Une caractérisation effective de la dimension de l'algèbre engendrée par deux matrices commutantes

PATRICK TELLER

Abstract. Being given a nilpotent $n \times n$ complex matrix N and a matrix A, commuting with N, the corner associated matrices of A are defined, providing an effective characterisation of the maximality of the dimension of the Algebra generated by N and A; the result is a generalization of a previous result by T.J. Laffey and S. Lazarus ([7]).

The same tools provide an elementary proof of the caracterisation of nilpotency of a matrix commuting with N, as first given in [2].

We use only Linear Algebra elementary technics and the equivalence between dim(Alg(N,A))=n and dim(Cent(Alg(N,A)))=n ([9]).

Résumé

Etant données une matrice nilpotente complexe N et une matrice A qui commute avec N, on définit les matrices-coins associées à A et on détermine une caractérisation effective du cas où la dimension de l'algèbre engendrée par A et N est de dimension maximale. Le résultat généralise un résultat de by T.J. Laffey and S. Lazarus ([7]) obtenu dans un cas particulier.

Les mêmes outils fournissent une démonstration élémentaire de la caractérisation de la nilpotence d'une matrice commutant avec N, précédemment établie dans [2].

Nous n'utilisons que des techniques élémentaires d' algèbre linéaire et l'équivalence entre dim(Alg(N,A))=n et dim(Cent(Alg(N,A)))=n ([9]).

Mots clés : Matrices nilpotentes, commutant d'une matrice nilpotente, algèbre engendrée par deux

AMS subject classifications. 15A03, 15A27

1 Introduction

Il est bien connu que la dimension d'une algebre commutative engendrée par une paire de matrices complexes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension inférieure ou égale à n.

Le résultat, immédiat lorsque l'une des deux matrices représente un endomorphisme cyclique (en anglais « non-derogatory »; pour alléger nous dirons « matrices cycliques »), a été démontré dans le cas général dans [8], [5], [1], [7], [6], [9] et [11] et, si B appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices A qui commutent avec B, et telles que dim (Alg(B, A)) = n, is est dense dans le commutant de B.

Il est possible, en utilisant la décomposition de Jordan de limiter l'étude au cas d'une matrice nilpotente N, qui s'écrit: N=$J(t_1)$ $\oplus$ .... $\oplus$ $J(t_p)$, où pour chaque i $J(t_i)$ désigne la matrice à t_i lignes et colonnes $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$.

Une caractérisation effective des matrices A telles que NA = AN and dim (Alg(N, A)) = n a été donnée dans [7, p.266] dans le cas particulier où les blocs de Jordan de N sont tous de même taille, c'est à dire $N{=}J(t) \oplus \ldots. \oplus J(t)$; nous allons répondre à cette même question dans le cas général; notre outil principal sera l'équivalence entre $\dim(\mathrm{Alg}(N{,}A)){=}n$ and $\dim(\mathrm{Cent}(\mathrm{Alg}(N{,}A))){=}n$ ([9]) et nous allons introduire à cette fin deux sous-matrices particulières de A, A' and A'', appelées respectivement la « matrice coins-gauches associée » et la « matrice coins-droits associée », qui contiennent des informations sur A, modulo l' ideal engendré par N dans le commutant $\mathcal{C}(N)$ de N; nous allons établir que la dimension de l'algèbre Alg(N, A) est égale à n si et seulement le degré du polynôme annulateur minimal de A' and A'' est égal à n.

Ce résultat généralise celui de [7].

2 Les matrices-coins associées

Nous conviendrons d'écrire les matrices nilpotentes suivant la convention usuelle $N = J(t_1) \oplus \ldots. \oplus J(t_p)$, où $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \ldots. \geqslant t_p$.

On sait ([10]) que la matrice A commute avec la matrice nilpotente $N = J(t_1) \oplus \ldots. \oplus J(t_p)$ si et seulement si $A = (A_{\mathrm{ij}})_{(i,j) \in \{1,\ldots,p\}}$, où les blocs A_{ij} appartiennent à $\mathcal{M}_{t_i t_j}(\mathbb{C})$ et sont de la forme:

si $t_i \leqslant t_j$

$$A_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & q_{t_j - t_i + 1} & q_{t_j - t_i + 2} & & \ldots & q_{t_j} \\ & \ldots & 0 & q_{t_j - t_i + 1} & \ldots & \ldots & q_{t_j - 1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & q_{t_j - t_i + 1} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & q_{t_j - t_i + 1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & q_{t_j - t_i + 1} \end{pmatrix}$$

et si $t_i \geqslant t_j$ $\quad A_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \ldots & \ldots & \ldots & q_{t_j} \\ 0 & q_1 & q_2 & \ldots & \ldots & \ldots & q_{t_j - 1} \\ \ldots & 0 & q_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & & \\ \ldots & \ldots & 0 & q_1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & 0 & q_1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & q_1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$; nous appellerons de tels blocs A_{ij} quasi-triangulaires et la matrice A sera appelée une N-matrice.

Pour chaque bloc A_{ij} nous désignerons par A'_{ij}, coin gauche, l'élément de la première ligne et première colonne, éventuellement nul, et par A''_{ij}, coin droit, l'élément de la dernière ligne et dernière colonne, éventuellement nul; les propriétés de l'addicition et de la multiplication matricielles entraînent que, si A_{ij} et B_{ij} sont des matrices quasi-triangulaires de même taille are skew-triangular matrices of the same size, $(A_{\mathrm{ij}} + B_{\mathrm{ij}})' = A'_{\mathrm{ij}} + B'_{\mathrm{ij}}$ et $(A_{\mathrm{ij}} + B_{\mathrm{ij}})'' = \mathrm{A}''_{\mathrm{ij}} {+} B''_{\mathrm{ij}}$ et si A_{ij} et B_{jk} sont deux matrices quasi-triangulaires que l'on peut multiplier entre elles $(A_{\mathrm{ij}} B_{\mathrm{jk}})' = A'_{\mathrm{ij}} B'_{\mathrm{jk}}$ et $(A_{\mathrm{ij}} B_{\mathrm{jk}})'' = A''_{\mathrm{ij}} B''_{\mathrm{jk}}$.

Définissons maintenant les matrices coins-gauches et coins-droits associée à une N-matrice dont la décomposition en blocs est $A{=}(A_{\mathrm{ij}})_{(i,j) \in \{1,\ldots,p\}}$: nous appellerons matrice coin-gauche associée à A la matrice $A'{=}(A'_{\mathrm{ij}})_{(i,j) \in \{1,\ldots,p\}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et matrice coins-droits associée à A la matrice $A''{=}(A''_{\mathrm{ij}})_{(i,j) \in \{1,\ldots,p\}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Lemme 1. *L'application* $\Phi{:}A \longmapsto (A', A'')$ *est un morphisme du commutant* $\mathcal{C}(N)$ *de la matrice nilpotente* N *vers* $\mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, *dont le noyau est l'idéal* $N\mathcal{C}(N)$.

Démonstration. □

Il est immédiat que si A et B ont les décompositions en blocs (A_{ij}) and (B_{ij}) alors $(A + B)' = A' + B'$, $(A + B)'' = A'' + B''$,$(\mathrm{AB})' = A'B'$, $(\mathrm{AB})'' = A''B''$.

Le noyau de Φ consiste en les matrices de $\mathcal{C}(N)$ dont les coins-gauches et les coins-droits sont nuls; il est immédait mais fondamental, de se convaincre que si A est une telle matrice il existe une matrice B dans $\mathcal{C}(N)$ telle que $A = \mathrm{NB}$, donc le noyau de Φ est l'idéal $N\mathcal{C}(N)$.

3 Les matrices coins-gauches et coins-droits.

Proposition 2.
Avec les hypothèses des paragraphes précédents les matrices coins-gauches et coins-droits A' et A'' associées à la matrice A ont le même polynôme caractéristique mais pas forcément le même polynôme minimal; elles peuvent ne pas être cycliques mais avoir un polynôme mininmal de degré p.

Démonstration. Soit $N = J(t_1) \oplus .... \oplus J(t_p)$, où $t_1 \geqslant t_2 \geqslant .... \geqslant t_p$ et la partition de l'ensemble des entiers $[[1, ..., p]]$ en segments $S_1, ..., S_r$ (éventuellement des singletons) tels que $t_j = t_l$ si et seulement si $j, l \in S_k$ pour un certain $k \in \{1, ..., r\}$ (comparer avec [2, p.60]).

Soit $A = (A_{\mathrm{ij}})$ tel que $\mathrm{AN} = \mathrm{NA}$.

Lorsque i et j appartiennent à un même S_k, le bloc A_{ij} est une matrice carrée et dans ce cas $A'_{\mathrm{ij}} = A''_{\mathrm{ij}}$, par suite les matrices A' et A" ont une diagonale commune formée de r blocs carrés.

De même l'observation de la structure des matrices quasi-triangulaires (voir paragraphe 2.) montre que si $t_i < t_j$ $A'_{\mathrm{ij}} = 0$, donc la matrice A' est triangulaire supérieure par blocs et de même si $t_i > t_j$ $A''_{\mathrm{ij}} = 0$ et par suite A'' est triangulaire supérieure par blocs: $A' = \begin{pmatrix} D_1 & * & * & * & * \\ 0 & D_2 & * & * & * \\ 0 & 0 & ... & * & * \\ 0 & 0 & ... & ... & * \\ 0 & 0 & ... & 0 & D_r \end{pmatrix}$ et $A'' = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ * & D_2 & 0 & ... & 0 \\ * & * & ... & ... & 0 \\ * & * & ... & ... & 0 \\ * & * & ... & * & D_r \end{pmatrix}$; d'où A' et A" ont comme polynôme caractéristique $|\ D_1 - \mathrm{xI}\ |...|\ D_r - \mathrm{xI}\ |$.

Cependant les exemples suivants montrent que les polynômes minimaux peuvent être différents et que même si A' et A'' ont des polynômes minimaux de degré strictement inférieur à p, leur polynôme annulateur commun minimal peut être de degré p. □

Exemple 3. Soit $N = J(3) \oplus J(2) \oplus J(1)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; alors $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A" = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ces deux matrices ont le même polynôme caractéristique, mais leurs polynomes minimaux sont respectivement $(X-1)^2$ et X-1.

Exemple 4. Soit $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ and $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; leurs polynomes minimaux sont respectivement $(X-1)(X-2)^2$ et $(X-1)^2(X-2)$ et leur polynôme annulateur commun minimal est $(X-1)^2(X-2)^2$.

Remarque 5.

L'exemple suivant montre que l'algèbre Alg(N,A) peut être de dimension ni même lorsque ni A, ni N, ni même aucune matrice de Alg(A,N) n'est cyclique:

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où Alg(N,A)=Vect(I,A,N) qui est de dimension 3 mais aucune matrice de la forme xI+yA+zN n'est cyclique parce que A et N commutent et leur indice de nilpotence est 2.

Par ailleurs $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est cyclique et $A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc le polynôme annulateur commun minimal est X^2.

Le résultat qui suit est extrémement élémentaire, il concerne les polynômes minimal et caractéristique d'une matrice M in $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et nous sera utile dans la démonstration du théorème:

Lemme 6. *Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ dont le degré du polynôme minimal est strictement inférieur à p, alors M possède au moins un sous-espace propre de dimension strictement supérieure à 1.*

Démonstration. Pour tout complexe λ et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, nous désignerons par $J_\lambda(k)$ le bloc de Jordan, de taille k, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$; la matrice M est semblable à la matrice $\bigoplus_{i=1}^r \left(\bigoplus_{j=1}^{m_i} J_{\lambda_i}(k_{i,j})\right)$ et son polynôme caractéristique est alors $\prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{\sum_{j=1}^{m_i} k_{i,j}}$ et son polynôme minimal est $\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\max\{k_{i,j}, j \in \{1,\dots,m_i\}\}}$, donc, si le degré du polynôme minimal est strictement inférieur à p, il existe au moins unindice i tel que $\sum_{j=1}^{m_i} k_{i,j} > \max\{k_{i,j},\, j \in \{1,\dots,m_i\}\}$, d'où $m_i > 1$, and m_i est la dimension du sous-espace propre associé à λ_i.

En d'autres termes M possède au moins deux blocs de Jordan associés à une même valeur propre. □

4 Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre Alg(N, A) soit de dimension n

Rappelons le résultat de [1]: soit une matrice nilpotente $N = J(t_1) \oplus \dots. \oplus J(t_p)$, où $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \dots. \geqslant t_p$ et la matrice $A=(A_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\dots,p\}}$ telle que AN = NA , alors l'algèbre Alg(N,A) est engendrée par la famille $\mathcal{S} = (I,\, N,\, \dots,\, N^{t_1-1},\, A,\, AN,\, \dots,\, AN^{t_2-1}\, ,A^2,\, A^2N,\, \dots,\, A^2N^{t_3-1}, \dots, A^k,\, A^kN,\, \dots,\, A^kN^{t_{k+1}-1},\, \dots,\, A^{p-1}, A^{p-1}N, \dots, A^{p-1}N^{t_p-1})$.

Théorème 7.

Soit la matrice nilpotente $N{=}J(t_1) \oplus \dots. \oplus J(t_p)$*, où* $t_1 \geqslant t_2 \geqslant \dots. \geqslant t_p$ *et* $\sum_{k=1}^p t_k = n$*, et la matrice, écrite par blocs* $A{=}(A_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\dots,p\}}$ *telle que* NA = AN.

Si les matrices $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$ *sont linéairement indépendantes, c'est à dire si le degré du polynôme annulateur commun minimal des matrices A' and A" is égal à p, la dimension de l'algèbre* Alg(N, A) *est égale à n.*

Démonstration. Supposons que $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$ sont linéairement indépedants; nous allons établir que la famille $\mathcal{S}$, qui engendre l'algèbre Alg(N, A), et dont le cardinal est n, est libre.

Soit les scalaires $\alpha_{k,u}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{t_{k+1}-1} \alpha_{k,u} A^k N^u = 0$, alors $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,0} A^k$ appartient à l'idéal engendré par N, d'où $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,0} A'^k = 0$ et $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,0} A''^k = 0$ i.e. $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,0} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^k = 0$; or nous avons supposé que les matrices $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$ sont linéairement indépendantes, donc $\alpha_{0,0} = \dots = \alpha_{p-1,0} = 0$.

L'hypothèse $\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{u=0}^{t_{k+1}-1} \alpha_{k,u} A^k N^u = 0$ devient alors $\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{u=1}^{t_{k+1}-1} \alpha_{k,u} A^k N^u = 0$, donc $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,1} A^k$N appartient à l'idéal engendré par N^2; ce qui, en considérant la structure des matrices quasi-triangulaires, est équivalent à dire que $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,1} A^k$ appartient à l'idéal engendré par N, et donc à nouveau $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{k,1} \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^k = 0$ d'où $\alpha_{0,1} = \dots = \alpha_{p-1,1} = 0$.

En itérant nous montrons donc que quel que soit (k, u) tel que $0 \leqslant k \leqslant p-1, 0 \leqslant u \leqslant t_{k+1}-1$, $\alpha_{k,u}{=}0$ donc $\mathcal{S}$ est libre et la dimension de Alg(N, A) est égale à n.

□

Pour établir la réciproque nous avons besoin de résultats classsiques d'algèbre linéaire:

Théorème 8. *(Cecioni-Frobenius)*

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$*, la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation AX=XB est égale à* $\sum_{i\in\{1,\dots,p\}, j\in\{1,\dots,q\}} \deg\,(p.g.c.d.(a_i, b_j))$*, où les* a_i *et les* b_j *sont les facteurs invariants de A et B.*[4]

Comme les facteurs invariants de la matrice nilpotente $J(t_1) \oplus .... \oplus J(t_p)$ sont les monômes X^{t_i}, où i=1,..,p, le théorème de Cecioni-Frobenius devient ici:

Lemme 9. *Soit A=$J(t_1) \oplus .... \oplus J(t_p)$ et B=$J(s_1) \oplus .... \oplus J(s_q)$ deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$*

i) La dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation AX=XB est égale à AX=XB is $\sum_{i\in\{1,\ldots,p\},j\in\{1,\ldots,q\}} \min(t_i, s_j))$.

ii) Dans tous les cas la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation AX=XB est supérieure ou égale à r.

iii) Si p$\geqslant$2 et q$\geqslant$2 la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation AX=XB est supérieure ou égale à r+1.

Démonstration. i) Il suffit de remarquer que le p.$g.c.d.(X^{t_i}, X^{s_j})$ est égal à $X^{\min(t_i,s_j)}$.

ii) Si $t_1 \geqslant s_1$ alors pour chaque j $p.g.c.d.(X^{t_1}, X^{s_j}) = X^{s_j}$, d'où $\sum_{j\in\{1,\ldots,q\}} \deg(p.g.c.d.(X^{t_1}, X^{s_j})) \geqslant \sum_{j\in\{1,\ldots,q\}} \deg(X^{s_j}) = \deg(X^r) = r$; bien sûr la conclusion est la même lorsque $s_1 > t_1$.

iii) Si $t_1 \geqslant s_1$, comme $p \geqslant 2$ alors $\sum_{i\in\{1,\ldots,p\},j\in\{1,\ldots,q\}} \deg(p.g.c.d.(X^{t_i}, X^{s_j})) \geqslant \sum_{j\in\{1,\ldots,q\}} \deg(p.g.c.d.(X^{t_1}, X^{s_j})) + \sum_{j\in\{1,\ldots,q\}} \deg(p.g.c.d.(X^{t_2}, X^{s_j})) > \sum_{j\in\{1,\ldots,q\}} \deg(p.g.c.d.(X^{t_1}, X^{s_j})) = r$; il en est de même lorsque $s_1 > t_1$, en utilisant alors l'hypothèse $q \geqslant 2$. □

Proposition 10. *Soit T' et T" deux matrices triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, de même diagonale et dont le polynôme annulateur commun minimal est de degré strictement inférieur à p, alors la dimension de $\{X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), T'X = \mathrm{XT}''\}$ est strictement supérieure à p.*

Démonstration. Comme T' et T" sont deux matrices triangulaires supérieures dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, de même diagonale elles ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres λ_i avec les mêmes multiplicités (algébriques) d_i , donc avec les notations du Lemma 6 T' est semblable à $J' = \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\bigoplus_{j=1}^{m'_i} J_{\lambda_i}(k'_{\ i,j}) \right)$ et T'' est semblable à $J'' = \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\bigoplus_{j=1}^{m''_i} J_{\lambda_i}(k''_{i,j}) \right)$, où pour chaque valeur propre λ_i $\sum_{j=1}^{m'_i} k'_{\ i,j} = \sum_{j=1}^{m''_i} k''_{\ i,j} = d_i$; si nous posons pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, $A_i = \bigoplus_{j=1}^{m'_i} J_{\lambda_i}(k'_{i,j}) \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$ and $B_i = \bigoplus_{j=1}^{m''_i} J_{\lambda_i}(k''_{i,j}) \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{C})$, nous pouvons écrire $J' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & A_r \end{pmatrix}$ and $J'' = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & B_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & B_r \end{pmatrix}$.

Notons $T' = P^{-1}J'P$ et $T'' = Q^{-1}J''Q$, alors nous avons l'équivalence immédiate: $T'X = \mathrm{XT}'' \Longleftrightarrow P^{-1}J'\mathrm{PX} = \mathrm{XQ}^{-1}J''Q \Longleftrightarrow J'\mathrm{PXQ}^{-1} = \mathrm{PXQ}^{-1}J''$, et, comme le morphisme $X \longmapsto \mathrm{PXQ}^{-1}$ est un isomorphisme, la dimension de $\{X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), T'X = \mathrm{XT}''\}$ est égale à celle de $\{Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), J'Y = \mathrm{YJ}''\}$.

En posant $Y = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & Y_2 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & Y_r \end{pmatrix}$ alors $J'Y = \mathrm{YJ}'' \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, r\}, A_iY_i = Y_iB_i$ (*) et si on écrit $A_i = \lambda_i I_{d_i} + A'_i$, $B_i = \lambda_i I_{d_i} + B'_i$, où A'_i et B'_i sont nilpotentes, $A_iY_i = Y_iB_i$ est équivalent à $A'_iY_i = Y_iB'_i$ et la dimension de l'espace vectoriel des matrices Y, diagonale par blocs, telles que $J'Y = \mathrm{YJ}''$ est la somme des dimensions des espaces vectoriels des solutions de $A'_iY_i = Y_iB'_i$.

Comme le polynôme annulateur commun minimal est de degré strictement inférieur à celui du polynôme minimal l'application du Lemme 6 simultanément à J' et à J'' permet de conclure qu'il existe parmi les valeurs propres (forcément communes) λ_i une valeur propre λ_{i_0} pour laquelle A_{i_0} et B_{i_0} possèdent au moins deux blocs de Jordan.

Par suite on peut déduire du Lemme 9 que pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$ la dimension de $\{Y_i, A'_iY_i = Y_iB'_i\}$ est au moins d_i et pour i_0 (au moins) la dimension de $\{Y_{i_0}, A'_{i_0}Y_{i_0} = Y_{i_0}B'_{i_0}\}$ is at least $d_{i_0} + 1$, donc la dimension de $\{X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}), T'X = \mathrm{XT}''\}$ est strictement supérieure à $\sum_{i=1}^{r} d_i$=p. □

Nous sommes maintenant en état d'énoncer et de prouver la réciproque du Théoreme 7 (ou plus précisément sa contraposée):

Théorème 11.

Soit la matrice nilpotente $N{=}J(t_1)\oplus....\oplus J(t_p)$*, où* $t_1\geqslant t_2\geqslant....\geqslant t_p$ *et* $\sum_{k=1}^{p} t_k=n$*, et la matrice, écrite par blocs* $A{=}(A_{\rm ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}}$ *telle que* $\mathrm{NA}=\mathrm{AN}$.

Si les matrices $\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix},\begin{pmatrix} A' & 0\\ 0 & A''\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} A' & 0\\ 0 & A''\end{pmatrix}^{p-1}$ *sont linéairement dépendantes, c'est à dire si le degré du polynôme annulateur commun minimal des matrices A' and A" is strictement inférieur à p, la dimension de l'algèbre* $\mathrm{Alg}(N,A)$ *est strictement inférieure à n.*

Démonstration. Nous allons nous aider de l'équivalence entre $\dim(\mathrm{Alg}(N,\ A)\ =\ n$ et $\dim(\mathrm{Cent}(\mathrm{Alg}(N,A)))=n$ qui a été établie dans [9].

Supposons l'existence d'un polynôme non nul π de degré $d<p$ tel que $\pi(A')=\pi(A'')=0$; nous allons, suivant la démarche utilisée par [7, p.268], établir l'existence de matrices qui commutent avec A et N et qui n'appartiennent pas à l'algèbre $\mathrm{Alg}(N{,}A)$.

Avant tout celles-ci doivent être des N-matrices (pour commuter avec N), nous allons les rechercher sous la forme de N-matrices C dont les blocs $C_{\rm ij}$ seront de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{\rm ij}\\ \ldots & & 0 & 0 & 0\\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, où les $c_{\rm ij}$ sont des scalaires.

Le produit d'un tel bloc $C_{\rm ij}$ by $A_{\rm jk}{=}\begin{pmatrix} a'_{\rm jk} & \ldots & a''_{\rm jk} & * & \ldots & *\\ & a'_{\rm jk} & \ldots & a''_{\rm jk} & * & \ldots\\ & \ldots & \ldots & \ldots & a''_{\rm jk} & *\\ & 0 & \ldots & a'_{\rm jk} & 0 & a''_{\rm jk}\end{pmatrix}$ sera égal à $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{\rm ij}a''_{\rm jk}\\ \ldots & & 0 & 0 & \ldots\\ \ldots & & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

et, de même, le produit du bloc $A_{\rm ij}{=}\begin{pmatrix} a'_{\rm ij} & \ldots & a''_{\rm ij} & * & \ldots & *\\ & a'_{\rm ij} & \ldots & a''_{\rm ij} & * & \ldots\\ & \ldots & \ldots & \ldots & a''_{\rm ij} & *\\ & 0 & \ldots & a'_{\rm ij} & 0 & a''_{\rm ij}\end{pmatrix}$ par $C_{\rm jk}{=}\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{\rm jk}\\ \ldots & & 0 & 0 & 0\\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ sera égal à $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & a'_{\rm ij}c_{\rm jk}\\ \ldots & & 0 & 0 & \ldots\\ \ldots & & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Donc le produit $R{=}CA$ aura les blocs suivants: $R_{\rm ik}=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \sum_j c_{\rm ij}a''_{\rm jk}\\ \ldots & & 0 & 0 & \ldots\\ \ldots & & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ tandis que le produit $L=AC$ aura pour blocs les $L_{\rm ik}=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \sum_j a'_{\rm ij}c_{\rm jk}\\ \ldots & & 0 & 0 & \ldots\\ \ldots & & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Par suite la condition $AC=CA$ est équivalente à $\Gamma A''=A'\Gamma$, où $\Gamma=(\ c_{\rm ij}\ )$ appartient à $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Par hypothèse les matrices A' and A" appartiennent à $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, elles ont le même polynôme caractéristique et nous avons supposé que leur polynôme annulateur commun minimal est de degré d<p; donc la Proposition 10 permet de conclure à l'existence de (au moins) p+1 matrices C_1, ..., C_{p+1}, linéairement indépendantes dans le centralisateur de l'algèbre $\mathrm{Alg}(N{,}A)$ and pour chacune $\mathrm{NC}_k=0$.

Soit une base $\mathcal{B}$ de l'algèbre $\mathrm{Alg}(N{,}A)$ extraite de la famille génératrice (I, N, ..., N^{t_1-1}, A, AN, ..., AN^{t_2-1} , ..., A^{p-1}, $A^{p-1}N$, ..., $A^{p-1}N^{t_p-1}$), elle sera de la forme (I, N, ..., N^{l_1-1}, A, AN,..., AN^{l_2-1} , ..., A^{q-1}, $A^{q-1}N$,..., $A^{q-1}N^{l_q-1}$), où $q\leqslant p$, et pour chaque $i\in\{2,\ldots,q\}, l_i\leqslant t_i$; comme dans [7, p.269] nous allons éliminer de cette base tous les éléments $A^{k-1}N^{l_k-1}$ (dont le nombre est au plus p), ce qui détermine une famille libre $\mathcal{B}'$ à laquelle nous allons ajouter les matrices C_1, ..., C_{p+1}, ce qui produit une famille de cardinal supérieur ou égal à $\dim(\mathrm{Alg}(N{,}A))+1$. Cette famille appartient au centralisateur de $\mathrm{Alg}(N{,}A)$, nous allons montrer qu'elle est libre.

Soient des scalaires (α_k) et (β_M) tels que $\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k C_k + \sum_{M \in \mathcal{B}'} \beta_M M = 0$, alors, en multipliant par N, et comme $\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k C_k N = 0$, nous obtenons l'égalité $\sum_{M \in \mathcal{B}'} \beta_M$ MN $= 0$; mais comme nous avons éliminé de $\mathcal{B}$ les éléments $A^{k-1} N^{l_k - 1}$, les matrices MN, où $M \in \mathcal{B}'$, sont encore libres d'où les β_M sont nuls; retournant à la première égalité il ne reste que $\sum_{k=1}^{p+1} \alpha_k C_k = 0$, or cette famille est libre donc les α_k sont nuls.

Par suite la dimension du centralisateur de l'algèbre Alg(N,A) est strictement supérieure à celle de l'algèbre Alg(N,A), d'où la dimension de l'algèbre Alg(N,A) est strictement inférieure à n ([9, p.546]).

□

Les Théorèmes 9 et 11 établissent donc l'équivalence:

Théorème 12.

Soit la matrice nilpotente $N = J(t_1) \oplus .... \oplus J(t_p)$*, où* $t_1 \geqslant t_2 \geqslant .... \geqslant t_p$ *et* $\sum_{k=1}^{p} t_k = n$*, et la matrice, écrite par blocs* $A = (A_{\mathrm{ij}})_{(i,j) \in \{1,\ldots,p\}}$ *telle que* NA = AN.

L'algèbre Alg(N, A) *est de dimension n si et seulement si les matrices* $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$, ..., $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}^{p-1}$ *sont linéairement indépendantes, c'est à dire si et seulement si le degré du polynôme annulateur commun minimal des matrices A' and A" is égal à p.*

Remarque 13. Dans le cas particulier où $t_1 = t_2 = ... = t_p$, $A' = A''$ et la condition énoncée audessus se réduit à « A' cyclique », ce qui est le résultat établi par [7].

Remarque 14. Les matrices coins-gauches et coins-droits fournissent aussi une caractérisation simple de la nilpotence de la matrice A qui commute avec N; cela ne doit pas surprendre parce que les blocs $(A_{\alpha\alpha})$ introduits par R. Basili ([2, p.60]) et V. Baranovsky ([3]), comme clés de la nilpotence of A and de l'irréductibilité de $\mathcal{N}_B$ in [2], sont les blocs diagonaux des deux matrices triangulaires par blocs A' et A''.

Proposition 15.

Soient la matrice nilpotente à coefficients complexes $N = J(t_1) \oplus .... \oplus J(t_p)$ *où* $t_1 \geqslant t_2 \geqslant .... \geqslant t_p$ *et* $\sum_{k=1}^{p} t_k = n$*, et la matrice décomposée en blocs* $A = (A_{\mathrm{ij}})_{(i,j) \in \{1,\ldots,p\}}$ *où A et N commutent.*

A est nilpotente si et seulement si A' *et* A''*, les matrices coins-gauches et coins-droits associées à A sont nilpotentes; ce qui est équivalent à la nilpotence des blocs de leur diagonale commune.*

Démonstration.

Si A' et A'' sont nilpotentes il existe un entier $k \leqslant p$ tel que $A'^{\mathrm{k}} = A''^{\mathrm{k}} = 0$; donc A^{k} appartient à Ker(Φ), i.e. il existe une matrice $B \in \mathcal{C}(N)$ telle que $A^{\mathrm{k}} = NB$; comme N est nilpotent et commute avec B, $A^{\mathrm{k}} = NB$ est aussi nilpotente et par suite il en est de même pour A.

Réciproquement, si A est nilpotente, il existe un entier k tel que $A^{\mathrm{k}} = 0$, alors, comme Φ est un morphisme, il existe un entier k tel que $A'^{k} = A''^{k} = 0$.

□

Exemple 16. Ce dernier résultat fournit un exemple où deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrent une algèbre commutative de dimension n.

Soit $N = J(3) \oplus J(2) \oplus J(1)$ i.e. $N = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$, alors $A' = \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ et $A'' = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}$; le polynôme annulateur commun minimal de A' et A'' est X^3 donce (Théorème 12) l'algèbre Alg(A,N) est de dimension 6 et A et N sont nilpotentes.

5 Références

[1] J. Barria et P.R. Halmos. Vector bases for two commuting matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 27: 147-157, 1990.

[2] R. Basili. On the irreductibility of commuting varieties of nilpotent matrices. *Journal of Algebra*, 268: 58-80, 2003.

[3] V.Baranovsky, The Variety of Pairs of Commmuting Nilpotent Matrices is Irreducible. *Transformation Groups*, 6, n°1: 3-8, 2001.

[4] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company,New-York, 1959, Volume 1, 215-220.

[5] M. Gerstenhaber. On dominance and Varieties of Commuting Matrices, *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 73, 2: 324-348, 1961.

[6] R. Guralnick. A note on Commuting Pairs of Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 31: 71-75, 1992.

[7] T.J. Laffey and S. Lazarus. Two-Generated Commutative Matrix Subalgebras. *Linear Algebra and its Applications*, 147: 249-273, 1991.

[8] T. Motzkin and O. Taussky. Pairs of matrices with property L II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 80, 249-273, 1955.

[9] M. G. Neubauer and D. J. Saltman. Two-Generated Commutative Subalgebras of $\mathrm{M}_n(\mathrm{F})$. *Journal of Algebra*, 164: 545-562, 1994.

[10] H.W. Turnbull and A.C. Aitken, *An introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Dover, New-York, 1961.

[11] A.R. Wadsworth. The Algebra Generated by Two Commuting Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 27: 159-162, 1990.