

# Une caractérisation effective de la dimension de l'algèbre engendrée par deux matrices commutantes

PATRICK TELLER

**Abstract.** Being given a nilpotent  $n \times n$  complex matrix  $N$  and a matrix  $A$ , commuting with  $N$ , the corner associated matrices of  $A$  are defined, providing an equivalence and an effective characterisation of the maximality of the dimension of the Algebra generated by  $N$  and  $A$ ; the result is a generalization of a previous result by T.J. Laffey and S. Lazarus ([7]).

The same tools provide an elementary proof of the characterisation of nilpotency of a matrix commuting with  $N$ , as first given in [2].

We use only Linear Algebra elementary technics and the equivalence between  $\dim(\text{Alg}(N,A))=n$  and  $\dim(\text{Cent}(\text{Alg}(N,A)))=n$  ([9]).

## Résumé

Etant données une matrice nilpotente complexe  $N$  et une matrice  $A$  qui commute avec  $N$ , on définit les matrices-coins associées à  $A$  et on détermine une condition nécessaire et suffisante et une caractérisation effective du cas où la dimension de l'algèbre engendrée par  $A$  et  $N$  est de dimension maximale. Le résultat généralise un résultat de T.J. Laffey and S. Lazarus ([7]) obtenu dans un cas particulier.

Les mêmes outils fournissent une démonstration élémentaire de la caractérisation de la nilpotence d'une matrice commutant avec  $N$ , précédemment établie dans [2].

Nous n'utilisons que des techniques élémentaires d'algèbre linéaire et l'équivalence entre  $\dim(\text{Alg}(N,A))=n$  et  $\dim(\text{Cent}(\text{Alg}(N,A)))=n$  ([9]).

Mots clés : Matrices nilpotentes, commutant d'une matrice nilpotente, algèbre engendrée par deux

AMS subject classifications. 15A03, 15A27

## 1 Introduction

Il est bien connu que la dimension d'une algèbre commutative engendrée par une paire de matrices complexes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est de dimension inférieure ou égale à  $n$ .

Le résultat, immédiat lorsque l'une des deux matrices représente un endomorphisme cyclique (en anglais « non-derogatory »; pour alléger nous dirons « matrices cycliques »), a été démontré dans le cas général dans [8], [5], [1], [7], [6], [9] et [11] et, si  $B$  appartient à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , l'ensemble des matrices  $A$  qui commutent avec  $B$ , et telles que  $\dim(\text{Alg}(B, A)) = n$ , is est dense dans le commutant de  $B$ .

Il est possible, en utilisant la décomposition de Jordan de limiter l'étude au cas d'une matrice nilpotente  $N$ , qui s'écrit:  $N=J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$ , où pour chaque  $i$   $J(t_i)$  désigne la

matrice à  $t_i$  lignes et colonnes 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Une caractérisation effective des matrices  $A$  telles que  $NA = AN$  and  $\dim(\text{Alg}(N, A)) = n$  a été donnée dans [7, p.266] dans le cas particulier où les blocs de Jordan de  $N$  sont tous de même taille, c'est à dire  $N = J(t) \oplus \dots \oplus J(t)$ ; nous allons répondre à cette même question dans le cas général; notre outil principal sera l'équivalence entre  $\dim(\text{Alg}(N, A)) = n$  and  $\dim(\text{Cent}(\text{Alg}(N, A))) = n$  ([9]) et nous allons introduire à cette fin deux sous-matrices particulières de  $A$ ,  $A'$  and  $A''$ , appelées respectivement la « matrice coins-gauches associée » et la « matrice coins-droits associée », qui contiennent des informations sur  $A$ , modulo l'ideal engendré par  $N$  dans le commutant  $\mathcal{C}(N)$  de  $N$ ; nous allons établir que la dimension de l'algèbre  $\text{Alg}(N, A)$  est égale à  $n$  si et seulement le degré du polynôme annulateur minimal de  $A'$  and  $A''$  est égal à  $n$ .

Ce résultat généralise celui de [7].

## 2 Les matrices-coins associées

Nous conviendrons d'écrire les matrices nilpotentes suivant la convention usuelle  $N = J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$ , où  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$ .

On sait ([10]) que la matrice  $A$  commute avec la matrice nilpotente  $N = J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$  si et seulement si  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}}$ , où les blocs  $A_{ij}$  appartiennent à  $\mathcal{M}_{t_i t_j}(\mathbb{C})$  et sont de la forme:

$$\begin{aligned} & \text{si } t_i \leq t_j \\ & A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & q_{t_j - t_i + 1} & q_{t_j - t_i + 2} & \dots & \dots & q_{t_j} \\ & \dots & 0 & q_{t_j - t_i + 1} & \dots & \dots & q_{t_j - 1} \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & q_{t_j - t_i + 1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & q_{t_j - t_i + 1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & q_{t_j - t_i + 1} \end{pmatrix} \\ & \text{et si } t_i \geq t_j \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \dots & \dots & \dots & q_{t_j} \\ 0 & q_1 & q_2 & \dots & \dots & \dots & q_{t_j - 1} \\ \dots & 0 & q_1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & q_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & q_1 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}; \text{ nous appellerons de tels blocs } A_{ij} \text{ quasi-triangulaires} \end{aligned}$$

la matrice  $A$  sera appelée une N-matrice.

Pour chaque bloc  $A_{ij}$  nous désignerons par  $A'_{ij}$ , coin gauche, l'élément de la première ligne et première colonne, éventuellement nul, et par  $A''_{ij}$ , coin droit, l'élément de la dernière ligne et dernière colonne, éventuellement nul; les propriétés de l'addition et de la multiplication matricielles entraînent que, si  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont des matrices quasi-triangulaires de même taille are skew-triangular matrices of the same size,  $(A_{ij} + B_{ij})' = A'_{ij} + B'_{ij}$  et  $(A_{ij} + B_{ij})'' = A''_{ij} + B''_{ij}$  et si  $A_{ij}$  et  $B_{jk}$  sont deux matrices quasi-triangulaires que l'on peut multiplier entre elles  $(A_{ij} B_{jk})' = A'_{ij} B'_{jk}$  et  $(A_{ij} B_{jk})'' = A''_{ij} B''_{jk}$ .

Définissons maintenant les matrices coins-gauches et coins-droits associée à une N-matrice dont la décomposition en blocs est  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}}$ : nous appellerons matrice coin-gauche associée à  $A$  la matrice  $A' = (A'_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  et matrice coins-droits associée à  $A$  la matrice  $A'' = (A''_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ .

**Lemme 1.** *L'application  $\Phi: A \mapsto (A', A'')$  est un morphisme du commutant  $\mathcal{C}(N)$  de la matrice nilpotente  $N$  vers  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ , dont le noyau est l'idéal  $NC(N)$ .*

**Démonstration.** □

Il est immédiat que si  $A$  et  $B$  ont les décompositions en blocs  $(A_{ij})$  and  $(B_{ij})$  alors  $(A + B)' = A' + B'$ ,  $(A + B)'' = A'' + B''$ ,  $(AB)' = A'B'$ ,  $(AB)'' = A''B''$ .

Le noyau de  $\Phi$  consiste en les matrices de  $\mathcal{C}(N)$  dont les coins-gauches et les coins-droits sont nuls; il est immédiat mais fondamental, de se convaincre que si  $A$  est une telle matrice il existe une matrice  $B$  dans  $\mathcal{C}(N)$  telle que  $A = NB$ , donc le noyau de  $\Phi$  est l'idéal  $NC(N)$ .

### 3 Les matrices coins-gauches et coins-droits.

**Proposition 2.**

Avec les hypothèses des paragraphes précédents les matrices coins-gauches et coins-droits  $A'$  et  $A''$  associées à la matrice  $A$  ont le même polynôme caractéristique mais pas forcément le même polynôme minimal; elles peuvent ne pas être cycliques mais avoir un polynôme minimal de degré  $p$ .

**Démonstration.** Soit  $N = J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$ , où  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$  et la partition de l'ensemble des entiers  $[[1, \dots, p]]$  en segments  $S_1, \dots, S_r$  (éventuellement des singletons) tels que  $t_j = t_l$  si et seulement si  $j, l \in S_k$  pour un certain  $k \in \{1, \dots, r\}$  (comparer avec [2, p.60]).

Soit  $A=(A_{ij})$  tel que  $AN=NA$ .

Lorsque  $i$  et  $j$  appartiennent à un même  $S_k$ , le bloc  $A_{ij}$  est une matrice carrée et dans ce cas  $A'_{ij} = A''_{ij}$ , par suite les matrices  $A'$  et  $A''$  ont une diagonale commune formée de  $r$  blocs carrés.

De même l'observation de la structure des matrices quasi-triangulaires (voir paragraphe 2.) montre que si  $t_i < t_j$   $A'_{ij} = 0$ , donc la matrice  $A'$  est triangulaire supérieure par blocs et de même si  $t_i > t_j$   $A''_{ij} = 0$  et par suite  $A''$  est triangulaire supérieure par blocs:

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & * & * & * & * \\ 0 & D_2 & * & * & * \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_r \end{pmatrix} \text{ et } A'' = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & D_2 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & \dots & 0 \\ * & * & \dots & \dots & 0 \\ * & * & \dots & * & D_r \end{pmatrix}; \text{ d'où } A' \text{ et } A'' \text{ ont comme polynôme}$$

caractéristique  $|D_1 - xI| \dots |D_r - xI|$ .

Cependant les exemples suivants montrent que les polynômes minimaux peuvent être différents et que même si  $A'$  et  $A''$  ont des polynômes minimaux de degré strictement inférieur à  $p$ , leur polynôme annulateur commun minimal peut être de degré  $p$ . □

**Exemple 3.** Soit  $N = J(3) \oplus J(2) \oplus J(1)$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; alors  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et

$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; ces deux matrices ont le même polynôme caractéristique, mais leurs polynômes minimaux sont respectivement  $(X - 1)^2$  et  $X-1$ .

**Exemple 4.** Soit  $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  and  $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; leurs polynomes minimaux sont res-

pectivement  $(X - 1)(X - 2)^2$  et  $(X - 1)^2(X - 2)$  et leur polynôme annulateur commun minimal est  $(X - 1)^2(X - 2)^2$ .

**Remarque 5.**

L'exemple suivant montre que l'algèbre  $\text{Alg}(N,A)$  peut être de dimension ni même lorsque ni  $A$ , ni  $N$ , ni même aucune matrice de  $\text{Alg}(A,N)$  n'est cyclique:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } \text{Alg}(N,A) = \text{Vect}(I, A, N) \text{ qui est de dimension 3 mais aun-}$$

cune matrice de la forme  $xI + yA + zN$  n'est cyclique parce que  $A$  et  $N$  commutent et leur indice de nilpotence est 2.

Par ailleurs  $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  est cyclique et  $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , donc le polynôme annulateur commun minimal est  $X^2$ .

Le résultat qui suit est extrêmement élémentaire, il concerne les polynômes minimal et caractéristique d'une matrice  $M$  in  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  et nous sera utile dans la démonstration du théorème:

**Lemme 6.** Soit une matrice  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  dont le degré du polynôme minimal est strictement inférieur à  $p$ , alors  $M$  possède au moins un sous-espace propre de dimension strictement supérieure à 1.

**Démonstration.** Pour tout complexe  $\lambda$  et tout entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous désignerons par  $J_\lambda(k)$  le

bloc de Jordan, de taille  $k$ ,  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ ; la matrice  $M$  est semblable à la matrice

$\bigoplus_{i=1}^r (\bigoplus_{j=1}^{m_i} J_{\lambda_i}(k_{i,j}))$  et son polynôme caractéristique est alors  $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\sum_{j=1}^{m_i} k_{i,j}}$  et son polynôme minimal est  $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\max\{k_{i,j}, j \in \{1, \dots, m_i\}\}}$ , donc, si le degré du polynôme minimal est strictement inférieur à  $p$ , il existe au moins un indice  $i$  tel que  $\sum_{j=1}^{m_i} k_{i,j} > \max\{k_{i,j}, j \in \{1, \dots, m_i\}\}$ , d'où  $m_i > 1$ , and  $m_i$  est la dimension du sous-espace propre associé à  $\lambda_i$ .

En d'autres termes  $M$  possède au moins deux blocs de Jordan associés à une même valeur propre.  $\square$

## 4 Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre $\text{Alg}(N, A)$ soit de dimension $n$

Rappelons le résultat de [1]: soit une matrice nilpotente  $N = J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$ , où  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$  et la matrice  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}}$  telle que  $AN = NA$ , alors l'algèbre  $\text{Alg}(N, A)$  est engendrée par la famille  $\mathcal{S} = (I, N, \dots, N^{t_1-1}, A, AN, \dots, AN^{t_2-1}, A^2, A^2N, \dots, A^2N^{t_3-1}, \dots, A^k, A^kN, \dots, A^kN^{t_{k+1}-1}, \dots, A^{p-1}, A^{p-1}N, \dots, A^{p-1}N^{t_p-1})$ .

### Théorème 7.

Soit la matrice nilpotente  $N = J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$ , où  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$  et  $\sum_{k=1}^p t_k = n$ , et la matrice, écrite par blocs  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}}$  telle que  $NA = AN$ .

Si les matrices  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$  sont linéairement indépendantes, c'est à dire si le degré du polynôme annulateur commun minimal des matrices  $A'$  and  $A''$  is égal à  $p$ , la dimension de l'algèbre  $\text{Alg}(N, A)$  est égale à  $n$ .

**Démonstration.** Supposons que  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$  sont linéairement indépendants; nous allons établir que la famille  $\mathcal{S}$ , qui engendre l'algèbre  $\text{Alg}(N, A)$ , et dont le cardinal est  $n$ , est libre.

Soit les scalaires  $\alpha_{k,u}$  tels que  $\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{t_{k+1}-1} \alpha_{k,u} A^k N^u = 0$ , alors  $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,0} A^k$  appartient à l'idéal engendré par  $N$ , d'où  $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,0} A^k = 0$  et  $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,0} A''^k = 0$  i.e.  $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,0} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^k = 0$ ; or nous avons supposé que les matrices  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$  sont linéairement indépendantes, donc  $\alpha_{0,0} = \dots = \alpha_{p-1,0} = 0$ .

L'hypothèse  $\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{t_{k+1}-1} \alpha_{k,u} A^k N^u = 0$  devient alors  $\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{u=1}^{t_{k+1}-1} \alpha_{k,u} A^k N^u = 0$ , donc  $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,1} A^k N$  appartient à l'idéal engendré par  $N^2$ ; ce qui, en considérant la structure des matrices quasi-triangulaires, est équivalent à dire que  $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,1} A^k$  appartient à l'idéal engendré par  $N$ , et donc à nouveau  $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,1} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^k = 0$  d'où  $\alpha_{0,1} = \dots = \alpha_{p-1,1} = 0$ .

En itérant nous montrons donc que quel que soit  $(k, u)$  tel que  $0 \leq k \leq p-1, 0 \leq u \leq t_{k+1}-1$ ,  $\alpha_{k,u} = 0$  donc  $\mathcal{S}$  est libre et la dimension de  $\text{Alg}(N, A)$  est égale à  $n$ .  $\square$

Pour établir la réciproque nous avons besoin de résultats classiques d'algèbre linéaire:

### Théorème 8. (Cecioni-Frobenius)

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ , la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation  $AX = XB$  est égale à  $\sum_{i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, q\}} \deg(p.g.c.d.(a_i, b_j))$ , où les  $a_i$  et les  $b_j$  sont les facteurs invariants de  $A$  et  $B$ . [4]

Comme les facteurs invariants de la matrice nilpotente  $J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$  sont les monômes  $X^{t_i}$ , où  $i=1, \dots, p$ , le théorème de Cecioni-Frobenius devient ici:

**Lemme 9.** Soit  $A=J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$  et  $B=J(s_1) \oplus \dots \oplus J(s_q)$  deux matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$

i) La dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation  $AX=XB$  est égale à  $\sum_{i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, q\}} \min(t_i, s_j)$ .

ii) Dans tous les cas la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation  $AX=XB$  est supérieure ou égale à  $r$ .

iii) Si  $p \geq 2$  et  $q \geq 2$  la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation  $AX=XB$  est supérieure ou égale à  $r+1$ .

**Démonstration.** i) Il suffit de remarquer que le p.g.c.d.  $(X^{t_i}, X^{s_j})$  est égal à  $X^{\min(t_i, s_j)}$ .

ii) Si  $t_1 \geq s_1$  alors pour chaque  $j$  p.g.c.d.  $(X^{t_1}, X^{s_j}) = X^{s_j}$ , d'où  $\sum_{j \in \{1, \dots, q\}} \deg(\text{p.g.c.d.}(X^{t_1}, X^{s_j})) \geq \sum_{j \in \{1, \dots, q\}} \deg(X^{s_j}) = \deg(X^r) = r$ ; bien sûr la conclusion est la même lorsque  $s_1 > t_1$ .

iii) Si  $t_1 \geq s_1$ , comme  $p \geq 2$  alors  $\sum_{i \in \{1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, q\}} \deg(\text{p.g.c.d.}(X^{t_i}, X^{s_j})) \geq \sum_{j \in \{1, \dots, q\}} \deg(\text{p.g.c.d.}(X^{t_1}, X^{s_j})) + \sum_{j \in \{1, \dots, q\}} \deg(\text{p.g.c.d.}(X^{t_2}, X^{s_j})) > \sum_{j \in \{1, \dots, q\}} \deg(\text{p.g.c.d.}(X^{t_1}, X^{s_j})) = r$ ; il en est de même lorsque  $s_1 > t_1$ , en utilisant alors l'hypothèse  $q \geq 2$ .  $\square$

**Proposition 10.** Soit  $T'$  et  $T''$  deux matrices triangulaires supérieures dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ , de même diagonale et dont le polynôme annulateur commun minimal est de degré strictement inférieur à  $p$ , alors la dimension de  $\{X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), T'X = XT''\}$  est strictement supérieure à  $p$ .

**Démonstration.** Comme  $T'$  et  $T''$  sont deux matrices triangulaires supérieures dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ , de même diagonale elles ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres  $\lambda_i$  avec les mêmes multiplicités (algébriques)  $d_i$ , donc avec les notations du Lemma 6  $T'$  est semblable à  $J' = \bigoplus_{i=1}^r \left( \bigoplus_{j=1}^{m'_i} J_{\lambda_i}(k'_{i,j}) \right)$  et  $T''$  est semblable à  $J'' = \bigoplus_{i=1}^r \left( \bigoplus_{j=1}^{m''_i} J_{\lambda_i}(k''_{i,j}) \right)$ , où pour chaque valeur propre  $\lambda_i$   $\sum_{j=1}^{m'_i} k'_{i,j} = \sum_{j=1}^{m''_i} k''_{i,j} = d_i$ ; si nous posons pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $A_i = \bigoplus_{j=1}^{m'_i} J_{\lambda_i}(k'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$  and  $B_i = \bigoplus_{j=1}^{m''_i} J_{\lambda_i}(k''_{i,j}) \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$ , nous pouvons écrire  $J' =$

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & A_r \end{pmatrix} \text{ and } J'' = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & B_r \end{pmatrix}.$$

Notons  $T' = P^{-1}J'P$  et  $T'' = Q^{-1}J''Q$ , alors nous avons l'équivalence immédiate:  $T'X = XT'' \iff P^{-1}J'PX = XQ^{-1}J''Q \iff J'PXQ^{-1} = PXQ^{-1}J''$ , et, comme le morphisme  $X \mapsto PXQ^{-1}$  est un isomorphisme, la dimension de  $\{X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), T'X = XT''\}$  est égale à celle de  $\{Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), J'Y = YJ''\}$ .

En posant  $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & Y_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & Y_r \end{pmatrix}$  alors  $J'Y = YJ'' \iff \forall i \in \{1, \dots, r\}, A_i Y_i = Y_i B_i$  (\*) et si on

écrit  $A_i = \lambda_i I_{d_i} + A'_i$ ,  $B_i = \lambda_i I_{d_i} + B'_i$ , où  $A'_i$  et  $B'_i$  sont nilpotentes,  $A_i Y_i = Y_i B_i$  est équivalent à  $A'_i Y_i = Y_i B'_i$  et la dimension de l'espace vectoriel des matrices  $Y$ , diagonale par blocs, telles que  $J'Y = YJ''$  est la somme des dimensions des espaces vectoriels des solutions de  $A'_i Y_i = Y_i B'_i$ .

Comme le polynôme annulateur commun minimal est de degré strictement inférieur à celui du polynôme minimal l'application du Lemme 6 simultanément à  $J'$  et à  $J''$  permet de conclure qu'il existe parmi les valeurs propres (forcément communes)  $\lambda_i$  une valeur propre  $\lambda_{i_0}$  pour laquelle  $A_{i_0}$  et  $B_{i_0}$  possèdent au moins deux blocs de Jordan.

Par suite on peut déduire du Lemme 9 que pour chaque  $i \in \{1, \dots, r\}$  la dimension de  $\{Y_i, A'_i Y_i = Y_i B'_i\}$  est au moins  $d_i$  et pour  $i_0$  (au moins) la dimension de  $\{Y_{i_0}, A'_{i_0} Y_{i_0} = Y_{i_0} B'_{i_0}\}$  is at least  $d_{i_0} + 1$ , donc la dimension de  $\{X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), T'X = XT''\}$  est strictement supérieure à  $\sum_{i=1}^r d_i = p$ .  $\square$

Nous sommes maintenant en état d'énoncer et de prouver la réciproque du Théorème 7 (ou plus précisément sa contraposée):

**Théorème 11.**

Soit la matrice nilpotente  $N=J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$ , où  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$  et  $\sum_{k=1}^p t_k = n$ , et la matrice, écrite par blocs  $A=(A_{ij})_{(i,j) \in \{1,\dots,p\}}$  telle que  $NA=AN$ .

Si les matrices  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$  sont linéairement dépendantes, c'est à dire si le degré du polynôme annulateur commun minimal des matrices  $A'$  and  $A''$  is strictement inférieur à  $p$ , la dimension de l'algèbre  $\text{Alg}(N, A)$  est strictement inférieure à  $n$ .

**Démonstration.** Nous allons nous aider de l'équivalence entre  $\dim(\text{Alg}(N, A) = n$  et  $\dim(\text{Cent}(\text{Alg}(N, A))) = n$  qui a été établie dans [9].

Supposons l'existence d'un polynôme non nul  $\pi$  de degré  $d < p$  tel que  $\pi(A') = \pi(A'') = 0$ ; nous allons, suivant la démarche utilisée par [7, p.268], établir l'existence de matrices qui commutent avec  $A$  et  $N$  et qui n'appartiennent pas à l'algèbre  $\text{Alg}(N, A)$ .

Avant tout celles-ci doivent être des  $N$ -matrices (pour commuter avec  $N$ ), nous allons les rechercher sous la forme de  $N$ -matrices  $C$  dont les blocs  $C_{ij}$  seront de la forme

$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & c_{ij} \\ \dots & & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , où les  $c_{ij}$  sont des scalaires.

Le produit d'un tel bloc  $C_{ij}$  by  $A_{jk} = \begin{pmatrix} a'_{jk} & \dots & a''_{jk} & * & \dots & * \\ a'_{jk} & \dots & a''_{jk} & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & a''_{jk} & * & * \\ 0 & \dots & a'_{jk} & 0 & a''_{jk} & * \end{pmatrix}$  sera égal à  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & c_{ij}a''_{jk} \\ \dots & & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et, de même, le produit du bloc  $A_{ij} = \begin{pmatrix} a'_{ij} & \dots & a''_{ij} & * & \dots & * \\ a'_{ij} & \dots & a''_{ij} & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & a''_{ij} & * & * \\ 0 & \dots & a'_{ij} & 0 & a''_{ij} & * \end{pmatrix}$  par  $C_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & c_{jk} \\ \dots & & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  sera égal à  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{ij}c_{jk} \\ \dots & & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Donc le produit  $R=CA$  aura les blocs suivants:  $R_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \sum_j c_{ij}a''_{jk} \\ \dots & & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  tandis que le pro-

duit  $L=AC$  aura pour blocs les  $L_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \sum_j a'_{ij}c_{jk} \\ \dots & & 0 & 0 & \dots \\ \dots & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Par suite la condition  $AC = CA$  est équivalente à  $\Gamma A'' = A' \Gamma$ , où  $\Gamma = (c_{ij})$  appartient à  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ .

Par hypothèse les matrices  $A'$  and  $A''$  appartiennent à  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ , elles ont le même polynôme caractéristique et nous avons supposé que leur polynôme annulateur commun minimal est de degré  $d < p$ ; donc la Proposition 10 permet de conclure à l'existence de (au moins)  $p+1$  matrices  $C_1, \dots, C_{p+1}$ , linéairement indépendantes dans le centralisateur de l'algèbre  $\text{Alg}(N, A)$  and pour chacune  $NC_k = 0$ .

Soit une base  $\mathcal{B}$  de l'algèbre  $\text{Alg}(N, A)$  extraite de la famille génératrice  $(I, N, \dots, N^{t_1-1}, AN, \dots, AN^{t_2-1}, \dots, A^{p-1}, A^{p-1}N, \dots, A^{p-1}N^{t_p-1})$ , elle sera de la forme  $(I, N, \dots, N^{l_1-1}, AN, \dots, AN^{l_2-1}, \dots, A^{q-1}, A^{q-1}N, \dots, A^{q-1}N^{l_q-1})$ , où  $q \leq p$ , et pour chaque  $i \in \{2, \dots, q\}, l_i \leq t_i$ ; comme dans [7, p.269] nous allons éliminer de cette base tous les éléments  $A^{k-1}N^{l_k-1}$  (dont le nombre est au plus  $p$ ), ce qui détermine une famille libre  $\mathcal{B}'$  à laquelle nous allons ajouter les matrices  $C_1, \dots, C_{p+1}$ , ce qui produit une famille de cardinal supérieur ou égal à  $\dim(\text{Alg}(N, A))+1$ . Cette famille appartient au centralisateur de  $\text{Alg}(N, A)$ , nous allons montrer qu'elle est libre.

Soient des scalaires  $(\alpha_k)$  et  $(\beta_M)$  tels que  $\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k C_k + \sum_{M \in \mathcal{B}'} \beta_M M = 0$ , alors, en multipliant par  $\mathbb{N}$ , et comme  $\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k C_k \mathbb{N} = 0$ , nous obtenons l'égalité  $\sum_{M \in \mathcal{B}'} \beta_M M \mathbb{N} = 0$ ; mais comme nous avons éliminé de  $\mathcal{B}$  les éléments  $A^{k-1} N^{l_k-1}$ , les matrices  $M \mathbb{N}$ , où  $M \in \mathcal{B}'$ , sont encore libres d'où les  $\beta_M$  sont nuls; retournant à la première égalité il ne reste que  $\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k C_k = 0$ , or cette famille est libre donc les  $\alpha_k$  sont nuls.

Par suite la dimension du centralisateur de l'algèbre  $\text{Alg}(\mathbb{N}, A)$  est strictement supérieure à celle de l'algèbre  $\text{Alg}(\mathbb{N}, A)$ , d'où la dimension de l'algèbre  $\text{Alg}(\mathbb{N}, A)$  est strictement inférieure à  $n$  ([9, p.546]). □

Les Théorèmes 9 et 11 établissent donc l'équivalence:

**Théorème 12.**

Soit la matrice nilpotente  $N = J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$ , où  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$  et  $\sum_{k=1}^p t_k = n$ , et la matrice, écrite par blocs  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}}$  telle que  $\mathbb{N}A = A\mathbb{N}$ .

L'algèbre  $\text{Alg}(\mathbb{N}, A)$  est de dimension  $n$  si et seulement si les matrices  $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$  sont linéairement indépendantes, c'est à dire si et seulement si le degré du polynôme annulateur commun minimal des matrices  $A'$  and  $A''$  is égal à  $p$ .

A la lumière du lemme 1, et dans l'optique de l'étude de ce problème sous Jordan et/ou sous Weyr, on explicitera

**Théorème 13.**

Soit la matrice nilpotente  $N = J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$ , où  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$  et  $\sum_{k=1}^p t_k = n$ , et la matrice, écrite par blocs  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}}$  telle que  $\mathbb{N}A = A\mathbb{N}$ .

L'algèbre  $\text{Alg}(\mathbb{N}, A)$  est de dimension  $n$  si et seulement si le polynôme unitaire  $P(X) \in K[X]$  de plus bas degré tel que  $P(A) \in \text{NC}(N)$  est de degré  $p$ .

**Remarque 14.** Dans le cas particulier où  $t_1 = t_2 = \dots = t_p$ ,  $A' = A''$  et la condition énoncée au-dessus se réduit à «  $A'$  cyclique », ce qui est le résultat établi par [7].

**Remarque 15.**

Cette caractérisation permet de retrouver les aspects topologiques des résultats classiques sur la dimension de l'algèbre commutative engendrée par deux matrices.

## 5 Caractérisation des matrices nilpotentes commutant avec $\mathbb{N}$

**Remarque 16.** Les matrices coins-gauches et coins-droits fournissent aussi une caractérisation simple de la nilpotence de la matrice  $A$  qui commute avec  $\mathbb{N}$ ; cela ne doit pas surprendre parce que les blocs  $(A_{\alpha\alpha})$  introduits par R. Basili ([2, p.60]) et V. Baranovsky ([3]), comme clés de la nilpotence of  $A$  and de l'irréductibilité de  $\mathcal{N}_B$  in [2], sont les blocs diagonaux des deux matrices triangulaires par blocs  $A'$  et  $A''$ .

**Proposition 17.**

Soient la matrice nilpotente à coefficients complexes  $N = J(t_1) \oplus \dots \oplus J(t_p)$  où  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$  et  $\sum_{k=1}^p t_k = n$ , et la matrice décomposée en blocs  $A = (A_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, p\}}$  où  $A$  et  $N$  commutent.

$A$  est nilpotente si et seulement si  $A'$  et  $A''$ , les matrices coins-gauches et coins-droits associées à  $A$  sont nilpotentes; ce qui est équivalent à la nilpotence des blocs de leur diagonale commune.

**Démonstration.**

Si  $A'$  et  $A''$  sont nilpotentes il existe un entier  $k \leq p$  tel que  $A'^k = A''^k = 0$ ; donc  $A^k$  appartient à  $\text{Ker}(\Phi)$ , i.e. il existe une matrice  $B \in \mathcal{C}(N)$  telle que  $A^k = NB$ ; comme  $N$  est nilpotent et commute avec  $B$ ,  $A^k = NB$  est aussi nilpotente et par suite il en est de même pour  $A$ .

Réciproquement, si  $A$  est nilpotente, il existe un entier  $k$  tel que  $A^k = 0$ , alors, comme  $\Phi$  est un morphisme, il existe un entier  $k$  tel que  $A'^k = A''^k = 0$ .

□

**Exemple 18.** Ce dernier résultat fournit un exemple où deux matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  engendrent une algèbre commutative de dimension  $n$ .

Soit  $N = J(3) \oplus J(2) \oplus J(1)$  i.e.  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , alors  $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; le polynôme annulateur commun minimal de  $A'$  et  $A''$  est  $X^3$  donc (Théorème 12) l'algèbre  $\text{Alg}(A, N)$  est de dimension 6 et  $A$  et  $N$  sont nilpotentes.

Enrichi le 02 janvier 2018

## 6 Références

- [1] J. Barria et P.R. Halmos. Vector bases for two commuting matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 27: 147-157, 1990.
- [2] R. Basili. On the irreducibility of commuting varieties of nilpotent matrices. *Journal of Algebra*, 268: 58-80, 2003.
- [3] V. Baranovsky, The Variety of Pairs of Commuting Nilpotent Matrices is Irreducible. *Transformation Groups*, 6, n°1: 3-8, 2001.
- [4] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New-York, 1959, Volume 1, 215-220.
- [5] M. Gerstenhaber. On dominance and Varieties of Commuting Matrices, *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 73, 2: 324-348, 1961.
- [6] R. Guralnick. A note on Commuting Pairs of Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 31: 71-75, 1992.
- [7] T.J. Laffey and S. Lazarus. Two-Generated Commutative Matrix Subalgebras. *Linear Algebra and its Applications*, 147: 249-273, 1991.
- [8] T. Motzkin and O. Taussky. Pairs of matrices with property L II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 80, 249-273, 1955.
- [9] M. G. Neubauer and D. J. Saltman. Two-Generated Commutative Subalgebras of  $M_n(\mathbb{F})$ . *Journal of Algebra*, 164: 545-562, 1994.
- [10] H.W. Turnbull and A.C. Aitken, *An introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Dover, New-York, 1961.
- [11] A.R. Wadsworth. The Algebra Generated by Two Commuting Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 27: 159-162, 1990.