pour $0 \leq p \leq t-1$ et $0 \leq q \leq \dim(F)$; l'appartenance de $\chi_{M_{n_1,1}}(M_n)$ à $WC[W, M_n]$ pour tout n peut se lire comme suit: quel que soit n il existe une sous famille de $\mathcal{G}_n$ dont le rang est conservé quand on lui ajoute $\chi_{M_{n_1,1}}(M_n)$.

Comme l'ensemble des couples (p,q) considéré est fini on peut, quitte à se limiter à une sous-suite, considérer qu'il existe un ensemble d'indices $I=\{p_i, q_j\}$ tel que pour tout n le rang de $\{W^p M_n^q, (p,q)\in I'\}$ est égal à celui de $\{W^p M_n^q, (p,q)\in I'\}\cup\{\chi_{M_{n_1,1}}(M_n)\}$, or ces matrices ont toutes une limite d'où le rang de $\{W^p M^q, (p,q)\in I'\}$ est égal à celui de $\{W^p M_n^q, (p,q)\in I'\}\cup\{\chi_{M_{1,1}}(M)\}$.

Ce qui établit que dans le cas général $\chi_{M_{1,1}}(M)$ appartient à $WC[W, M]$.

$$\chi_{1,1}(A) = WR(A, W). \quad \square$$

Pour établir le résultat demandé il suffit donc de montrer pour tout $k\in\{0, \dots, n_1 - 1\}$ que $\varphi_i((w \circ f^k)e_{j+n_1})=0$.

$$\text{Et } \varphi_i((w \circ f^k)e_{j+n_1})=\varphi_i((f^k \circ w)e_{j+n_1})=\varphi_i((f^k)e_j)=0$$

Si on suppose que pour tout k de $\{0, \dots, n_1 - 1\}$ $(A^k)_{(i_1, j_1)}$ alors $R(A, W)_{(i_1, j_1)}=0$, d'où le terme de la ligne i_1 et de la colonne j_1+n_1 de $WR(A, W)$, c'est à dire de $\chi_{1,1}(A)$, est nul.

Remarque 2.

On peut étendre cette propriété au cas de matrices fractales associées à des suites $(n_1, \dots, n_t)$.

Théorème 3.

S'il existe un couple d'indices (i_1, j_1) avec $0 < i_1 < j_1 \leq n_{t-1}$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, n_1 - 1\}$ $(A^k)_{(i_1, j_1)} = (A^k)_{(i_1, j_1+n_1)} = \dots = (A^k)_{(i_1, j_1+n_2+\dots+n_{t-2})} = 0$, alors $\chi_{1,1}(A)_{(i_1, j_1+n_1+n_2+\dots+n_{t-1})} = 0$, où $\chi_{1,1}$ désigne le polynôme caractéristique du bloc $A_{1,1}$.

Références:

[1] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.