

En guise d'entrée en matière

PAR PATRICK TELLER

La simple question de la commutativité de deux matrices n'est pas encore épuisée.

On pourra trouver une première introduction au problème et une bibliographie élémentaire à https://fr.wikipedia.org/wiki/Paire_de_matrices_commutantes.

Le travail qui suit est l'expression de la conviction que la simple manipulation des matrices permet d'éviter des recours trop sophistiqués.

On se place dans le cadre des matrices complexes afin de pouvoir bénéficier de la décomposition de Jordan.

L'introduction fournit une première description de l'ensemble des matrices qui commutent avec une matrice B , donnée sous la forme de blocs de Jordan, et fournit une version plus élémentaire de la majoration de la dimension de l'algèbre commutative engendrée par deux matrices.

La « caractérisation effective » du cas de dimension maximale fournit un outil élémentaire au moyen de deux matrices extraites ainsi qu'une démonstration élémentaire de la caractérisation de la nilpotence (adaptée à tous les cas); ce travail est original.

La forme des matrices qui commutent avec une matrice B , donnée sous la forme de blocs de Jordan, décrite comme « Matrice en Blocs de Toeplitz (triangulaires supérieures) », permet une démonstration élémentaire du Théorème du bicommutant.

L'étude de l'ensemble des Matrices en Blocs de Toeplitz (« Le commutant est trigonalisable ») permet de mettre en évidence des propriétés particulières :

dans le cas où pour chaque valeur propre de B les Blocs de Toeplitz sont de tailles distinctes le commutant de B est simultanément trigonalisable par permutation des vecteurs de la base

sinon la trigonalibilité simultanée se verra remplacée par une trigonalisabilité par blocs simultanée, par permutation des vecteurs de la base.

Ces derniers résultats sont originaux, fournissent

- i) une seconde caractérisation de la nilpotence des matrices du commutant
- ii) une détermination assez rapide de l'indice maximal de nilpotence des matrices du commutant et des matrices possédant cet indice.
- iii) une réponse rapide à une question posée sur le site Mathoverflow, concernant la dimension du centralisateur (commutant) nilpotent d'une matrice nilpotente.

Mise à part la connaissance de la forme de Jordan l'ensemble des moyens utilisés relève de l'Algèbre linéaire élémentaire.

Nîmes Juillet-Août 2017