Les nilpotents du commutant

PAR PATRICK TELLER

Soit une matrice nilpotente sous forme de Jordan de type $(s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, ..., s_z^{r_z})$, nous avons établi [4] que son commutant est simultanément trigonalisable si les exposants r_k sont égaux à 1 et, sinon, simultanément trigonalisable par blocs, les tailles des blocs étant donnés par la liste duale $((r_z, r_{z-1}, ..., r_1)^{s_1},(r_z, r_{z-1}, ..., r_2)^{s_2-s_1},...,r_z^{s_z-s_{z-1}})$; le changement de base se limitant à une simple permutation de la base.

Le résultat va nous permettre une caractérisation facile des matrices nilpotentes dans le commutant d'une matrice nilpotente donnée, de même que la recherche dans ce commutant des matrices nilpotentes d'indice maximal.

Pour le confort du lecteur nous allons rappeler les définitions et résultats nécessaires.

1 Rappels utiles

On désignera ici par $J(k)$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, elle est nilpotente d'indice k et les vecteurs de la base canonique $(e_1, ..., e_k)$ constituent, pour cette matrice, une chaîne :$0 \longleftarrow e_1 \longleftarrow e_2 \longleftarrow .... \longleftarrow e_k$.

Définition 1. *Matrices de Toeplitz Triangulaires Supérieures (TTS)*

On appellera matrices de Toeplitz triangulaires supérieures (TTS) les matrices de la forme $A_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix}$ (t_i lignes, t_j colonnes avec $t_i \leqslant t_j$) ou $\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j)) \\ 0 \end{pmatrix}$ (t_i lignes, t_j colonnes avec $t_i \geqslant t_j$), où les Q_{ij} sont des polynomes.

On désignera par T_{t_i,t_j} ces ensembles de matrices.

Définition 2. *Matrices en blocs de Toeplitz*

Soit un entier strictement positif n et une suite d'entiers strictement positifs $t_1 \leqslant t_2 ...... \leqslant t_p$ tels que $t_1 + t_2 + ... + t_p = n$, on appellera Matrice en Blocs de Toeplitz de type $(t_1, t_2, ..., t_p)$ une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formée de blocs (M_{ij}) de Toeplitz triangulaires supérieurs, de tailles respectives $t_i \times t_j$.

Exemple 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 5 & 0 & 7 & 8 & 0 & 0 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 0 & 15 & 0 & 17 & 18 & 0 & 20 & 21 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 20 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \in T(2,3,4).$$

Théorème 4. *Le commutant d'une matrice en blocs de Jordan*

Le commutant de $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$ est $\mathrm{T}(t_1,..,t_p)$ [1,5]

2 Trigonalisabilité

2.1 Définitions nécessaires

On considère une suite croissante d'entiers (t_0=0,t_1,..,t_p)

Définition 5. *Noeuds d'une matrice M∈ T(t_1,..,t_p).*

Une fois pour toutes, chaque fois qu'une formule y fait appel, nous considérerons que t_0=0.

La liste des entiers (t_1,t_2,..,t_p) étant donnée nous appellerons séquences de type I les sous-listes maximales de la forme $t_{q+1} < \ldots < t_{q+v}$ (c'est à dire telles que t_{q-1}=t_q<$t_{q+1} < \ldots =$ t_{q+v}<t_{q+v+1}=t_{q+v+2}) et séquences de type II les sous-listes maximales de la forme (t_{q+1}, ..., t_{q+u}) (c'est à dire telles que t_q<$t_{q+1} = \ldots = t_{q+u}$<$t_{q+u+1}$) et nous désignerons les entiers de 1 à n sous la forme $z_{q,k}$ de la manière suivante: pour tout k∈{1, ..., t_q} $z_{q,k}$ représente t_0+t_1+ $t_2 + \ldots + t_{q-1} + k$.

Nous appellerons intervalles de type I ou II les intervalles $[\![z_{k,1}, z_{k,t_k}]\!]$ suivant que t_k appartient à une séquence de type I ou II.

Nous dirons qu'un vecteur e_r de la base canonique $\mathcal{C}$ est de type I ou II suivant que r appartient à un intervalle de type I ou II.

Nous appellerons noeuds simples les couples ($z_{i,1}$,$z_{i,1}$), noeuds simples (lorsque t_i est de type I) et noeuds complexes les couples ($z_{i,1}$,$z_{j,1}$)(lorsque t_i et t_j appartiennent à une même séquence de type II); les $m_{z_{i,1},z_{j,1}}$ seront appelés les valeurs des noeuds correspondants.

Si t_q<$t_{q+1} = \ldots = t_{q+u}$<$t_{q+u+1}$ les noeuds correspondants ($z_{i,1}$, $z_{j,1}$) seront dits associés; dans ce cas la matrice $\begin{pmatrix} m_{z_{q+1,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+1,1},z_{q+2,1}} & \ldots & \ldots & m_{z_{q+1,1},z_{q+u,1}} \\ m_{z_{q+2,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+2,1},z_{q+2,1}} & \ldots. & \ldots & m_{z_{q+2,1},,z_{q+u,1}} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{z_{q+u,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+u,1},z_{q+2,1}} & \ldots & \ldots & m_{z_{q+u,1},z_{q+u,1}} \end{pmatrix}$ *est appelée le coeur de la séquence.*

Exemple 6.

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}
a & \mathrm{aa} & 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & c & \mathrm{cc} & 0 & 0 & k & \mathrm{kk} & 0 & 0 & 0 & t & \mathrm{tt} \\
0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\
d & \mathrm{dd} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} & 0 & m & \mathrm{mm} & \mathrm{mmm} & 0 & 0 & u & \mathrm{uu} & \mathrm{uuu} \\
0 & d & 0 & f & \mathrm{ff} & 0 & g & \mathrm{gg} & 0 & 0 & m & \mathrm{mm} & 0 & 0 & 0 & u & \mathrm{uu} \\
0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & u \\
h & \mathrm{hh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & j & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj} & 0 & n & \mathrm{nn} & \mathrm{nnn} & 0 & 0 & v & \mathrm{vv} & \mathrm{vvv} \\
0 & h & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & j & \mathrm{jj} & 0 & 0 & n & \mathrm{nn} & 0 & 0 & 0 & v & \mathrm{vv} \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & j & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & v \\
p & \mathrm{pp} & q & \mathrm{qq} & \mathrm{qqq} & r & \mathrm{rr} & \mathrm{rrr} & s & \mathrm{ss} & \mathrm{sss} & \mathrm{ssss} & 0 & w & \mathrm{ww} & \mathrm{www} & \mathrm{wwww} \\
0 & p & 0 & q & \mathrm{qq} & 0 & r & \mathrm{rr} & 0 & s & \mathrm{ss} & \mathrm{sss} & 0 & 0 & w & \mathrm{ww} & \mathrm{www} \\
0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & r & 0 & 0 & s & \mathrm{ss} & 0 & 0 & 0 & w & \mathrm{ww} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & w \\
A & A\mathbb{A} & B & \mathbb{B}B & \mathbb{B}\mathbb{B}B & C & \mathbb{C}C & \mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C} & D & \mathbb{D}D & \mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D} & \mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}D & T & \mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T} & \mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T}T \\
0 & A & 0 & B & \mathbb{B}B & 0 & C & \mathbb{C}C & 0 & D & \mathbb{D}D & \mathbb{D}\mathbb{D}D & 0 & T & \mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}\mathbb{T}T \\
0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & C & 0 & 0 & D & \mathbb{D}D & 0 & 0 & T & \mathbb{T}T & \mathbb{T}\mathbb{T}T \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 & T & \mathbb{T}T \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T
\end{pmatrix} \in T(2, 3, 3, 4, 5)$$

les séquences (2) et (4,5) sont de type I, la séquence (3,3) est de type II.

a,f,g,i,j,s,T sont les valeurs des noeuds; a,s,T sont les valeurs des noeuds simples; f,g,i,j sont les valeurs des noeuds complexes.

la matrice $\begin{pmatrix} f & g \\ i & j \end{pmatrix}$ est le coeur de la séquence (3,3)

Proposition 7. *Un ordre sur la base canonique*

Soit la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}^n$ dont on désignera les éléments (e_1, ..., e_n) sous la forme $e_{i,k}$ de la manière suivante: $e_{i,k}$ représente $e_{t_0+\ldots.+t_{i-1}+k}$.

On dira que $e_{i,k} \leqslant e_{j,l}$ *lorsque* $k<l$ *ou* $k=l$ *et* $i \geqslant j$
Ce qui se traduit par une suite croissante $\mathcal{C}'=(e_{p,1}, e_{p-1,1}, ..., ...)$

2.2 La trigonalisabilité (éventuellement par blocs) [4]

La clef se trouve dans le lemme tout simple qui est rappelé ici avec sa démonstration:

Lemme 8. *Soit* $N=(n_{k,l}) \in T_{t_i,t_j}$
$$\forall (k,l) \in [\![1,t_i]\!] \times [\![1,t_j]\!],\ n_{k,l} \neq 0 \Longrightarrow k<l \text{ ou } \begin{cases} k=l \\ t_i \geqslant t_j \end{cases}$$

Démonstration.
Soit une matrice de T_{t_i,t_j}*, placant l'origine en la case (ligne1,colonne1), avec l'axe des x orienté de manière classique vers la droite et l'axe des y orienté vers le bas:*
- lorsque $t_i<t_j$ *les cases de coordonnées (x,y) sont nulles lorsque* $y \geqslant x+(t_i-t_j)$
- lorsque $t_i=t_j$ *les cases de coordonnées (x,y) sont nulles lorsque* $y>x$
- lorsque $t_i>t_j$ *les cases de coordonnées (x,y) sont nulles lorsque* $y>x$.
D'où le résultat.

□

Théorème 9. *La matrice de f relativement à la base* $\mathcal{C}'$

Si on désigne par f l'endomorphisme représenté par la matrice M de $T(t_1,..,t_p)$
alors
1) $\forall (j,l)$ $f(e_{j,l}) \in \mathrm{Vect}(\{e_{i,k}\}_{e_{i,k} \leqslant e_{q+1,l}})$ où $q+1=\min\{k, t_k=t_j\}$
2) Dans le cas d'un noeud simple
Si $(z_j+1,\ z_j+1)$ est un noeud simple les éléments de la diagonale dans les colonnes $z_j+1,..,z_j+t_j$ sont les $m_{z_{j,l},z_{j,l}}$ pour $l=1,..,t_j$.
3) Dans le cas d'une séquence de type II
Soit une séquence de type II $t_{q+1}=t_{q+2}=...=t_{q+u}(=t)$ alors
i) pour chaque r=1,..,t les vecteurs $e_{q+u,r} \leqslant e_{q+u-1,r} \leqslant ...... \leqslant e_{q+1,r}$ se suivent dans $\mathcal{C}'$ et pour chaque s=1,..,u l'expression de $f(e_{q+s,r})=\sum_{i=q+1}^{q+u} m_{z_{i,r},z_{q+s,r}}\, e_{i,r}$ + combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{C}'$ strictement inférieurs à $e_{q+u,r}$.
ii) pour chaque r=1,..,t le bloc diagonal est (dans cet ordre)
$$\begin{pmatrix} m_{z_{q+u,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u,r},z_{q+1,r}} \\ m_{z_{q+u-1,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u-1,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u-1,r},z_{q+1,r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{z_{q+1,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+1,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+1,r},z_{q+1,r}} \end{pmatrix}$$
, qui est indépendante de r.

Remarque 10.
Les matrices $\begin{pmatrix} m_{z_{q+u,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u,r},z_{q+1,r}} \\ m_{z_{q+u-1,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u-1,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u-1,r},z_{q+1,r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{z_{q+1,r},z_{q+u,r}} & m_{z_{q+1,r},z_{q+u-1,r}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+1,r},z_{q+1,r}} \end{pmatrix}$ sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} m_{z_{q+1,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+1,1},z_{q+2,1}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+1,1},z_{q+u,1}} \\ m_{z_{q+2,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+2,1},z_{q+2,1}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+2,1},z_{q+u,1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{z_{q+u,1},z_{q+1,1}} & m_{z_{q+u,1},z_{q+2,1}} & \cdots & \cdots & m_{z_{q+u,1},z_{q+u,1}} \end{pmatrix}$; la similitude s'obtenant par une symétrie par rapport au centre.

Théorème 11.

La matrice qui représente f dans la base $\mathcal{C}'$ est triangulaire supérieure (éventuellement par blocs).

(les vecteurs sont pris suivant l'ordre croissant des couples (i,k) défini au-dessus)

Autrement dit, l'ensemble des matrices de $T(t_1,..,t_p)$ est simultanément trigonalisable (éventuellement par blocs) (éventuellement par blocs)dans une base obtenue par permutation de la base canonique.

Définition 12. *Forme d'une matrice nilpotente*

Soit la suite croissante $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant t_p$, nous la noterons $(s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, \ldots., s_z^{r_z})$ où $s_1 < s_2 < \ldots < s_z$.

Si B$\in$ $T(t_1,..,t_p)$ nous appellerons forme de B (sh(B)) la suite $(s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, \ldots., s_z^{r_z})$; les entiers r_i seront appelés les multiplicités et la forme de B sera dite simple lorsque toutes les multiplicités sont égales à 1.

Nous appellerons duale de sh(B) la suite $((r_z, r_{z-1}, \ldots., r_1)^{s_1}, (r_z, r_{z-1}, \ldots., r_2)^{s_2\text{-}s_1}, \ldots, r_z^{s_z-s_{z-1}})$.

Définition 13. *Forme d'une matrice trigonale par blocs*

Soit U une matrice trigonale par blocs on appellera forme de U la suite des tailles des blocs (de la gauche vers la droite).

Par exemple la forme de U=$\begin{pmatrix} a & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & \ldots \\ \ldots & c & \mathrm{cc} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & d & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & e \end{pmatrix}$ *est (1,2,1,1).*

Théorème 14.

Soit B une matrice nilpotente de forme sh(B)=$(s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, \ldots., s_z^{r_z})$, le commutant de B est simultanément trigonalisable par blocs (par permutation de la base canonique), les éléments génériques trigonalisés du commutant ont pour forme la suite duale de sh(B).

3 La diagonale, les blocs diagonaux

Théorème 15.

Soit M$\in$ $T(t_1,..,t_p)$

Si $(z_j + 1, z_j + 1)$ est un noeud simple les éléments de la diagonale dans les colonnes $z_j+1,..,z_j+t_j$ sont les $m_{z_{j,l},z_{j,l}}$ pour l=1,..,t_j.

Soit une séquence de type II t_{q+1}=$t_{q+2} = \ldots = t_{q+u}$(=t) alors

i) pour chaque r=1,..,t les vecteurs $e_{q+u,r} \leqslant e_{q+u-1,r} \leqslant \ldots\ldots \leqslant e_{q+1,r}$ se suivent dans $\mathcal{C}'$ et pour chaque s=1,..,u l'expression de f($e_{q+s,r}$)=$\sum_{i=q+1}^{q+u} m_{z_{i,r}, z_{q+s,r}}\, e_{i,r}$ + combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{C}'$ strictement inférieurs à $e_{q+u,r}$.

ii) pour chaque r=1,..,t le bloc diagonal est (dans cet ordre)

$$\begin{pmatrix} m_{z_{q+u,r}, z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u,r}, z_{q+u-1,r}} & \ldots & \ldots & m_{z_{q+u,r}, z_{q+1,r}} \\ m_{z_{q+u-1,r}, z_{q+u,r}} & m_{z_{q+u-1,r}, z_{q+u-1,r}} & \ldots. & \ldots & m_{z_{q+u-1,r}, z_{q+1,r}} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{z_{q+1,r}, z_{q+u,r}} & m_{z_{q+1,r}, z_{q+u-1,r}} & \ldots & \ldots & m_{z_{q+1,r}, z_{q+1,r}} \end{pmatrix}$$

, qui est indépendante de r et semblable au coeur

$$\begin{pmatrix} m_{z_{q+1}, z_{q+1}} & m_{z_{q+1}, z_{q+2}} & \ldots & \ldots & m_{z_{q+1}, z_{q+u}} \\ m_{z_{q+2}, z_{q+1}} & m_{z_{q+2}, z_{q+2}} & \ldots. & \ldots & m_{z_{q+2,}, z_{q+u}} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{z_{q+u}, z_{q+1}} & m_{z_{q+u}, z_{q+2}} & \ldots & \ldots & m_{z_{q+u}, z_{q+u}} \end{pmatrix}.$$

Théorème 16.

Soit B une matrice nilpotente de forme sh(B) alors dans la base $\mathcal{C}'$ toute matrice $M \in T(t_1, ..., t_p)$ est représentée par une matrice triangulaire par blocs, de forme duale; les éléments de la diagonale de blocs sont les valeurs des noeuds simples répétées autant de fois que leur multiplicité et les centro-symétriques des coeurs des séquences de type II, $t_{q+1} = t_{q+2} = ... = t_{q+u} (= t)$, répétées chacune t fois.

4 Application: une caractérisation des matrices nilpotentes du commutant

Théorème 17.

Soit $M \in T(t_1, .., t_p)$

M est nilpotente si et seulement si les valeurs des noeuds simples sont nulles et les coeurs des séquences de type II sont des matrices nilpotentes.

Démonstration.

découle du résultat précédent. □

On comparera avec [1] et [3].

5 Les nilpotents d'indice maximal dans T(t_1,..,t_p)

La détermination du maximum des indices de nilpotence des matrices commutant avec une matrice nilpotente a été traitée dans [3], à l'aide du Théorème de Gansner-Saks, ce qui permet d'exprimer le maximum en fonction des (t_1,..,t_p); la trigonalisation (éventuellement par blocs) de T(t_1,..,t_p) simplifie énormément la tâche.

Nous allons d'abord présenter une démarche algorithmique simple qui fournit l'ensemble des matrices nilpotentes d'indice de nilpotence maximal dans T(t_1,..,t_p).

Puis nous retrouverons les résultats de [3], de manière indépendante et plus élémentaire.

Comme nous avons établi que les matrices de T(t_1,..,t_p) sont simultanément trigonalisables (ou trigonalisables par blocs) avec une matrice de passage simple, nous allons étudier la nilpotence sur la forme trigonalisée (éventuellement par blocs).

Soit une matrice générique de T(t_1,..,t_p) A et sa trigonalisée A'; A' est nilpotente si et seulement si les éléments de type I de sa diagonale sont nuls et les coeurs des séquences de type II sont des matrices carrées nilpotentes.

La nilpotence de A' implique que, si e'_j est de type I, f(e'_j)∈Vect($e'_i, i < j$).

S'il existe une séquence de type II $t_{q+1} = t_{q+2} = ... = t_{q+u} (= t)$, nous avons vu que pour chaque r=1,..,t les vecteurs $e_{q+u,r} \leqslant e_{q+u-1,r} \leqslant ...... \leqslant e_{q+1,r}$ se suivent dans $\mathcal{C}'$ et pour chaque s=1,..,u l'expression de f($e_{q+s,l}$)=$\sum_{i=q+1,q+u} m_{z_i+r, z_{q+s}+r}$ $e_{i,r}$ + combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{C}'$ strictement inférieurs à $e_{q+u,r}$; attention; si e'_j appartient à {$e_{q+u,r}$, $e_{q+u-1,r}$, ...$e_{q+1,r}$} il n'est pas forcément vrai que f(e'_j)∈Vect(e'_i, $i < j$), nous supposerons désormais que le coeur de la séquence est nilpotent d'indice maximal (relativement à sa taille), c'est à dire d'indice u.

Nous exprimerons cette situation lorsque nous associerons un graphe orienté à A'.

Déterminer l'indice de nilpotence de A' revient à déterminer le minimum de $\{k \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1, ..., n]\!], f^k(e'_i) = 0\}$, où f est comme plus haut et $\mathcal{C}' = (e'_1, ..., e'_n)$.

Soit un vecteur x=$\sum_{j \in J} x_j e'_j$ où les x_j sont génériques (et donc non nuls) le minimum de $\{k \in \mathbb{N}, f^k(x) = 0\}$ est égal au minimum de $\{k \in \mathbb{N}, \forall j \in J, f^k(e'_j) = 0\}$.

Définition 18. *G($A^{'}$): Le graphe orienté, acyclique, associé à f*

Les sommets de G($A^{'}$) sont les éléments de $\mathcal{C}'$, les arêtes de G($A^{'}$) sont définies comme suit: soient (e'$_i$,e'$_j$)$\in\mathcal{C}'^2$

1. si e'$_i$ et e'$_j$ n'appartiennent pas à un même intervalle de type II e'$_j$$\longrightarrow e'_i$ lorsqu'il existe $x_j\neq 0$, f(e'$_i$)=$x_j e'_j+\sum_{l\neq j} x_l e'_l$

2. si e'_i et e'$_j$ appartiennent à un même intervalle de type II alors e'$_j$$\longrightarrow e'_i$ $\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} \exists x_j\neq 0, f(e'_i)=x_j e'_j+\sum_{l\neq j} x_l e'_l \\ e'_j<e'_i \end{cases}$$

Proposition 19.

$$\forall e'_i\in\mathcal{C}', min\{k\in\mathbb{N}, f^k(e'_i)=0\}=1+min\{k\in\mathbb{N},\forall j, e'_j\longrightarrow e'_i, f^k(e'_j)=0\}$$

Démonstration.

immédiat □

Comme f(e'$_1$)=0 et $A^{'}$ triangulaire supérieure déterminer l'indice de nilpotence de $A^{'}$ revient à déterminer les chemins les plus longs possibles de e'$_1$ à e'$_n$ dans G($A^{'}$); l'épithète « possible » se réfère au fait que tout chemin de e'$_1$ à e'$_n$ est associé à la non-nullité de certains éléments de A' et indifférent aux valeurs des autres d'où le choix d'un chemin imposera des conditions (incluses en fait dans le terme « générique ») et en lèvera d'autres.

5.1 Chemins de longueur maximale et matrices nilpotentes d'indice maximal (par la voie algorithmique)

La question du-des plus long(s) chemin(s) entre deux sommets d'un graphe orienté acyclique est banale pour les spécialistes des graphes; comme les arêtes ont toutes la même longueur on peut proposer l'algorithme suivant destiné à déterminer les chemins maximaux (parmi lesquels on pourra ensuite sélectionner ceux de longueur maximale).

Sans démonstration:

– Procédure Successeurs(L)

Soit e'$_i$ le dernier élément de L

Etablir la liste dans l'ordre croissant $\left\{e'_j, \begin{array}{l} e'_i\longrightarrow e'_j \\ \{k\neq i, e'_k\longrightarrow e'_j\}=\emptyset \end{array}\right\}$.

- Programme principal

1. Initialisation M:[[e'$_1$]]

2. Tant qu'il existe dans M une liste dont le dernier élément $\neq e'_n$

Si M=[L1,..,Lt]

$\forall k\in\{1,...,t\}$, si dernier élément de L$_k$$\neq e'_n$,

supprimer L$_k$ dans M

soit $\{e'_{k_1},....e'_{k_{r(k)}}\}$=Successeurs(L$_k$)

$\forall l\in\{1,...,r(k)\}$, N$_l$:L$_k$@e'$_{k_l}$

ajouter les N$_l$ dans M.

fin.

La détermination de l'indice de nilpotence maximal (parmi les éléments du commutant) est donc résolue de manière algorithmique; mais on peut déduire des chemins maximaux dans G(A') les matrices nilpotentes d'indice maximal.

Soit un chemin de longueur maximale (e'_1=e'$_{c(1)}$,e'$_{c(2)}$...,e'$_n$=$e'_{c(r)}$) il correspond à un endomorphisme f tel que: e'$_1$$\rightarrow e'_{c(2)}$, e'$_{c(2)}$$\rightarrow e'_{c(3)}$, ...; ce qui impose la non-nullité de certains éléments de la matrice associée relativement à $\mathcal{C}'$ (sans oublier ceux qui sont nécessaires à assurer la maximalité de l'indice de nilpotence des blocs diagonaux).

Exemple 20.

Dans le cas

$$M=\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c \\ d & \mathrm{dd} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & 0 & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggq} \\ 0 & d & 0 & f & \mathrm{ff} & 0 & 0 & g & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & g \\ h & \mathrm{hh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & j & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj} & \mathrm{jjjj} \\ 0 & h & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & j & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & j & \mathrm{jj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix} \qquad]$$

$\mathcal{C}' = (e6, e2, e1, e7, e4, e2, e8, e5, e9)$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$

$$P^{-1}MP=\begin{pmatrix} j & i & h & \mathrm{jj} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{jjj} & \mathrm{iii} & \mathrm{jjjj} \\ 0 & f & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg} & \mathrm{fff} & \mathrm{ggg} \\ 0 & 0 & a & 0 & b & \mathrm{aa} & c & \mathrm{bb} & \mathrm{cc} \\ 0 & 0 & 0 & j & i & h & \mathrm{jj} & \mathrm{ii} & \mathrm{jjj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j & i & \mathrm{jj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

M sera nilpotente si et seulement si j=f=a=0

d'où $M=\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{aa} & 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c \\ d & \mathrm{dd} & 0 & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & 0 & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggq} \\ 0 & d & 0 & 0 & \mathrm{ff} & 0 & 0 & g & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ h & \mathrm{hh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & 0 & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj} & \mathrm{jjjj} \\ 0 & h & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & 0 & \mathrm{jj} & \mathrm{jjj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & \mathrm{jj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et sa trigonalisée sera $\begin{pmatrix} 0 & i & h & \mathrm{jj} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{jjj} & \mathrm{iii} & \mathrm{jjjj} \\ 0 & 0 & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg} & \mathrm{fff} & \mathrm{ggg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & \mathrm{aa} & c & \mathrm{bb} & \mathrm{cc} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & h & \mathrm{jj} & \mathrm{ii} & \mathrm{jjj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & \mathrm{jj} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Appliquant l'algorithme proposé on obtient:

indice maximal de nilpotence :7

chemins de longueur maximale : $(e_1', e_2', e_3', e_5', e_7', e_8', e_9')$, $(e_1', e_2', e_4', e_5', e_7', e_8', e_9')$,$(e_1', e_2', e_4', e_5', e_6', e_8', e_9')$,$(e_1', e_2', e_4', e_5', e_7', e_8', e_9')$

d'où on déduit les matrices nilpotentes d'indice maximal:

Au chemin $(e_1', e_2', e_3', e_5', e_7', e_8', e_9')$ correspondent les matrices nilpotentes où i,d,b,,g, sont non nuls et génériques (pour éviter une annulation précoce) et les autres sont quelconques.

Et on fera de même pour chacun des chemins de longueur maximale.

Exemple 21.

$$M=\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & b & \mathrm{bb} & \mathrm{bbb} & 0 & c & \mathrm{cc} & \mathrm{ccc} \\ 0 & a & \mathrm{aa} & 0 & b & \mathrm{bb} & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & c \\ d & \mathrm{dd} & \mathrm{ddd} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & 0 & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} \\ 0 & d & \mathrm{dd} & 0 & f & \mathrm{ff} & 0 & 0 & g & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & f & 0 & 0 & 0 & g \\ h & \mathrm{hh} & \mathrm{hhh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & k & \mathrm{kk} & \mathrm{kkk} & \mathrm{kkkk} \\ 0 & h & \mathrm{hh} & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & k & \mathrm{kk} & \mathrm{kkk} \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & i & 0 & 0 & k & \mathrm{kk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}' = (e7, e4, e1, e8, e5, e2, e9, e6, e3, e10)$

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}$ '

$$P^{-1}MP=\begin{pmatrix} k & i & h & \mathrm{kk} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{kkk} & \mathrm{iii} & \mathrm{hhh} & \mathrm{kkkk} \\ 0 & f & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg} & \mathrm{fff} & \mathrm{ddd} & \mathrm{ggg} \\ 0 & b & a & c & \mathrm{bb} & \mathrm{aa} & \mathrm{cc} & \mathrm{bbb} & \mathrm{aaa} & \mathrm{ccc} \\ 0 & 0 & 0 & k & i & h & \mathrm{kk} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{kkk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & d & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & c & \mathrm{bb} & \mathrm{aa} & \mathrm{cc} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & i & h & \mathrm{kk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & d & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

M sera nilpotente si et seulement si k=0 et $\begin{pmatrix} a & b \\ d & f \end{pmatrix}$ nilpotente d'où $\begin{pmatrix} a & -a/d \\ \mathrm{ad} & -a \end{pmatrix}$, donc

$$M=\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & -a/d & \mathrm{bb} & \mathrm{bbb} & 0 & c & \mathrm{cc} & \mathrm{ccc} \\ 0 & a & \mathrm{aa} & 0 & -a/d & \mathrm{bb} & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & -a/d & 0 & 0 & 0 & c \\ \mathrm{ad} & \mathrm{dd} & \mathrm{ddd} & -a & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & 0 & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} \\ 0 & \mathrm{ad} & \mathrm{dd} & 0 & -a & \mathrm{ff} & 0 & 0 & g & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & \mathrm{ad} & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & g \\ h & \mathrm{hh} & \mathrm{hhh} & i & \mathrm{ii} & \mathrm{iii} & 0 & \mathrm{kk} & \mathrm{kkk} & \mathrm{kkkk} \\ 0 & h & \mathrm{hh} & 0 & i & \mathrm{ii} & 0 & 0 & \mathrm{kk} & \mathrm{kkk} \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & \mathrm{kk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et sa trigonalisée sera

$$\begin{pmatrix} 0 & i & h & \mathrm{kk} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{kkk} & \mathrm{iii} & \mathrm{hhh} & \mathrm{kkkk} \\ 0 & -a & \mathrm{ad} & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg} & \mathrm{fff} & \mathrm{ddd} & \mathrm{ggg} \\ 0 & -a/d & a & c & \mathrm{bb} & \mathrm{aa} & \mathrm{cc} & \mathrm{bbb} & \mathrm{aaa} & \mathrm{ccc} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & h & \mathrm{kk} & \mathrm{ii} & \mathrm{hh} & \mathrm{kkk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & \mathrm{ad} & g & \mathrm{ff} & \mathrm{dd} & \mathrm{gg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a/d & a & c & \mathrm{bb} & \mathrm{aa} & \mathrm{cc} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & h & \mathrm{kk} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & \mathrm{ad} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a/d & a & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'algorithme on obtient un chemin de longueur maximale (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6, $e'_7, e'_8, e'_9, e'_{10}$).

d'où on déduit les matrices nilpotentes d'indice maximal:

Au chemin (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6, e'_7, e'_8, e'_9, e'_{10}) correspondent les matrices nilpotentes d'indice maximal où i,a,d,c, sont non nuls et génériques (pour éviter une annulation précoce) et les autres sont quelconques.

5.2 Le maximum des indices de nilpotence

Pour déterminer directement le maximum des indices de nilpotence quelques définitions sont nécessaires:

Notation 22.

On notera $s_1 < s_2 < .. < s_r$ *(et on appellera longueurs) la suite strictement croissante des valeurs de* $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots\ldots \leqslant t_p$

Pour chaque $k \in \mathbb{N}*$ $n(k) = |\{j, t_j = k\}|$

Deux longueurs s_{i-1} *et* s_i *seront dites adjacentes lorsque* $s_{i-1} = s_i - 1$.

Théorème 23. *Les matrices nilpotentes d'indice de nilpotence maximal dans T(*$t_1, \ldots, t_p$*)*

L'indice de nilpotence maximal est $\max_{i=1\ldots r}\{2(p-i) + n(s_i)s_i + n(s_i - 1)(s_i - 1)\}$

(résultat que l'on trouvera dans [3] avec une erreur d'indice, et dans la configuration $s_1 > s_2 > \ldots > s_p$*)*

Démonstration.

La démonstration est largement allégée par la connaissance de la base $\mathcal{C}'$.

1. Le cas r=1 est immédiat

2. On suppose le résultat vrai pour T($t_1, \ldots, t_p$) et on considère t_{p+1}

i. $t_{p+1} > 1 + t_p$ et on considère une chaîne maximale relative à T($t_1, \ldots, t_p$) ($x_1, x_2, \ldots, x_s$) et observons A.

Comme $\forall k \leqslant p, t_k < t_{p+1}$, les éléments ligne1-colonne1 des blocs $A_{p+1,k}$ sont non nuls d'où la chaîne ($e_{p+1,1}, x_1, .., x_s$) et de même tous les éléments de la dernière colonne de chacun des blocs $A_{k,p+1}$ sont non nuls d'où la chaîne ($e_{p+1,1}, x_1, .., x_s, e_{p+1,t_{p+1}}$); par contre il n'est pas possible d'insérer dans cette chaîne d'autres sommets parmi $\{e_{p+1,2} \ldots\ldots, e_{p+1,-1+t_{p+1}}\}$ car soit ils n'apparaissent pas dans les sommets de la chaîne, soit les sommets de la chaîne n'apparaissent pas dans ceux-ci.

D'où soit nous obtenons les deux types de chaîne maximale ($e_{p+1,1}, x_1, .., x_s, e_{p+1,t_{p+1}}$) soit ($e_{p+1,1}, e_{p+1,2}, e_{p+1,3}, .., e_{p+1,t_{p+1}}$).

ii. $t_{p+1} = 1 + t_p$ ou $t_{p+1} = t_p$; dans ce cas suivant les cas une chaîne maximale relative à T($t_1, \ldots, t_p$) ($x_1, x_2, \ldots, x_s$) s'intercale parmi les sommets ($e_{p+1,1} \ldots\ldots$, $e_{p+1,t_{p+1}}$) soit s'enrichit en ($e_{p+1,1}, x_1, .., x_s, e_{p+1,t_{p+1}}$) suivant les sommets concernés par ($x_1, x_2, \ldots, x_s$).

D'où le résultat. □

6 La dimension du commutant nilpotent d'une matrice nilpotente

Question 24.
posée sur le site Mathoverflow sous le numéro 160891
Soit B une matrice nilpotente, déterminer la dimension de l'ensemble des matrices nilpotentes commutant avec B.

Rapppelons le résultat connu:

Théorème 25.
La codimension de l'ensemble des matrices nilpotentes dans $\mathcal{M}_w(K)$ est w [1,2]

Soit B une matrice nilpotente de T(t_1,...,t_p) et de forme sh$(B) = (s_1^{r_1}, s_2^{r_2}, ..., s_z^{r_z})$; nous savons que le commutant de B est trigonalisable par blocs , que sa dimension est $\sum_{k=1}^{p}(2p - 2k+1)t_k$; en appliquant la même démarche qu'en [1] ou [2] on établira le

Théorème 26.
Soit B une matrice nilpotente de T(t_1,...,t_p) l'ensemble $\mathcal{N}(B)$ est de dimension $\sum_{k=1}^{p}(2p - 2k+1)t_k$-p.

Démonstration.
On sait que l'on retrouve sur la diagonale de blocs d'une matrice générique du commutant les valeurs des noeuds simples et des matrices semblables aux coeurs des séquences de type II (peu importe ici avec quelles multiplicités; la codimension de l'ensemble des matrices nilpotentes est donc égale au nombre de noeuds simples (c'est à dire le nombre d'intervalles de type I)+la somme des codimensions des matrices nilpotentes parmi les coeurs (c'est à dire la taille de chacun des coeurs, qui est égale au nombre d'intervalles de chaque séquence de type II); au total la codimension est égale au nombre d'intervalles, c'est à dire p. □

Remerciements.
Ce travail doit beaucoup à la lecture attentive, aux corrections et aux remarques constructives de Bruno Marinier.

7 REFERENCES

[1] Roberta Basili, On the Irreducibility of Commuting Varieties of Nilpotent Matrices, J. Algebra 268 (2003),p. 58-80
[2] Michael Bulois, Laurent Evin, Nested punctual Hilbert schemes and commuting varieties of parabolic subalgebras, https://arxiv.org/pdf/1306.4838v1.pdf
[3] Polana Oblak, The upper bound for the index of nilpotency for a matrix commuting with a given nilpotent matrix, https://arxiv.org/pdf/math/0701561v2.pdf
[4] Patrick Teller, Le commutant est trigonalisable
[5] H.W. Turnbull and A.C. Aitken, An Introduction to the theory of canonical matrices,, Dover Publications, 1961

Nîmes le 17 Août 2017
(avec mes remerciments à Ada pour avoir supporté de si nombreuses séances de calculs cet été)