Au pays des matrices fractales

patrick TELLER

Résumé.

Les matrices de Weyr sont un substitut, récemment redécouvert ([3],[4]), aux matrices de Jordan; le commutant d'une matrice en blocs de Weyr est un ensemble de matrices qui possèdent une forme particulière, de type fractal.

L'étude des ensembles de matrices fractales permet d'établir directement des propriétés qui ont jusqu'à maintenant exigé, soit des arguments de Géométrie Algébrique, soit de longs artifices matriciels, comme les Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey sur la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par deux matrices. ([2],[5]).

Le premier paragraphe rappelle, pour le lecteur qui en ressentirait la nécessité, la forme de Jordan et introduit la forme de Weyr pour une matrice nilpotente.

Le deuxième décrit la structure triangulaire par blocs du commutant d'une matrice sous forme de Weyr, introduisant les matrices fractales (ou emboitées).

La suite fait le pari que kes propriétés relatives aux couples (voire triplets) de matrices commutantes peuvent se démontrer plus simplement à l'aide de l'observation des matrices fractales et d'Algèbre linéaire élémentaire.

Le troisième ouvre l'étude des propriétés des Algébres de matrices fractales et établit des propriétés algébriques et « graphiques » qui sont exploitées dans les démonstrations élémentaires des Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey.

Le quatrième contient les démonstrations élémentaires annoncées, le Théorème de Laffey est démontré dans le cas général et on trouve une expression effective de la dimension de l'Algèbre $\mathbb{K}$[A,W], ce qui constitue un résultat original.

Les suivants sont des chantiers à explorer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos.

1. La forme de jordan et la forme de Weyr

La forme de Jordan d'une matrice nilpotente est bien connue:

toute matrice nilpotente peut se mettre sous la forme $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$, où les indices forment une suite décroissante $t_1 \geqslant t_2 \geqslant .... \geqslant t_p$ et pour chaque k J(t_k)=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & .... & ... & 0 \\ .... & ... & .... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{t_k}(\mathbb{K})$; on conviendra de poser t_0=0.

La suite (t_i) sera appelée partition canoniquement associée à Γ.

Proposition 1. *Un ordre sur la base canonique*

Soit la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ dont on désignera les éléments ($e_1, ..., e_n$) sous la forme $e_{i,k}$ de la manière suivante: $e_{i,k}$ représente $e_{t_0+....+t_{i-1}+k}$.

On dira que $e_{i,k} \leqslant e_{j,l}$ lorsque k<l ou k=l et i⩽j

Ce qui se traduit par une suite croissante $\mathcal{C}'$=($e_{1,1}, e_{2,1}, ..., ...$)

Remarque 2. Il s'agit tout simplement d'un ordre lexicographique; on écrira (i,j)$\prec(k,l)$

Proposition 3. *Interprétation de la matrice Γ et construction de la matrice W*

On considère la matrice Γ décrite au-dessus et la base canonique (e_i), l'action de Γ sur la base peut se lire comme suit:

$$\begin{array}{l}
0 \longleftarrow e_{p,1} \longleftarrow e_{p,2} \longleftarrow \ldots. \longleftarrow e_{p,t_p} \\
0 \longleftarrow e_{p-1,1} \longleftarrow e_{p-1,2} \longleftarrow \ldots. \longleftarrow e_{p-1,t_{p-1}} \\
\ldots.. \\
0 \longleftarrow e_{1,1} \longleftarrow e_{1,2} \longleftarrow \ldots. \longleftarrow \ldots\ldots \qquad\qquad \longleftarrow e_{1,t_1}
\end{array}$$

Tableau 1.

Posons z_1=p,z_2=card($\{k,\ t_k \geqslant 2\}$), z_3 = card($\{k,\ t_k \geqslant 3\}$),...,z_{t_1} (on conviendra de poser z_{t_1+1}=0), la suite (z_u) est décroissante, elle sera désignée sous le nom de partition canoniquement associée à W.

Parcourir la base $\mathcal{C}'$ dans l'ordre revient à parcourir le tableau, colonne après colonne du bas vers le haut et de la gauche vers la droite; la matrice Γ devient alors la matrice (par blocs) W=($W_{i,j}$) où le bloc $W_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{K})$. Le tableau implique que $\forall i \in \{1, \ldots, t_p - 1\}$ $W_{i,i+1}$= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(\mathbb{K})$ (attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et si $j \neq i+1$ $W_{i,j}$=0.

W=$\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & \ldots & \ldots0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \ldots & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de Weyr associée à cette partition.

Remarque 4. Cette présentation de la forme de Weyr reprend le chemin totalement empirique qui m'a fait la découvrir; on peut bien entendu définir cette forme de manière indépendante de la forme de Jordan.

On lira dans [3] l'histoire de la redécouverte de cette forme matricielle longtemps oubliée et une description de cette forme, indépendante des matrices de Jordan.

Exemple 5.

Soit $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & . & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(4) & 0 & \\ 0 & J(3) & \\ 0 & \ldots & J(1) \end{pmatrix}$

On obtient $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & . & \ldots & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots. & . & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 6. *Les puissances de W*

Soit pour tout u$\geqslant$v $N_{u,v} = \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{u,v}(K)$.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & N_{z_1,z_2} & 0 & .. & \ldots \\ 0 & 0 & N_{z_2,z_3} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots. & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & N_{z_{t_1-1},z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_{z_1,z_3} & 0 & .. & \ldots \\ . & 0 & 0 & N_{z_2,z_4} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots. & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & N_{z_{t_1-2},z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots. \\ 0 & \ldots & \ldots & & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}$$

...

$$W^k=\begin{pmatrix} 0 & .... & 0 & N_{z_1,z_{1+k}} & 0 & .. & ... \\ .... & ... & 0 & 0 & N_{z_2,z_{2+k}} & ... & ... \\ ... & ... & ... & .... & 0 & ... & ... \\ .... & ... & ... & ... & ... & ... & N_{z_{t_1}-k,z_{t_1}} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ & & & & & & ... \\ 0 & 0 & ... & & .... & .... & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $N_{u,v}N_{v,w}=N_{u,w}$ □

Proposition 7. *Une simple propriété des matrices* $N_{u,v}=\begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{K})$

Si $M\in\mathcal{M}_{\mathrm{tu}}(\mathbb{K})$ $MN_{u,v}$ *est la matrice M, privée de ses u-v dernières colonnes,*
i) l'application $M\longmapsto MN_{u,v}$ *est une surjection de* $\mathcal{M}_{t,u}(\mathbb{K})$ *sur* $\mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{K})$
ii) l'application $M\longmapsto N_{u,v}M=\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une injection de* $\mathcal{M}_{v,t}(\mathbb{K})$ *dans* $\mathcal{M}_{u,t}(\mathbb{K})$

2. Le commutant d'une matrice (nilpotente) en blocs de Weyr

Soit W comme au-dessus, on désignera par C(W) le commutant de W (en anglais Centralizer).

Définition 8. *Matrice emboitée de partition* $(z_1,..,z_{t_1})$

Une matrice $M\in\mathcal{M}_n(K)$ *sera dite emboitée de partition* $(z_1,..,z_{t_1})$ *lorsque* $M=(M_{i,j})$ *où* $M_{i,j}\in\mathcal{M}_{z_i,z_j}(K)$ *et* $\forall(i,j)$ $i>j \Longrightarrow M_{i,j}=0$, $i\leqslant j\Longrightarrow M_{i,j}=\begin{pmatrix} M_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Théorème 9. *Le commutant de W*

Soit une matrice $A=(A_{i,j})$, AW=WA si et seulement si
$\forall(i,j)$,
1. i>j $\Longrightarrow A_{i,j}=0$
2. si $i\leqslant j$ $A_{i,j}=\begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et donc
1. le commutant de W est simultanément trigonalisable (par blocs)
2. les éléments du commutant sont les matrices emboitées de partition $(z_1,..,z_{t_1})$

Démonstration.
Soit $A=(A_{i,j})$ découpée en blocs comme W.
$AW=WA \Longleftrightarrow \forall(i,j) A_{i,j}W_{j,j+1}=W_{i,i+1}A_{i+1,j+1}$
1ère étape:
soit $j<t_1$, $0=W_{j,j+1}A_{j+1,1}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_{j+1,1}=0$, c'est à dire $\forall j+1>1$, $A_{j+1,1}=0$
soit $1<j<t_1$ $A_{j,1}, W_{1,2}=W_{j,j+1}A_{j+1,2}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,2}=0$, c'est à dire $\forall j+1>2$, $A_{j+1,2}=0$ et ainsi de suite, ce qui entraîne que A est triangulaire supérieure par blocs.

2 ème étape: la diagonale de blocs:
soit $j<t_1$ $A_{j,j}W_{j,j+1}=W_{j,j+1}A_{j+1,j+1}$.
si $z_j=z_{j+1}$ $W_{j,j+1}=I_{z_j}$ et donc $A_{j,j}=A_{j+1,j+1}$
si $z_j>z_{j+1}$ et si on pose $A_{j,j}=\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$ alors $A_{j,j}W_{j,j+1}=\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$ et $W_{j,j+1}A_{j+1,j+1}=\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,j+1}=\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $A_{j,j}=\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.
D'où la diagonale de blocs principale de la matrice A: une chaîne de matrices emboitées.

3ème étape: au-dessus de la diagonale de blocs soit j<k<t_1 $A_{j,k}W_{k,k+1}=W_{j,j+1}A_{j+1,k+1}$, qui conduit à un résultat analogue $A_{j,k}=\begin{pmatrix} A_{j+1,k+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.

On en déduit que ${}^tW_{i,i+1}A_{ij}W_{j,j+1}=A_{i+1,j+1}$. □

Remarque 10.

Comme toute matrice (dans le cas d'un corps algèbriquement clos) est semblable à une somme directe de matrices de Jordan, donc ausssi de matrices de Weyr, la trigonalisabilité (par blocs) sera vraie pour le commutant d'une matrice quelconque à coefficients dans un tel corps.

Il est surprenant que cette propriété soit si peu explicitée. [3],[4].

Définition 11. *Réduction d'ordre k d'une matrice de C(W)*

Soit une matrice $M=(M_{i,j})$ de C(W) on désignera sous le nom de réduite d'ordre k la matrice $M_k=(M_{i,j})_{i\geqslant k,j\geqslant k}$.

.

Proposition 12. *Expression algébrique de la réduction*

Soit une matrice $M=(M_{i,j})$ de C(W), ${}^tW^kMW^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{k+1} \end{pmatrix}$

Démonstration.

Il suffit d'établir le résultat pour k=1, ce qui se fait en appliquant la relation ${}^tW_{i,i+1}A_{ij}W_{j,j+1}=A_{i+1,j+1}$. □

3. Des matrices de type « fractal »

Les propriétés des matrices du commutant de W doivent se lire dans la forme de celles-ci, c'est à dire leur aspect « fractal ».

Désormais la matrice W est fixée et nous employerons le terme de matrice emboitée pour désigner les éléments de C(W), sans repréciser la partition associée.

3.1. Aspect Algébrique.

Définition 13. *lignes et colonnes, primaires et secondaires*

Soit une matrice emboitée $M=(M_{i,j})_{(i,j)\in\{1,..,t_1\}^2}$ pour chaque $j\leqslant t_1$ on note $M_{j,j} = \begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j} \end{pmatrix}$, avec $M_{t_1+1,t_1+1}=0$.

On appellera primaires les lignes et les colonnes de M qui apparaissent dans les matrices $N_{j,j}$, c'est a dire celles numérotées $\sum_{k=1...i} z_k - z_{i+1} + 1$ jusqu'à $\sum_{k=1...i} z_k$, les autres seront appelées secondaires.

Exemple 14.

les lignes primaires $\begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & iiii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, ici lignes 4,6,7 et 8

les colonnes primaires $\begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & iiii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, ici colonnes 4,6,7 et 8

Proposition 15. *Soit une matrice emboitée* $M=(M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,..,t_1\}^2}$ *pour chaque* $j\leqslant t_1$ *on note* $M_{\mathrm{jj}}=\begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j}\end{pmatrix}$ *, avec* $M_{t_1+1,t_1+1}=0$*, on désigne par* ρ_j *le polynome minimal de* N_{jj} *et* $\mu_q=\rho_q....\rho_{t_1-1}\rho_{t_1}$ *et* $\mu=\mu_1$

Dans la matrice $\mu(M)$ *les blocs* $\mu(M_{j,j})$ *sont nuls, de même que les lignes primaires toutes entières sont nulles.*

On remarquera que le degré de μ *est égal à la somme des tailles des* $N_{j,j}$*, c'est à dire la taille de* M_{11}*: p.*

Démonstration. *la partie concernant les blocs de la diagonale est immédiate.*

le reste se démontre par récurrence à partir de la remarque suivante:

Pour toute matrice emboitée

lorsque sur une diagonale de blocs le bloc supérieur est de taille (u,v) et le bloc inférieur est de taille (u',v'), si v>v' les u-u' dernières coordonnées des v' premières colonnes sont nulles; il s'agit donc des éléments des colonnes secondaires dans les lignes primaires: d'où, dans $\rho_i(M)$*, qui est une matrice emboitée,* **les lignes primaires** *numérotées* $\sum_{k=1...i} z_k - z_{i+1}+1$*, ...,* $\sum_{k=1...i} z_k$ *(c'est à dire celles qui contiennent le bloc* $\rho_i(N_{\mathrm{ii}})=0$*)* **contiennent des zéros dans les colonnes secondaires***, elles ont donc l'allure suivante* $(\boxed{0\ \dots\ 0}\ \rho_i(N_{\mathrm{ii}})=0\ \boxed{0} * \boxed{0} * \boxed{....} * \boxed{0})$*, où la partie mauve est nulle parce que la matrice est triangulaire supérieure, et dans la partie verte les zéros corespondent à notre remarque.*

et, si nous supposons que dans $\rho_{i+1}(M)....\rho_{t_1}(M)$ *les colonnes ont l'allure suivante* $\begin{pmatrix} * \\ .... \\ ... \\ * \\ *_{\mathrm{ij}} \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ ... \\ ... \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*,*

c'est à dire **les lignes primaires** *de numéros supérieurs ou égaux à* $\sum_{k=1...i} z_k+1$ **sont nulles** *(la partie bleue), ce qui traduit l'hypothèse de récurrence, on voit clairement qu'après le produit* $\rho_i(M)\rho_{i+1}(M)....\rho_{t_1}(M)$*les lignes primaires numérotées* $\sum_{k=1...i} z_k - z_{i+1}+1$*, ...,* $\sum_{k=1...i} z_k$ *sont nulles.*

Il suffit, pour initialiser, de traiter le cas de $\rho_{t_1}(M_{t_1,t_1})$ *qui est immédiat.* □

Exemple 16.

```
(%i5) m:matrix([1,9,8,8,13,4,5],[0,2,8,8,3,4,5],[0,0,8,8,0,40,51],[0,0,7,8,0,4,
5],[0,0,0,0,1,9,13],[0,0,0,0,0,2,3],[0,0,0,0,0,0,1]);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i6) m-ident(7);
```

(%o6) $$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) (m-ident(7)).(m-2*ident(7));
```

$$\text{(\%o7)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 176 & 184 & 14 & 505 & 669 \\ 0 & 0 & 112 & 120 & 0 & 383 & 499 \\ 0 & 0 & 98 & 104 & 0 & 312 & 466 \\ 0 & 0 & 91 & 98 & 0 & 308 & 399 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i8) (m-ident(7)).(m-2*ident(7)).(m.m-16*m+8*ident(7));
```

$$\text{(\%o8)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -98 & -1242 & 236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i9)
```

3.2. Aspect « graphique » (ou combinatoire).

Nous allons considerer les matrices emboitees comme des elements de $\mathbb{K}^{n^2}$ détailler les propriétés des blocs de la première ligne d'une matrice emboitée.

Exemple 17. $A=\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & \mathrm{aaaa} & b & \mathrm{bb} & \mathrm{bbb} & i \\ 0 & c & \mathrm{cc} & \mathrm{ccc} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & \mathrm{ii} \\ 0 & d & \mathrm{dd} & \mathrm{ddd} & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} & \mathrm{iii} \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & \mathrm{hh} & \mathrm{iiii} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \mathrm{dd} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 & a14 & a15 & b11 & b12 & b13 & b14 & c11 & c12 & d11 \\ 0 & a22 & a23 & a24 & a25 & b21 & b22 & b23 & b24 & c21 & c22 & d21 \\ 0 & 0 & a33 & a34 & a35 & 0 & b32 & b33 & b34 & c31 & c32 & d31 \\ 0 & 0 & a43 & a44 & a45 & 0 & b42 & b43 & b44 & c41 & c42 & d41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a55 & 0 & 0 & b54 & b55 & 0 & c52 & d51 \\ & & & & & a11 & a12 & a13 & a14 & b11 & b12 & c11 \\ & & & & & 0 & a22 & a23 & a24 & b21 & b22 & c21 \\ & & & & & 0 & 0 & a33 & a34 & 0 & b32 & c31 \\ & & & & & 0 & 0 & a43 & a44 & 0 & b42 & c41 \\ & & & & & & & & & a11 & a12 & b11 \\ & & & & & & & & & 0 & a22 & b21 \\ & & & & & & & & & & & a11 \end{pmatrix}$$

Définition 18. *Cases admissibles, Matrices génériques*

Un couple (u,v) $\in$ [1,n]$\times[1,n]$ *sera une case admissible s'il existe une matrice* $M\in C(W)$ *telle que* M[u,v]$\neq 0$.

Une matrice emboitée M *sera dite générique si quelle que soit la case admissible (u,v) il existe* $M'\in\mathbb{K}[M,W]$ *telle que* M'[u,v]$\neq 0$.

Il est immédiat que l'ensemble Ω *des matrices génériques est un ouvert dense de C(W).*

Définition 19. *Cases-test, application* φ

On appellera cases-test les cases apparaissant dans le bloc $M_{1,1}$ *et dans les lignes primaires des matrices emboitées et* φ *l'application linéaire qui associe à toute matrice emboitée la liste (suivant une convention arbitraire) des termes apparaissant dans les lignes primaires et* M_{11}.

Lemme 20.

Soit une famille finie (non nulle) de scalaires $m=(m_{\mathrm{st}})$ *et l'expression* $\Delta(m)=\sum m_{\mathrm{st}}X^sW^t$ *l'ensemble* $V(\Delta(m))=\{U \in C(W),\ \sum m_{\mathrm{st}}U^sW^t \in \mathrm{Ker}(\varphi)\}$ *est, s'il est non vide, un sous-ensemble algébrique de* $C(W)$.

Dans ce cas $\Omega \cap V(\Delta(m))$ est dense dans $V(\Delta(m))$.

Remarque 21.

Une matrice emboitée A est déterminée par sa première ligne (de blocs): A_{11}, ..., A_{1t_1} (que nous appellerons « bord directeur » en référence à la dénomination « leading edge » dans le [3]); mais, attention, l'exemple ci-dessus met en évidence le fait que tout « bord directeur » ne définit pas une matrice emboitée, il faut respecter la place des zéros.

Dans le cas d'une matrice emboitée chaque bloc $\mathrm{A}_{1,j}$ contient des copies des blocs $\mathrm{A}_{i,j+i-1}$

$$\begin{pmatrix} A_{13} & & \\ & A_{24} & \\ & & A_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & d & e & f & g \\ b & \mathrm{bb} & \mathrm{dd} & \mathrm{ee} & \mathrm{ff} & \mathrm{gg} \\ c & \mathrm{cc} & \mathrm{ddd} & \mathrm{eee} & \mathrm{fff} & \mathrm{ggg} \\ 0 & 0 & \mathrm{dddd} & \mathrm{eeee} & \mathrm{ffff} & \mathrm{gggg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{fffff} & \mathrm{ggggg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{ffffff} & \mathrm{gggggg} \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & d & e \\ b & \mathrm{bb} & \mathrm{dd} & \mathrm{ee} \\ c & \mathrm{cc} & \mathrm{ddd} & \mathrm{eee} \\ 0 & 0 & \mathrm{dddd} & \mathrm{eeee} \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} \\ b & \mathrm{bb} \\ c & \mathrm{cc} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Proposition 22.

Quelle que soit la matrice emboitée A $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$*=$W\mathbb{K}[A, W]$.*

Démonstration.

Il est immédiat que $W\mathbb{K}[A, W] \subset \mathrm{Ker}(\varphi_A)$; il suffit donc maintenant de comparer les codimensions de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[A, W]$.

Soit d'abord une matrice emboitée générique A.

1) M appartient à Ker(φ) si seulement si $M_{1,1}$=0 et si ses termes apparaissant dans les cases-tests sont nuls.

Ce qui represente les contraintes suivantes:

i) dans le bloc $M_{1,1}$ tous les termes (sauf ceux qui sont nuls par définition): $z_1^2 - \{(z_1 - z_2)z_2 + ... + (z_{t_1-1} - z_{t_1})z_{t_1}\}$

ii) dans chaque ligne de blocs (hors les blocs diagonaux) tous les termes apparaissant dans des cases relevant à la fois d'une ligne primaire et d'une colonne primaire : (z_i-z_{i+1})$\{(z_{i+1} - z_{i+2}) + . + (z_{t_1-1} - z_{t_1}) + z_{t_1} - z_{t_1+1}\} = (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$ termes à annuler

Ce qui représente $\sum_{i=1...t_1}$ $(z_i - z_{i+1})z_{i+1}$ conditions.

D'où au total ${z_1}^2$ conditions linéaires indépendantes

2)

*Considérons l'endomorphisme ψ de $\mathbb{K}[A, W]$ défini par $M \longmapsto$*MW*, de bord directeur (0,$M_{1,1}W_{1,2}$, ..., $M_{1,t_1-1}W_{t_1-1,t_1}$); les éléments du noyau sont caractérisés par la propriété suivante: dans chaque M_{1j} les z_{j+1} premières colonnes sont nulles*

Par suite la dimension du noyau de ψ est z_1(z_1-z_2+z_2-z_3+..+z_{t_1}-z_{t_1+1})=z_1^2, ce qui constitue la codimension de l'image, c'est à dire de $W\mathbb{K}[A, W]$.

.

Par suite les sous-espaces Ker(φ)$\cap\mathbb{K}[A, W]$ et $W\mathbb{K}[A, W]$, liés par une inclusion et de même codimension, sont égaux, ce qui signifie que Ker(φ)$\cap\mathbb{K}[A, W] = W\mathbb{K}[A, W]$.

Soit alors une matrice emboitée quelconque B *et M=$\sum m_{\mathrm{st}} B^s W^t \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.*

Comme $\Omega \cap V(\Delta(m))$ *est dense dans* $V(\Delta(m))$ *il existe une suite de matrices* (A_k) *à valeurs dans* $\Omega \cap V(\Delta(m))$ *qui tend vers* B *telles que* $\forall k$, $\varphi(\sum m_{\mathrm{st}} A_k^s W^t)=0$, *alors, d'après le cas générique* $\forall k, \exists (a_{\mathrm{ij}(k)}, k_i, n_j), \sum m_{\mathrm{st}} A_k^s W^t = W \sum a_{\mathrm{ij}(k)} A_k^{k_i} W^{n_j}$.

Le membre de gauche tend vers $\sum m_{\mathrm{st}} B^s W^t$, *par suite le membre de droite converge aussi, vers une matrice appartenant à* $W\mathbb{K}[A, W]$; *ce qui établit dans le cas général l'égalité* $Ker(\varphi) \cap \mathbb{K}[A, W] = W\mathbb{K}[A, W]$.

□

Exemple 23.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & d & e & f & g \\ b & \mathrm{bb} & \mathrm{dd} & \mathrm{ee} & \mathrm{ff} & \mathrm{gg} \\ c & \mathrm{cc} & \mathrm{ddd} & \mathrm{eee} & \mathrm{fff} & \mathrm{ggg} \\ 0 & 0 & \mathrm{dddd} & \mathrm{eeee} & \mathrm{ffff} & \mathrm{gggg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{fffff} & \mathrm{ggggg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{ffffff} & \mathrm{gggggg} \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & d & e \\ b & \mathrm{bb} & \mathrm{dd} & \mathrm{ee} \\ c & \mathrm{cc} & \mathrm{ddd} & \mathrm{eee} \\ 0 & 0 & \mathrm{dddd} & \mathrm{eeee} \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} \\ b & \mathrm{bb} \\ c & \mathrm{cc} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & d & e & f & g \\ b & \mathrm{bb} & \mathrm{dd} & \mathrm{ee} & \mathrm{ff} & \mathrm{gg} \\ c & \mathrm{cc} & \mathrm{ddd} & \mathrm{eee} & \mathrm{fff} & \mathrm{ggg} \\ 0 & 0 & \mathrm{dddd} & \mathrm{eeee} & \mathrm{ffff} & \mathrm{gggg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{fffff} & \mathrm{ggggg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{ffffff} & \mathrm{gggggg} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & l & p & q \\ \mathrm{kk} & \mathrm{ll} & \mathrm{pp} & \mathrm{qq} \\ \mathrm{kkk} & \mathrm{lll} & \mathrm{ppp} & \mathrm{qqq} \\ \mathrm{kkkkk} & \mathrm{llll} & \mathrm{pppp} & \mathrm{qqqq} \\ 0 & 0 & \mathrm{ppppp} & \mathrm{qqqqq} \\ 0 & 0 & \mathrm{pppppp} & \mathrm{qqqqqq} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} r & s \\ \mathrm{rr} & \mathrm{ss} \\ \mathrm{rrr} & \mathrm{sss} \\ \mathrm{rrrr} & \mathrm{ssss} \\ \mathrm{rrrrr} & \mathrm{sssss} \\ \mathrm{rrrrrr} & \mathrm{ssssss} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & d & e \\ b & \mathrm{bb} & \mathrm{dd} & \mathrm{ee} \\ c & \mathrm{cc} & \mathrm{ddd} & \mathrm{eee} \\ 0 & 0 & \mathrm{dddd} & \mathrm{eeee} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} k & l \\ \mathrm{kk} & \mathrm{ll} \\ \mathrm{kkk} & \mathrm{lll} \\ \mathrm{kkkk} & \mathrm{llll} \end{pmatrix} \\ & & \begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} \\ b & \mathrm{bb} \\ c & \mathrm{cc} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

```
Maxima 5.37.2 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1)
```

Théorème 24.

Soit une matrice emboitée A, *il existe un polynome* $P(X)$ *non nul et de degré inférieur ou égal à* $z_1{=}p$ *et une matrice* $B{\in}\mathbb{K}[A, W]$ *tels que* $P(A){=}WB$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer les propositions 15 et 22: μ(A) appartient à WC(W)$\cap\mathbb{K}[A, W]$=W$\mathbb{K}[A, W]$

Comme W$\mathbb{K}[A, W]$ est un idéal, il en est de même pour $\{P \in \mathbb{K}[X], P(A) \in W\mathbb{K}[A, W]\}$, nous désignerons par Δ un générateur de cet idéal; il est un multiple du polynome minimal de A_{11} puisqu'il en est annulateur et un diviseur de son polynome caractéristique (Cayley-Hamilton) puisque chacun des polynomes minimaux ρ_i divise son polynome caractéristique. il est de degré inférieur ou égal à z_1=p; on l'appellera polynome directeur de la matrice A. □

Remarque 25. Polynome directeur de A et polynome minimal de A_{11}.

Le polynome directeur de A n'est pas forcément égal au polynome minimal de A_{11} comme le prouve l'exemple suivant.

D'autre part la démonstration précédente montre que lorsque A_{11} est cyclique ces deux polynomes sont égaux.

(nous appellerons « cyclique » toute matrice dont le polynome minimal est égal au polynome caractéristique; en anglais « non derogatory »)

Exemple 26.

$$A=\begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Le polynome minimal de A_{11} est $(X-1)^2$, mais le polynome directeur de A est $(X-1)^3$; comme on peut le constater dans la session suivante de Maxima:

(%i9) $\begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$;

(%o9) $\begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

(%i10) `m:%;`

(%o10) $\begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

(%i11) `(m-ident(7));`

(%o11) $\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

(%i12) `(m-ident(7)).(m-ident(7));`

(%o12) $$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&2&4\\ 0&0&0&0&0&2&4\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

```
(%i13) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));
```

(%o13) $$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&2\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

(%i14)

4. La dimension de l'algèbre engendrée par deux matrices qui commutent

Définition 27. *Matrice emboitée admissible*

Une matrice emboitée A sera dite admissible lorsque son polynome directeur est de degré z_1.

Proposition 28.

A est admissible si et seulement ses réduites le sont.

Démonstration.

S'il existe k tel que le polynome directeur de la matrice A_k est de degré strictement inférieur à z_k la démonstration par récurrence de la proposition 15 montre que le polynome directeur de A est de degré strictement inférieur à z_1=p.

La réciproque est évidente. □

Définition 29. *Liste des polynomes directeurs d'une matrice emboitée*

Soit A=(A_{ij}) et pour tout $k\in\{1, \ldots, t_1\}$ A_k=$(A_{\mathrm{ij}})_{i>k,j>k}$, on désignera par $(\Delta_1, \ldots, \Delta_{t_1})$ les polynomes directeurs des réduites A_k et par d_k leur degrés respectifs.

Lemme 30. *Avec les notations ci-dessus*

$AW^{k-1}\in W^kC(W) \Longrightarrow A_k\in W_kC\,(W_k)$

Démonstration.

$AW^{k-1}=\mathrm{ZW}^k \Longrightarrow ({}^tW)^{k-1}AW^{k-1}=({}^tW)^{k-1}ZW^{k-1}\,W \Longleftrightarrow A_k=Z_kW_k$ □

Théorème 31.

Soient $(A, W)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, où W est une matrice nilpotente sous forme de Weyr et AW=WA.

Alors dim($K[A, W]$)$\leqslant\sum_{k=1\ldots.t_1} d_k$.

Le Théorème améliore la majoration établie historiquement par Gerstenhaber ([2]), dans l'esprit de la Géométrie Algébrique, et qui reçu par la suite de nombreuses démonstrations soit dans cet esprit soit plus élémentaires et longues...(dont [1] etc..).

Démonstration.

La démonstration se fera par récurrence sur t_1.

0) Si t_1=1 le résultat est immédiat: A=$A_{1,1}$ et W=I; il suffit d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à t_1-1.

On pose A=$\begin{pmatrix} A_{1,1} & C \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix}$, où $A_{11} \in \mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et W=$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{W_{1,2}}=(W_{1,2}, 0, ..., 0)$ et $W_2=\begin{pmatrix} 0 & W_{2,3} & 0 & .... & 0 \\ ... & 0 & W_{3,4} & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 & & \\ ... & .... & ... & ... & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ est aussi une matrice de Weyr de partition associée (z_2,..,z_{t_1}), $A_2W_2=W_2A_2$, d'où $\dim(\mathbb{K}[A_2,W_2]) \leqslant \sum_{k=2....t_1} d_k$ par application de l'hypothèse de récurrence.

2) D'apres la proposition 20 et les suivantes $\mathbb{K}[A,W]=\mathrm{Vect}(I,A,..,A^{d_1-1}) \oplus W\mathbb{K}[A,W]$.

3) Remarquons que pour k⩾0 $W^{k+1}A^q=\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{1,1}{}^q & * \\ 0 & A_2^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k A_2^q \end{pmatrix}$.

4) Donc la dimension de $\mathrm{Vect}(W^{k+1}A^q,\ q \geqslant 0,\ k \geqslant 0)$ est inférieure ou égale à celle de $\mathrm{Vect}(W_2^k A_2^q, q \geqslant 0, k \geqslant 0)$, qui est égale à celle de $\mathbb{K}[A_2,W_2]$.

D'où la dimension de $\mathbb{K}[A,W]$est inférieure ou égale à $\leqslant \sum_{k=1....t_1} d_k \leqslant n.$

D'où la dimension de l'Algèbre $\mathbb{K}[A,\ W]$ est inférieure ou égale à n; le résultat s'étend sans difficulté, dans le cas algèbriquement clos, à toute Algèbre commutative engendrée par 2 matrices. Ce qui constitue le Théorème de Gerstenhaber; on comparera avec [3] qui reprend le schéma de la démonstration du [1] (mais) dans le cadre des matrices de Weyr.

Par ailleurs l'inégalite $\dim(\mathbb{K}[A,\ W]) \leqslant \sum_{k=1....t_1} d_k$ est une amélioration conséquente du même Théorème; nous y reviendrons plus loin. □

Nous allons maintenant établir une minoration de la dimension de l'Algèbre $\mathbb{K}[A,W]$

Proposition 32.

La famille (I,A,...,A^{d_1-1}, W, WA, ..., WA^{d_2-1}, ..., $\mathbb{W}$, WA, ..., $WA^{d_{t_1}-1}$) est libre

Démonstration.

Supposons $\sum_{1 \leqslant j \leqslant t_p, 0 \leqslant p_j \leqslant d_j-1} x_{\mathrm{j}p_j} W^{j-1}A^{p_j}=0$.

On en déduit: $\sum_{0 \leqslant p_1 \leqslant d_1-1} x_{1,\mathrm{j}p_1} A^{p_1} \in \mathrm{WC}(W)$, d'où les $x_{1,\mathrm{j}p_1}$ sont nuls.

d'ou il vient $\sum_{0 \leqslant p_2 \leqslant d_2-1} x_{2,\mathrm{j}p_2} \mathrm{W}A^{p_2} \in W^2C(W)$ qui entraine, d'après le lemme 30, $\sum_{0 \leqslant p_2 \leqslant d_2-1} x_{2,\mathrm{j}p_2} A_2^{p_2} \in \mathrm{W_2C(W_2)}$, d'ou les $x_{2,\mathrm{j}p_2}$ sont nuls.

etc...

Ce qui établit le résultat. □

D'où, en fin de compte:

Théorème 33.

La dimension de $\mathbb{K}[A,\ W]$ *est égale* à $\sum_{k=1....t_1} d_k$ *et une base en est (I,A,...,*A^{d_1-1}*,* W*, WA, ..., WA^{d_2-1}, ..., $\mathbb{W}$, WA, ..., $WA^{d_{t_1}-1}$)*

Ce résultat est original; il améliore la majoration du Théorème de Gerstenhaber, il étend le Théorème de Laffey établi dans le seul cas « homogène » (c'est à dire lorsque les indices z_1,z_2,... sont tous égaux). La base proposee est a comparer avec [1].

Théorème 34. *Condition nécessaire et suffisante pour que la dimension de K[A, W] soit égale* à *n.*

L'Algèbre K[A, W] est de dimension maximale si et seulement si A est admissible.

Démonstration.

La condition est nécessaire comme l'établit le Théorème 31; la proposition 28 établit qu'elle est suffisante .

L'exemple 26 montre que ceci n'est pas équivalent à « $A_{1,1}$ cyclique »

□

Remarque 35.
Ce résultat généralise la condition nécessaire et suffisante établie seulement dans le cas « homogène », c'est à dire lorsque les blocs $A_{j,j}$ sont tous de même taille (et donc égaux) [3],[5]; dans ces hypothèses la condition se résume à « $A_{1,1}$ cyclique », on voit que la situation est plus complexe dans le cas général.

Exemple 36.
On trouvera ici un exemple de matrice A, telle que $A_{1,1}$ n'est pas cyclique mais K[A,W] est de dimension n:

```
(%i3) m:matrix([1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,0,1,1],[0,0,0,1]);
(%i4) m.m;
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i5) w:matrix([0,0,1,0],[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,0,0]);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i6) m.w;
```

(%o6) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) a*ident(4)+b*m+c*m.m+d*w;
```

(%o7) $$\begin{pmatrix} c+b+a & 0 & d+2\,c+b & 3\,c+b \\ 0 & c+b+a & 0 & 2\,c+b \\ 0 & 0 & c+b+a & d+2\,c+b \\ 0 & 0 & 0 & c+b+a \end{pmatrix}$$

```
(%i8) linsolve([a+b+c,b+2*c+d,b+2*c,b+3*c],[a,b,c,d]);
```

(%o8) $[a=0, b=0, c=0, d=0]$

```
(%i9)
```

Exemple 37.
Ici le degré du polynome minimal de A_{11} est 2; les degrés des polynomes directeurs sont $d_1=3, d_2=2, d_1=1$ et la dimension de $\mathbb{K}[A,W]$ est 6=3+2+1.

```
(%i4) m:matrix([1,1,0,0,0,11,12],[0,1,0,0,0,21,25],[0,0,1,1,0,33,37],[0,0,0,1,0,
      51,54],[0,0,0,0,1,1,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,1]);
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i5) (m-ident(7));
```

(%o5)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i6) (m-ident(7)).(m-ident(7));
```

(%o6)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));
```

(%o7)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) w:matrix([0,0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0],
      [0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0]);
```

(%o9)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) a*ident(7)+b*m+c*m.m+d*w+e*m.w+f*m.m.w+g*w.w+h*m.w.w+i*m.m.w.w;
```

(%o10)
$$\begin{pmatrix} c+b+a & 2c+b & 0 & 0 & f+e+d & 2f+e+43c+11b & i+h+g+49c+12b \\ 0 & c+b+a & 0 & 0 & 0 & f+e+d+42c+21b & 50c+25b \\ 0 & 0 & c+b+a & 2c+b & 0 & 117c+33b & 128c+37b \\ 0 & 0 & 0 & c+b+a & 0 & 102c+51b & 108c+54b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+b+a & 2c+b & f+e+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+b+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+b+a \end{pmatrix}$$

```
(%i13) linsolve([a+b+c,2*c+b,f+e+d,2*f+e+43*c+11*b,i+h+g+49*c+12*b,117*c+33*b,
       128*c+37*b,102*c+51*b,108*c+54*b],[a,b,c,d,e,f,g,h,i]);
```

(%o13) $[a=0, b=0, c=0, d=\%r3, e=-2\%r3, f=\%r3, g=-\%r2-\%r1, h=\%r2, i=\%r1]$

(%i14)

La résolution annonce 3 degrés de liberté, donc le rang du système est 9-3=6; ce qui détermine la dimension de l'Algèbre étudiée.

5. Une base de $\mathbb{K}[A,W]$

La démonstration du Théorème 22 nous fournit une procédure pour la détermination d'une base de $\mathbb{K}[A,W]$

i) trouver d_1 L:[I,A,...,A$^{d_1-1}$]

ii) trouver d_2 L:L@[W$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_k \end{pmatrix}$, M_k base de $\mathbb{K}[A_1,W_1]$

6. L'ensemble des matrices emboitées admissibles (en chantier)

Il est immédiat que l'ensemble des matrices cycliques est un ouvert dense de l'ensemble C(W) des matrices emboitées.

Théorème 38. *L'ensemble des matrices emboitées admissibles est un ouvert dense de C(W)*

Démonstration.

Pour tout k∈{0, ..., $p-1$} nous désignons par A'$_k$ la matrice A^k, privée de ses lignes secondaires; A est admissible si et seulement si les matrices (I,A'$_1$, ...,A'$_{p-1}$) sont linéairement indépendantes; ce qui définit un ouvert.

La densité découle de celle de l'ensemble des matrices cycliques, qui sont, comme vu plus haut, admissibles. □

7. L'anneau C(W) (en chantier)

Question 39. *C(W) peut-il contenir une matrice de Weyr W' (autre que W) ?*

Exemple 40. W de partition (3,2,1) , C(W) contient W' de partition (2,2,1,1)

$W=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$, C(W)=$\left\{\begin{pmatrix} a&b&f&d&i&l\\ 0&c&g&e&j&m\\ 0&0&h&0&k&n\\ 0&0&0&a&b&d\\ 0&0&0&0&c&e\\ 0&0&0&0&0&a \end{pmatrix}\right\}$, W'=$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$, d'ou W∈$C(W')$.

Proposition 41.

Soient W et W' deux matrices de Weyr de même taille alors

i) $W \in C(W') \iff$ *W'∈$C(W)$.*

et si c'est le cas

ii) $\mathbb{K}[W,W'] \subset C(W) \cap C(W')$, *que l'on note ausssi* $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}(W,W')$.

iii) $\mathbb{K}[W,W'] = C(W) \cap C(W') \iff \dim(\mathbb{K}[W,W']) = n \iff \dim(C(W)\cap C(W')) = n$.

iv) W est W'-admissible si et seulement W' est W-admissible

Démonstration.

i) ii) immédiats

iii) voir [6].

iv) découle de la symétrie des résultats du iii). □

Exemple 42. (suite de l'exemple 41) W'=$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

```
Maxima 5.37.2 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

```
(%i23) wp:matrix([0,0,1,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,
0,0,1],[0,0,0,0,0,0]);
```

(%o23) $\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

```
(%i25) wp.wp;
```

(%o25) $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

```
(%i27)
```

d'ou $d_3(W')=1, d_2(W')=2, d_1(W')=3$; donc $\dim(\mathbb{K}[W,W'])=6$

```
(%i32)  w:matrix([0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1],[0,0,0,
0,0,0],[0,0,0,0,0,0]);
```

(%o32) $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

```
(%i27) n:a*ident(6)+b*w+c*w.w+d*wp+e*w.wp+f*w.w.wp+g*wp.wp+h*w.wp.wp+i*w.w.wp.wp;
```

(%o27) $\begin{pmatrix} a&0&d&b&g&c\\ 0&a&0&d&b&e\\ 0&0&a&0&d&g\\ 0&0&0&a&0&b\\ 0&0&0&0&a&d\\ 0&0&0&0&0&a \end{pmatrix}$

```
(%i35)
```

Une matrice générique de C(W) est de la forme $\begin{pmatrix} a&b&f&d&i&l\\ 0&c&g&e&j&p\\ 0&0&h&0&k&q\\ 0&0&0&a&b&d\\ 0&0&0&0&c&e\\ 0&0&0&0&0&a \end{pmatrix}$, elle appartiendra àe C(W') si et seulement si elle commute avec W':

```
(%i29) z:matrix([a,b,f,d,i,l],[0,c,g,e,j,p],[0,0,h,0,k,q],[0,0,0,a,b,d],[0,0,0,0,
c,e],[0,0,0,0,0,a]);
```

(%o29) $$\begin{pmatrix} a & b & f & d & i & l \\ 0 & c & g & e & j & p \\ 0 & 0 & h & 0 & k & q \\ 0 & 0 & 0 & a & b & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(%i31) `nn:z.wp-wp.z;`

(%o31) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a-h & b & f-k & i-q \\ 0 & 0 & 0 & c-a & g-b & j-d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h-c & k-e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i32)

(%i14)

(%i4)

D'où $\mathrm{C(W)} \cap C(W') = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & f & d & i & l \\ 0 & a & 0 & f & d & p \\ 0 & 0 & a & 0 & f & i \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}(I, W, W', W^2, W'^2, \mathbb{W}W') = \mathbb{K}[W, W']$.

Paris, Avril 2018

Bibliographie:

[1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, Linear Multilinear Algebra 27 (1990), 147-157 crossref

[2] M. Gerstenhaber, « *On dominance and varieties of commuting matrices* », *Ann. Math.*, vol. 73,1961, p. 324-348

[3] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.

[4] P. Teller, http://lalgebrisant.fr/images/MatricesCommutantes/LeCommutantesttrigonalisable.pdf

[5] T.J. Laffey, S.Lazarus, Two-generated Commutative Matrix Subalgebras, Linear Algebra and its Applications, 147, 1991, p249-273.

[6] M.G. Neubauer, D.J. Saltman, Two-Generated Commutative Subalgebras of $\mathcal{M}_n(F)$, Journal of Algebra, 164, pp.545-562, 1994.