Le commutant est trigonalisable

PAR PATRICK TELLER

Soit une matrice nilpotente sous forme de Jordan de type $(s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, ..., s_z^{r_z})$, nous établissons que son commutant est simultanément trigonalisable si les exposants r_k sont égaux à 1 et, sinon, simultanément trigonalisable par blocs, les tailles des blocs étant donnés par la liste duale $((\mathrm{r}_z, r_{z-1}, ..., r_1)^{s_1}, (\mathrm{r}_z, r_{z-1}, ..., r_2)^{s_2\text{-}s_1}, ..., \mathrm{r}_z^{s_z-s_{z-1}})$; le changement de base se limitant à une simple permutation de la base.

Les résultats sur la trigonalisation s'étendent aisément au cas des matrices dont le polynome minimal est scindé

Avertissement 1.

Dans tout ce qui suit on supposera que les matrices sont à coefficients dans un corps K algébriquement clos ou possèdent un polynôme caractéristique scindé.

Avertissement 2.

Comme il sera plusieurs fois question de l'image d'un vecteur de base par un endomorphisme dont on connnait la matrice on rencontrera des situations où il faudra accorder une attention très grande à des indices « compliqués » (c'est la seule réelle difficulté qui attend le lecteur); n'hésitez pas à suivre la forme des matrices et les calculs sur des exemples, seuls capables de vous frayer un chemin.

Dans [1], [2] a été établi que le commutant d'une matrice en blocs de Jordan nilpotente (ou, ce qui revient au même, qui ne possède qu'une valeur propre unique) $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$ consiste en l'ensemble des Matrices en Blocs de Toeplitz (sous-entendu « de Toeplitz Triangulaires Supérieures ») $\mathrm{T}(\mathrm{t}_1,..,\mathrm{t}_p)$.

Les propriétés de ces matrices semblent avoir échappé jusqu'à maintenant.

Nous allons établir au moyen d'outils élémentaires, mise à part la connaissance de la forme de Jordan, que l'ensemble $\mathrm{T}(\mathrm{t}_1,..,\mathrm{t}_p)$ est simultanément trigonalisable (éventuellement par blocs), dans une base déduite par une simple permutation; il est facile d' en déduire qu'il en est de même pour le commutant d'une matrice quelconque..

Pour le confort du lecteur nous allons rappeler les définitions et résultats nécessaires.

1 Matrices de Toeplitz Triangulaires (supérieures)

On désignera ici par $J(k)$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, elle est nilpotente d'indice k et les vecteurs de la base canonique $(e_1, ..., e_k)$ constituent, pour cette matrice, une chaîne :$0 \longleftarrow e_1 \longleftarrow e_2 \longleftarrow .... \longleftarrow e_k$

On appellera matrices de Toeplitz triangulaires supérieures (TTS) les matrices de la forme $A_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix}$ (t_i lignes, t_j colonnes avec $t_i \leqslant t_j$) ou $\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j)) \\ 0 \end{pmatrix}$ (t_i lignes, t_j colonnes avec $t_i \geqslant t_j$), où les Q_{ij} sont des polynomes.

On désignera par T_{t_i,t_j} ces ensembles de matrices.

On sait qu'usuellement les matrices de Toeplitz sont des matrices carrées et elles sont caractérisées par le fait que toutes les parallèles à la diagonale principales sont constantes; les TTS (Toeplitz triangulaires supérieures) sont (peuvent être) rectangulaires et le triangle auquel il est fait allusion est le « triangle rectangle du coin supérieur droit ».

Exemple 3.

La matrice suivante est de Toeplitz $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, les trois suivantes sont TTS $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En raisonnant par blocs on remarquera que le produit de deux matrices de Toeplitz triangulaires supérieures, lorsqu'il est possible, est une matrice de Toeplitz triangulaire supérieure; ce qui n'est pas vrai dans le cas général pour des matrices de Toeplitz classiques.

Exemple 4.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pourra définir l'anti-transposition qui transforme une matrice TTS de $\mathcal{M}_{t_i,t_j}(\mathbb{C})$ en une matrice TTS de $\mathcal{M}_{t_j,t_i}(\mathbb{C})$:

Exemple 5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on peut la réaliser comme suit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ suivi d'une transposition.

L'anti-transposition est une involution linéaire.
On désignera par $\mathrm{T}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices TTS de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

2 Matrices en blocs de Toeplitz

Soit un entier strictement positif n et une suite d'entiers strictement positifs $\mathrm{t}_1 \leqslant t_2 \ldots\ldots \leqslant t_p$ tels que $t_1 + t_2 + \ldots + t_p = n$, on appellera Matrice en Blocs de Toeplitz de type $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formée de blocs $(\mathrm{M_{ij}})$ de Toeplitz triangulaires supérieurs, de tailles respectives $t_i \times t_j$.

Exemple 6.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 5 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 0 & 15 & 0 & 17 & 18 & 0 & 20 & 21 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 20 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \in T(2,3,4).$$

3 Le commutant de $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & \ldots\ldots & & \\ & & & \ldots. & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$ est $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1,..,\mathbf{t}_p)$

Proposition 7. *Pourquoi des matrices de Toeplitz Triangulaires Supérieures ?*

1) Soit la matrice J(k) et M=(m_{ij}) $\in\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, MJ(k)=J(k)M si et seulement si $\forall(i,\ j)$ $m_{ij}=m_{i+1,j+1}$; c'est à dire M est une matrice TTS (carrée).

2) Soit les entiers $r\neq s$, les matrices J(r), J(s) et M=(m_{ij}) $\in\mathcal{M}_{rs}(\mathbb{C})$, MJ(s)=J(r)M si et seulement si $\forall(i,j)$ $m_{ij}=m_{i+1,j+1}$; c'est à dire M est une matrice TTS.

Démonstration.

1) Ce résultat est plus que classique.

2) Considérons d'abord le cas r<s.

Ce cas s'étudie de même que le 1): d'abord $\forall(i,\ j)$ $m_{ij}=m_{i+1,j+1}$, puis $m_{rs}=0$ et $\forall j$, $m_{rj}=m_{r,j+1}$; d'où M est une matrice TTS, il ne reste qu'à vérifier que ceci est suffisant.

Le cas r>s se déduit par anti-transposition. □

d'où on déduit

Théorème 8.

Le commutant de $\Gamma=\begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$ *est* $T(t_1,..,t_p)$ **[3]**

4 Trigonalisabilité

4.1 Définitions nécessaires

On considère une suite croissante d'entiers (t_0=0,t_1,..,t_p)

Définition 9. *Noeuds d'une matrice* $M\in T(t_1,..,t_p)$.

Une fois pour toutes, chaque fois qu'une formule y fait appel, nous considérerons que $t_0=0$.

La liste des entiers $(t_1,t_2,..,t_p)$ *étant donnée nous appellerons séquences de type I les sous-listes maximales de la forme* $t_{q+1}<...<t_{q+v}$ *(c'est à dire telles que* $t_{q-1}=t_q<t_{q+1}<...=t_{q+v}<t_{q+v+1}=t_{q+v+2}$*) et séquences de type II les sous-listes maximales de la forme* $(t_{q+1},\ ...,\ t_{q+u})$ *(c'est à dire telles que* $t_q<t_{q+1}=...=t_{q+u}<t_{q+u+1}$*) et nous désignerons les entiers de 1 à n sous la forme* $z_{q,k}$ *de la manière suivante: pour tout* $k\in\{1,\ ...,\ t_q\}$ $z_{q,k}$ *représente* $t_0+t_1+t_2+...+t_{q-1}+k$.

Nous appellerons intervalles de type I ou II les intervalles $[\![z_{k,1},\ z_{k,t_k}]\!]$ *suivant que* t_k *appartient à une séquence de type I ou II.*

Nous dirons qu'un vecteur e_r *de la base canonique* $\mathcal{C}$ *est de type I ou II suivant que r appartient à un intervalle de type I ou II.*

Nous appellerons noeuds simples les couples $(z_{i,1},z_{i,1})$*, noeuds simples (lorsque* t_i *est de type I) et noeuds complexes les couples* $(z_{i,1},z_{j,1})$*(lorsque* t_i *et* t_j *appartiennent à une même séquence de type II); les* $m_{z_{i,1},z_{j,1}}$ *seront appelés les valeurs des noeuds correspondants.*

Si $t_q<t_{q+1}=...=t_{q+u}<t_{q+u+1}$ *les noeuds correspondants* $(z_{i,1},\ z_{j,1})$ *seront dits associés; dans ce cas la matrice* $\begin{pmatrix} m_{z_{q+1,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+1,1},z_{q+2,1}} & ... & ... & m_{z_{q+1,1},z_{q+u,1}} \\ m_{z_{q+2,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+2,1},z_{q+2,1}} & .... & ... & m_{z_{q+2,1},z_{q+u,1}} \\ ... & .... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ m_{z_{q+u,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+u,1},z_{q+2,1}} & ... & ... & m_{z_{q+u,1},z_{q+u,1}} \end{pmatrix}$ *est appelée le coeur de la séquence.*

Exemple 10.

$$
\mathrm{M}{=}\begin{pmatrix}
a & \mathrm{aa} & 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & c & \mathrm{cc} & 0 & 0 & k & \mathrm{kk} & 0 & 0 & 0 & t & \mathrm{tt} \\
0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
d & \mathrm{dd} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} & 0 & m & \mathrm{mm} & \mathrm{mmm} & 0 & 0 & u & \mathrm{uu} & \mathrm{uuu} \\
0 & d & 0 & f & \mathrm{ff} & 0 & g & \mathrm{gg} & 0 & 0 & m & \mathrm{mm} & 0 & 0 & 0 & u & \mathrm{uu} \\
0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & u \\
h & \mathrm{hh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & j & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj} & 0 & n & \mathrm{nn} & \mathrm{nnn} & 0 & 0 & v & \mathrm{vv} & \mathrm{vvv} \\
0 & h & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & j & \mathrm{jj} & 0 & 0 & n & \mathrm{nn} & 0 & 0 & 0 & v & \mathrm{vv} \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & v \\
p & \mathrm{pp} & q & \mathrm{qq} & \mathrm{qqq} & r & \mathrm{rr} & \mathrm{rrr} & s & \mathrm{ss} & \mathrm{sss} & \mathrm{ssss} & 0 & w & \mathrm{ww} & \mathrm{www} & \mathrm{wwww} \\
0 & p & 0 & q & \mathrm{qq} & 0 & r & \mathrm{rr} & 0 & s & \mathrm{ss} & \mathrm{sss} & 0 & 0 & w & \mathrm{ww} & \mathrm{www} \\
0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & r & 0 & 0 & s & \mathrm{ss} & 0 & 0 & 0 & w & \mathrm{ww} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & w \\
A & A\mathbb{A} & B & \mathbb{B}B & \mathbb{B}\mathbb{B}B & C & \mathbb{C}C & \mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C} & D & \mathbb{D}D & \mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D} & \mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}D & T & \mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T} & \mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T}T \\
0 & A & 0 & B & \mathbb{B}B & 0 & C & \mathbb{C}C & 0 & D & \mathbb{D}D & \mathbb{D}\mathbb{D}D & 0 & T & \mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T}T \\
0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & C & 0 & 0 & D & \mathbb{D}D & 0 & 0 & T & \mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}T \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 & T & \mathbb{T}T \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T
\end{pmatrix} \in T(2,3,3,4,5)
$$

les séquences (2) et (4,5) sont de type I, la séquence (3,3) est de type II.

a,f,g,i,j,s,T sont les valeurs des noeuds; a,s,T sont les valeurs des noeuds simples; f,g,i,j sont les valeurs des noeuds complexes.

la matrice $\begin{pmatrix} f & g \\ i & j \end{pmatrix}$ est le coeur de la séquence (3,3)

Proposition 11. *Un ordre sur la base canonique*

Soit la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^n$ dont on désignera les éléments $(e_1, ..., e_n)$ sous la forme $e_{i,k}$ de la manière suivante: $e_{i,k}$ représente $e_{t_0+....+t_{i-1}+k}$.

On dira que $e_{i,k} \leqslant e_{j,l}$ lorsque k<l ou k=l et i⩾j

Ce qui se traduit par une suite croissante $\mathcal{C}'$=($e_{p,1}, e_{p-1,1}, ..., ...$)

Remarque 12. Cet ordre est assez intutif:

On classe suivant le second indice et, à égalité du second indice, suivant l'ordre inverse du premier; le choix d'un ordre plus compliqué aurait permis en revanche d'obtenir aux Théorème 25 et Remarque 26 directement les coeurs des séquences de type II au lieu de matrices semblables aux coeurs.

4.2 La trigonalisation

Lemme 13. *Soit N=($n_{k,l}$)∈T_{t_i,t_j}*

$$\forall (k,l) \in [\![1, t_i]\!] \times [\![1, t_j]\!],\ n_{k,l} {\neq} 0 \Longrightarrow k < l \text{ ou } \begin{cases} k = l \\ t_i \geqslant t_j \end{cases}$$

Démonstration.

Soit une matrice de T_{t_i,t_j}, placant l'origine en la case (ligne1,colonne1), avec l'axe des x orienté de manière classique vers la droite et l'axe des y orienté vers le bas:

- lorsque t_i<t_j les cases de coordonnées (x,y) sont nulles lorsque y⩾x+(t_i-t_j)

- lorsque t_i=t_j les cases de coordonnées (x,y) sont nulles lorsque y> x

- lorsque t_i>t_j les cases de coordonnées (x,y) sont nulles lorsque y> x.

D'où le résultat.

□

Proposition 14.

Si on désigne par f l'endomorphisme représenté par la matrice M de T(t_1,..,t_p)

alors

$\forall (j,l)$ f($e_{j,l}$)∈Vect($\{e_{i,k}\}_{e_{i,k} \leqslant e_{q+1,l}}$) où q+1=min$\{k, t_k = t_j\}$

Démonstration.

Il suffit de consulter la colonne correspondante de la matrice M:

celle-ci contient les éléments $m_{z_{i,k},z_{j,l}}$ des l-ièmes colonnes des blocs $M_{1,j}, M_{2,j}, ..., M_{p,j}$.

Bien que ce ne soit pas nécessaire nous distinguerons deux cas pour la commodité du lecteur:
1er cas: $(z_{j,1}, z_{j,1})$ *est un noeud simple*

alors, si $m_{z_{i,k},z_{j,l}}$ *n'est pas nul, forcément* $k < l$ *ou* $\begin{cases} k=l \\ t_i \geqslant t_j \end{cases}$, *c'est à dire* $k < l$ *ou* $\begin{cases} k=l \\ i \geqslant j \end{cases}$ *donc ne peuvent apparaître dans f(*$e_{j,l}$*) que des vecteurs de la forme* $e_{i,k}$ *pour lesquels* $e_{i,k} \leqslant e_{j,l}$.

2ème cas: ($t_{q+1}, ..., t_{q+u}$*) est une séquence de type II, et* $j \in \{q+1, ..., q+u\}$
dans ce cas les blocks $M_{q+1,q+1}$*,,..,*$M_{q+u,q+u}$ *ont la même structure*

et, de même, si $m_{z_{i,k},z_{j,l}}$ *n'est pas nul, forcément* $k < l$ *ou* $\begin{cases} k=l \\ t_i \geqslant t_j \end{cases}$, *c'est à dire* $k < l$ *ou* $\begin{cases} k=l \\ i \geqslant q+1 \end{cases}$ *donc ne peuvent apparaître dans f(*$e_{j,l}$*) que des vecteurs de la forme* $e_{i,k}$ *pour lesquels* $e_{i,k} \leqslant e_{q+1,l}$. □

Exemple 15. $\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & c & \mathrm{cc} \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c \\ d & \mathrm{dd} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} \\ 0 & d & 0 & f & \mathrm{ff} & 0 & g & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & g \\ h & \mathrm{hh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & j & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj} \\ 0 & h & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & j & \mathrm{jj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & j \end{pmatrix} \in T(2,3,3)$

f($e_{1,2}$)∈Vect($e_{1,1}, e_{1,2}, e_{2,1}, e_{2,2}, e_{3,1}, e_{3,2}$), ces vecteurs vérifient bien $e_{i,k} \leqslant e_{1,2}$
f($e_{3,1}$)∈Vect($e_{2,1}, e_{3,1}$), ici q+1=2 et ces deux vecteurs vérifient bien $e_{i,k} \leqslant e_{2,1}$

Théorème 16.
La matrice qui représente f dans la base $\mathcal{C}' = (e_{p,1}, e_{p-1,1},...,e_{1,1}, e_{p-1,2},..,e_{1,2}, ..., e_{p,t_p})$ *est triangulaire supérieure (éventuellement par blocs).*
(les vecteurs sont pris suivant l'ordre croissant des couples (i,k) défini au-dessus)
Autrement dit, l'ensemble des matrices de $T(t_1,..,t_p)$ *est simultanément trigonalisable (éventuellement par blocs) (éventuellement par blocs)dans une base obtenue par permutation de la base canonique.*

Définition 17. *Forme d'une matrice nilpotente*
Soit la suite croissante $t_1 \leqslant t_2 \leqslant ...... \leqslant t_p$*, nous la noterons* $(s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, ..., s_z^{r_z})$ *où* $s_1 < s_2 < ... < s_z$.
Si $B \in T(t_1,..,t_p)$ *nous appellerons forme de B (sh(B)) la suite* $(s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, ..., s_z^{r_z})$*; les entiers* r_i *seront appelés les multiplicités et la forme de B sera dite simple lorsque toutes les multiplicités sont égales à 1.*
Nous appellerons duale de sh(B) (notée sh(B) la suite* $((r_z, r_{z-1}, ..., r_1)^{s_1}, (r_z, r_{z-1}, ..., r_2)^{s_2 - s_1}, ..., r_z^{s_z - s_{z-1}})$.

Définition 18. *Forme d'une matrice trigonale par blocs*
Soit U une matrice trigonale par blocs on appellera forme de U la suite des tailles des blocs (de la gauche vers la droite).

Par exemple la forme de U=$\begin{pmatrix} a & ... & ... & ... & . \\ 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & ... \\ ... & c & \mathrm{cc} & 0 & ... \\ ... & ... & 0 & d & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & e \end{pmatrix}$ *est (1,2,1,1).*

Théorème 19.
Soit B une matrice nilpotente de forme sh(B)=$(s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, ..., s_z^{r_z})$*, le commutant de B est simultanément trigonalisable par blocs (par permutation de la base canonique), les éléments génériques trigonalisés du commutant ont pour forme sh(B)*, la suite duale de sh(B).*

4.3 Le commutant d'une matrice A

Nous allons considérer ici une matrice A.

Les résultats suivants sont classiques et ne sont rappelés que pour ne laisser aucune ambiguité.

Proposition 20. *Soit Aune matrice M telle que AM=MA alors, quels que soient le scalaire* λ *et l'entier u,* $M(Ker(A-\lambda I_n)^u) \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^u$.

Proposition 21. *Soit* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et son polynôme caractéristique* $\prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{n_i}$ *alors P est semblable à la matrice diagonale par blocs* $\bigoplus_{i=1}^{r} P_i$*, où pour chaque i=1,..,r* $P_i - \lambda_i I$ *est une somme de blocs de Jordan nilpotents.*

Proposition 22. *Soit* $A = \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$*, c'est à dire* $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & A_r \end{pmatrix}$.

Soit une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, écrite sous forme de blocs rectangulaires* $M = (M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\dots,r\}\times\{1,.,r\}}$.

Alors l'égalité AM=MA est équivalente à

i) M est la matrice diagonale par blocs $M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & M_{22} & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & M_{\mathrm{rr}} \end{pmatrix}$

ii) $\forall i \in \{1,\dots,r\}$, $A_i M_{\mathrm{ii}} = M_{\mathrm{ii}} A_i$.

Démonstration. i) Il suffit de remarquer que M_{ij} représente la projection sur Ker(A-$\lambda_i I_m$)^{n_i} de la restriction à Ker(A-$\lambda_i I_n$)^{n_i} et d'appliquer le résultat de la proposition 19.

ii) Découle de la multiplication des matrices par blocs.

La réciproque est évidente. □

Par suite, comme toute matrice commute avec les matrices scalaires, on pourra appliquer les résultats du paragraphe précédent à chaque bloc A$_i$, d'où

Définition 23. *On dira qu'une matrice M de* $\mathcal{M}_n(K)$ *est simple lorsque, pour chaque valeur propre, la décomposition de Jordan associée à cette valeur propre est simple; ce qui s'exprime de la manière suivante: pour chaque valeur propre la suite* $(t_1,..,t_p)$ *est strictement croissante.*

Théorème 24.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$*, l'ensemble des matrices du commutant de M est simultanément trigonalisable par blocs (dans une base obtenue par permutation de la base canonique).*

Et si M est une matrice simple de $\mathcal{M}_n(K)$*, l'ensemble des matrices du commutant de M est simultanément trigonalisable (dans une base obtenue par permutation de la base canonique).*

4.4 La diagonale, les blocs diagonaux

Pour éclairer la lecture commençons par le cas triangulaire

Théorème 25.

Soit $M \in T(t_1,..,t_p)$*, dans le cas* $t_1 < t_2 < .. < t_p$

Les éléments de la diagonale de la trigonalisée de M sont (avec la même multiplicité) les éléments de la diagonale de M.

Démonstration.

Il suffit de reprendre le premier cas de la proposition 14 et de comprendre que $e_{j,l}$ *appparait dans l' expression de* $f(e_{j,l})$ *avec le coefficient* m_{z_j+l,z_j+l} *et ce pour chaque vecteur* $e_{j,l}$.

On ne trouve qu'un seul bloc carré parmi les blocs $M_{1,j}$, $M_{2,j}$, ..., $M_{p,j}$ *donc, pour chaque valeur de l pour laquelle cela a un sens, la colonne qui exprime* $f(e_{j,l})$ *ne contient dans les lignes* $z_{i,l}$ *qu'un seul terme possiblement non nul:* $m_{z_{j,l},z_{j,l}}$. □

Le cas triangulaire par blocs exige de bien identifier les positions qui seront occupées dans la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}'$ et les valeurs de ces éléments.

Théorème 26.

Soit $M \in T(t_1,..,t_p)$ dans le cas général, avec les notations de la définition 9.

Si $(z_j+1,\ z_j+1)$ est un noeud simple les éléments de la diagonale dans les colonnes $z_j+1,..,z_j+t_j$ sont les $m_{z_{j,l},z_{j,l}}$ pour $l=1,..,t_j$.

Soit une séquence de type II $t_{q+1}=t_{q+2}=\ldots=t_{q+u}(=t)$ alors

i) pour chaque $r=1,..,t$ les vecteurs $e_{q+u,r} \leqslant e_{q+u-1,r} \leqslant \ldots\ldots \leqslant e_{q+1,r}$ se suivent dans $\mathcal{C}'$ et pour chaque $s=1,..,u$ l'expression de $f(e_{q+s,r})=\sum_{i=q+1}^{q+u} m_{z_{i,r},z_{q+s,r}}\, e_{i,r}$ + combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{C}'$ strictement inférieurs à $e_{q+u,r}$.

ii) pour chaque $r=1,..,t$ le bloc diagonal est (dans cet ordre)

$$\begin{pmatrix} m_{z_{q+u,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u,r},z_{q+1,r}} \\ m_{z_{q+u-1,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u-1,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u-1,r},z_{q+1,r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{z_{q+1,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+1,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+1,r},z_{q+1,r}} \end{pmatrix}$$

, qui est indépendante de r.

Démonstration.

Reprenons en détail l'analyse de la proposition 14:

a. Dans le cas d'un noeud simple (z_j+1, z_j+1) on ne trouve qu'un seul bloc carré parmi les blocs $M_{1,j}, M_{2,j}, \ldots, M_{p,j}$ donc, pour chaque valeur de l pour laquelle cela a un sens, la colonne qui exprime $f(e_{j,l})$ ne contient dans les lignes $z_{i,l}$ qu'un seul terme possiblement non nul: $m_{z_{j,l},z_{j,l}}$.

b. Dans le cas d'une séquence de type II $t_{q+1}=t_{q+2}=\ldots=t_{q+u}(=t)$ on trouve u blocs carrés consécutifs parmi les blocs $M_{1,j}, M_{2,j}, \ldots, M_{p,j}$ (et cela pour chaque j=q+1,...,q+u).

Si on considère une valeur de j parmi q+1,...,q+u et une valeur de r pour laquelle cela a un sens la colonne qui exprime $f(e_{j,r})$ contient dans les lignes $z_{q+1,r},..,z_{q+u,r}$ des termes possiblement non nuls, donc, pour chaque s=1,..,u, $f(e_{q+s,r})=\sum_{i=q+1}^{q+u} m_{z_{i,r},z_{q+s,r}}\, e_{i,r}$ + combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{C}'$ strictement inférieurs à $e_{q+u,r}$. □

Remarque 27.

Les matrices $\begin{pmatrix} m_{z_{q+u,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u,r},z_{q+1,r}} \\ m_{z_{q+u-1,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u-1,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u-1,r},z_{q+1,r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{z_{q+1,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+1,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+1,r},z_{q+1,r}} \end{pmatrix}$ sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} m_{z_{q+1,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+1,1},z_{q+2,1}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+1,1},z_{q+u,1}} \\ m_{z_{q+2,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+2,1},z_{q+2,1}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+2,1},z_{q+u,1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{z_{q+u,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+u,1},z_{q+2,1}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u,1},z_{q+u,1}} \end{pmatrix}$ qui est le coeur de la séquence de type II concernée; la similitude s'obtenant par une symétrie par rapport au centre (que nous appellerons centro-symétrie)

Théorème 28.

Dans $\mathcal{C}'$ M est représentée par une matrice triangulaire par blocs de forme $sh(B)^*$ dont les blocs diagonaux sont les valeurs des noeuds simples répétées autant de fois que leur multiplicité et les centro-symétriques des coeurs des séquences de type II, $t_{q+1}=t_{q+2}=\ldots=t_{q+u}(=t)$, répétées chacune t fois.

4.5 Exemples

4.5.1 Cas trigonalisable $\mathbf{t_1<t_2<t_3}$

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & 0 & c & \mathrm{cc}\\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c\\ d & \mathrm{dd} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & 0 & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggq}\\ 0 & d & 0 & f & \mathrm{ff} & 0 & 0 & g & \mathrm{gg}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & g\\ h & \mathrm{hh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & j & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj} & \mathrm{jjjj}\\ 0 & h & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & j & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & j & \mathrm{jj}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix} \qquad]$$

$\mathcal{C}'=(e6,e3,e1,e7,e4,e2,e8,e5,e9)$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$

$$P^{-1}\mathrm{MP}=\begin{pmatrix} j & i & h & \mathrm{jj} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{jjj} & \mathrm{iii} & \mathrm{jjjj}\\ 0 & f & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg} & \mathrm{fff} & \mathrm{ggg}\\ 0 & 0 & a & 0 & b & \mathrm{aa} & c & \mathrm{bb} & \mathrm{cc}\\ 0 & 0 & 0 & j & i & h & \mathrm{jj} & \mathrm{ii} & \mathrm{jjj}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{gg}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j & i & \mathrm{jj}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & g\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de M sont les termes de sa diagonale : a (multiplicité 2),f (multiplicité 3), j (multiplicité 4); autant que leur présence sur la diagonale de M.

4.5.2 Cas trigonalisable par blocs $\mathbf{t_1\leqslant t_2\leqslant t_3}$

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & b & \mathrm{bb} & \mathrm{bbb} & 0 & c & \mathrm{cc} & \mathrm{ccc}\\ 0 & a & \mathrm{aa} & 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & 0 & c & \mathrm{cc}\\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c\\ d & \mathrm{dd} & \mathrm{ddd} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & 0 & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg}\\ 0 & d & \mathrm{dd} & 0 & f & \mathrm{ff} & 0 & 0 & g & \mathrm{gg}\\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & g\\ h & \mathrm{hh} & \mathrm{hhh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & k & \mathrm{kk} & \mathrm{kkk} & \mathrm{kkkk}\\ 0 & h & \mathrm{hh} & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & k & \mathrm{kk} & \mathrm{kkk}\\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & i & 0 & 0 & k & \mathrm{kk}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}'=(e7,e4,e1,e8,e5,e2,e9,e6,e3,e10)$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}$ '

$$P^{-1}\mathrm{MP}=\begin{pmatrix} k & i & h & \mathrm{kk} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{kkk} & \mathrm{iii} & \mathrm{hhh} & \mathrm{kkkk}\\ 0 & f & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg} & \mathrm{fff} & \mathrm{ddd} & \mathrm{ggg}\\ 0 & b & a & c & \mathrm{bb} & \mathrm{aa} & \mathrm{cc} & \mathrm{bbb} & \mathrm{aaa} & \mathrm{ccc}\\ 0 & 0 & 0 & k & i & h & \mathrm{kk} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{kkk}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & c & \mathrm{bb} & \mathrm{aa} & \mathrm{cc}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & i & h & \mathrm{kk}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & d & g\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & c\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

On remarquera la diagonale de blocs $\begin{pmatrix} k &&&&&&&&& \\ & f & d &&&&&&& \\ & b & a &&&&&&& \\ &&& k &&&&&& \\ &&&& f & d &&&& \\ &&&& b & a &&&& \\ &&&&&& k &&& \\ &&&&&&& f & d & \\ &&&&&&& b & a & \\ &&&&&&&&& k \end{pmatrix}$; le bloc $\begin{pmatrix} f & d\\ b & a\end{pmatrix}$ est semblable au coeur $\begin{pmatrix} a & b\\ d & f\end{pmatrix}$ de la séquence (1,2) de type II, il est répété 3 fois (la valeur commune de t_1 et t_2).

Les valeurs propres sont k (3 fois comme sur la diagonale de M) et les éléments du spectre de $\begin{pmatrix} a & b\\ d & f\end{pmatrix}$ (3 fois comme la valeur commune de t_1 et t_2).

Remerciements.

Ce travail doit beaucoup à la lecture attentive, aux corrections et aux remarques constructives de Bruno Marinier.

5 REFERENCES

[1] Patrick Teller, Introduction à l'étude de C[A,B] lorsque AB=BA. www.lalgebrisant.fr
[2] H.W. Turnbull and A.C. Aitken, An Introduction to the theory of canonical matrices,, Dover Publications, 1961

Nîmes le 17 Août 2017
(avec mes remerciments à Ada pour avoir supporté de si nombreuses séances de calculs cet été)