Les matrices quasi-commutantes

PAR PATRICK TELLER

Résumé

Le problème de la réduction simultanée des couples de matrices quasi-commutantes remonte apparemment à Wielandt [1]; le cas où B est une matrice de Weyr étant simple et esthétique il nous a apparu qu'il fournissait une piste assez claire pour établir une réduction simultanée des couples quasi-commutants.

Les prérequis sont:

i) la réduction des matrices nilpotentes à la forme de Weyr [2], [3]

ii) la forme $\alpha -$ fractale des solutions de l'équation AW=αWA [3] (rappelée dans la première section)

iii) des résultats élémentaires d'Algèbre Linéaire (Théorème des Noyaux, Théorème de Cayley-Hamilton,...)

Définition 1. *On dira que deux matrices A et B sont quasi-commutantes lorsqu'il existe un scalaire non nul et différent de 1, α tel que AB=*αBA.

1 Le cas AW=αWA où W est une matrice de Weyr

Théorème 2. *Le α-commutant de W(z_1,..,z_{t_1})*

(par la suite on écrira W lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur la partition concernée)

Soit une matrice A=$(A_{i,j})$, AW=αWA si et seulement si

$\forall(i,j)$,

1. i>j $\Longrightarrow A_{i,j}=0$

2. i$\leqslant j$ A$_{i,j}$=$\begin{pmatrix} \alpha A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

C'est à dire: le $\alpha -$ commutant de W est l'espace vectoriel des matrices $\frac{1}{\alpha}$-Fractales de partition (z_1,..,z_{t_1}).

Démonstration.

Soit A=(A$_{i,j}$) découpée en blocs comme W, AW=αWA $\Longleftrightarrow \forall(i,j) A_{i,j}W_{j,j+1}=\alpha W_{i,i+1}A_{i+1,j+1}$.

1ère étape: étude des blocs sous la diagonale principale.

Soit j<t_1, 0=W$_{j,j+1}$A$_{j+1,1}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ A$_{j+1,1}$=0, c'est à dire $\forall j+1>1$, A$_{j+1,1}$=0.

Soit 1<j<t_1 A$_{j,1}$,W$_{1,2}$=αW$_{j,j+1}$A$_{j+1,2}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,2}$=0, c'est à dire $\forall j+1>2$, A$_{j+1,2}$=0 et ainsi de suite, ce qui entraîne que A est triangulaire supérieure par blocs.

2 ème étape: étude des blocs de la diagonale principale.

Soit j<t_1 A$_{j,j}$W$_{j,j+1}$=αW$_{j,j+1}$A$_{j+1,j+1}$ alors

si $z_j=z_{j+1}$ W$_{j,j+1}$=I$_{z_j}$ et donc A$_{j,j}$=$\alpha A_{j+1,j+1}$

si $z_j > z_{j+1}$ et si on pose $A_{j,j} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$ alors $A_{j,j}W_{j,j+1} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$ et $\alpha W_{j,j+1}A_{j+1,j+1} = \alpha\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,j+1} = \alpha\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $A_{j,j} = \begin{pmatrix} \alpha A_{j+1,j+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.

D'où la diagonale principale de blocs de la matrice A.

3ème étape: au-dessus de la diagonale de blocs

soit $j<k<t_1$ $A_{j,k}W_{k,k+1} = \alpha W_{j,j+1}A_{j+1,k+1}$, qui conduit à un résultat analogue $A_{j,k} = \begin{pmatrix} \alpha A_{j+1,k+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.

Dans les trois cas la réciproque est immédiate.

Donc le $\alpha-$commutant de $W(z_1,..,z_{t_1})$ est l'espace vectoriel des matrices $\frac{1}{\alpha}$-Fractales et l'ensemble des matrices quasi-commutant avec W est l'univers fractal de partition associée $(z_1,..,z_{t_1})$.

Remarquons que, comme ${}^t\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \end{pmatrix}$, ${}^tW_{i,i+1}A_{\mathrm{ij}}W_{j,j+1} = \alpha A_{i+1,j+1}$. □

2 Le cas général AB=αBA

Proposition 3. *Soit une matrice A s'il existe un scalaire $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ tel que A est semblable à αA soit A est nilpotente, soit α est une racine de l'unité.*

Démonstration.

L'ensemble des valeurs propres de A est fini et stable par multiplication par α, donc si ce n'est pas $\{0\}$, l'ensemble des puissances de α est fini, ce qui entraîne que α est une racine de 1. □

Proposition 4. *Soit une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la matrice régulière$P \in \boldsymbol{Gl}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation $AB = \alpha BA$ est isomorphe à l'espace vectoriel des solutions de l'équation $AP^{-1}BP = \alpha P^{-1}BPA$.*

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul. □

Définition 5. *Exposant unifié d'une matrice*

Soit une matrice M et son polynôme caractéristique $\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{n_i}$; on appellera exposant unifié le maximum des n_i et on le notera u.

On sait que $\forall i \, \mathrm{Ker}(M-\lambda_i I)^{n_i} = \mathrm{Ker}(M-\lambda_i I)^u$ et $K^p = \bigoplus_{i=1}^{r}\mathrm{Ker}(M-\lambda_i I)^u$.

Proposition 6. *Soient deux matrices $(R,S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $RS = \alpha\mathrm{SR}$ alors, quel que soit le scalaire λ, $R(Ker(S-\lambda I_n)^u) \subset \mathrm{Ker}(\alpha S-\lambda I_n)^u$.*

Démonstration. De l'égalité RS=αSR on déduit que $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{R}P(S) = P(\alpha S)R$ soit alors $X \in \mathbb{K}^n$, tel que $(S-\lambda I_n)^u X = 0$ on en déduit que $\mathrm{R}(S-\lambda I_n)^u X = 0$, d'où $(\alpha S-\lambda I_n)^u \mathrm{R}X = 0$; c'est à dire $\mathrm{R}(\mathrm{Ker}(S-\lambda I_n)^u) \subset \mathrm{Ker}(\alpha S-\lambda I_n)^u$. □

Par suite $A(\mathrm{Ker}(B^u) \subset \mathrm{Ker}(B^u)$ et $A(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(B)\setminus\{0\}}\mathrm{Ker}(B-\lambda I)^u \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(B)\setminus\{0\}}\mathrm{Ker}(B-\lambda I)^u$ d'où si on considère la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques de B on obtient une base $\mathcal{C}$ où B devient $\begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$, avec B_0 nilpotente et B" régulière dans cette même base A devient $\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ et A"B"=$\alpha B''A''$.

Si on applique à (A_0,B_0) les résultats de la section précédente il existe une base où B devient $\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$ et A devient $\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$, avec W une matrice de Weyr, A_0 une matrice $\alpha-$fractale, B" régulière et $A''B''$=$\alpha B''A''$.

Si on considère F=$\bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Spec}(B)\setminus\{0\}}\mathrm{Ker}(B-\lambda I)^u$ A" et B" représentent des endomorphismes de F, il existe v tel que F=$\bigoplus_{\mu\in \mathrm{Spec}(A'')}\mathrm{Ker}(A''-\lambda I)^v$ et, comme au-dessus, F posssède une base où A'' devient $\begin{pmatrix} W' & 0 \\ 0 & A''' \end{pmatrix}$ et B'' s'écrit $\begin{pmatrix} B_0'' & 0 \\ 0 & B''' \end{pmatrix}$, avec W' une matrice de Weyr, B"$_0$ une matrice $\frac{1}{\alpha}-$fractale, A''' et B''' régulières et $A'''B'''$=$\alpha B'''A'''$.

Proposition 7. *Soient (R,S)*$\in\mathcal{GL}_p(\mathbb{K})^2$ *où S a pour polynôme caractéristique* $\prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{p_i}$, *telles que RS=αSR alors*

..i) $\mathbb{K}^p=\bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(S\text{-}\lambda_i I_n)^u$

ii) $R(Ker(S-\lambda_i I_n)^u\subset \mathrm{Ker}\Big(S-\frac{\lambda_i}{\alpha}I_n\Big)^u$.

iii) quitte à réordonner la liste des valeurs propres de S $\forall i\in\{2,\dots,r\},\lambda_{i-1}=\alpha\lambda_i$

iv) $\forall i\in\{1,\dots,r\},\forall k\in\{0,\dots,u\}\dim(Ker(S-\lambda_i I_n)^k)$=$\dim(\mathrm{Ker}(S-\lambda_{i+1[r]}I_n)^k)$

Démonstration. i) découle immédiatement du théorème de Cayley-Hamilton.

ii) d'après la proposition précédente.

iii) Comme R est régulière si $\mathrm{Ker}(S-\lambda_i I_n)^u$ n'est pas nul alors $\mathrm{Ker}\Big(S-\frac{\lambda_i}{\alpha}I_n\Big)^u$non plus c'est à di re: si λ est valeur propre de S, alors $\frac{\lambda}{\alpha}$ aussi.,

iv) R est régulière donc dim(Ker($S-\lambda_i I_n)^k$)=dim(R(Ker($S-\lambda_i I_n)^k$)$\leqslant$dim(Ker($S-\lambda_{i+1[r]}I_n)^k$), d'où l'égalité. □

Théorème 8. *Soit un scalaire* $\alpha\neq 0$, $\neq 1$ *et (A,B)*$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, *il alors existe une matrice régulière P telle que* $P^{-1}\mathrm{AP}=\begin{pmatrix} A_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & W'' & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & A_r \\ 0 & 0 & A_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}\mathrm{BP}=\begin{pmatrix} W & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B_0'' & 0 & * & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \lambda_1 I+W''' & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \lambda_2 I+W''' & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_r I+W''' \end{pmatrix}$, *où W,*$W''$*,*$W'''$ *sont des matrices de Weyr,* A_0 *est* $\alpha-$fractale, B_0'' *est* $\frac{1}{\alpha}$*-fractale,* A_1*,...,*A_r *sont* $\alpha-$fractales *et régulières.*

Démonstration.

Du 7.iv et des résultats sur les matrices de Weyr [2] découle que les matrices de Weyr représentant les nilpotents B"'-λ_iId $|\mathrm{Ker}(B'''-\lambda_i I_n)^u$ sont égales et, donc notées W"'.

Du 7.ii découle la décomposition en blocs $\begin{pmatrix} 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & A_r \\ A_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

De la relation AB=αBA découle aussi $\forall i\in\{1,\dots,r\},A_i W'''$=$\alpha$W"'A$_i$ □

Paris Septembre 2018

Bibliogaphie:

[1] O. Holtz, V. Mehrmann, H Schneider, « Potter, Wielandt, and Drazin on the matrix equation AB=ωBA, , with some new answers to old questions », https://arxiv.org/pdf/math/0512607.pdf

[2] H. Shapiro, The Weyr characteristic, American Mathematical Monthly, 106, dec. 1999, pp.919-929.

[3] P. Teller http://lalgebrisant.fr/MatricesDeWeyr/LuniversDesMatricesFractales