

Au pays des matrices fractales(corrections)

PATRICK TELLER

RÉSUMÉ.

Les matrices de Weyr sont un substitut, récemment redécouvert ([3],[4]), aux matrices de Jordan; le commutant d'une matrice en blocs de Weyr est un ensemble de matrices qui possèdent une forme particulière, de type fractal.

L'étude des ensembles de matrices fractales permet d'établir directement des propriétés qui ont jusqu'à maintenant exigé, soit des arguments de Géométrie Algébrique, soit de longs artifices matriciels, comme les Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey sur la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par deux matrices. ([2],[5]).

Le premier paragraphe rappelle, pour le lecteur qui en ressentirait la nécessité, la forme de Jordan et introduit la forme de Weyr pour une matrice nilpotente.

Le deuxième décrit la structure triangulaire par blocs du commutant d'une matrice sous forme de Weyr, introduisant les matrices fractales (ou emboîtées).

La suite fait le pari que les propriétés relatives aux couples (voire triplets) de matrices commutantes peuvent se démontrer plus simplement à l'aide de l'observation des matrices fractales et d'Algèbre linéaire élémentaire.

Le troisième ouvre l'étude des propriétés des Algèbres de matrices fractales et établit des propriétés algébriques et « graphiques » qui sont exploitées dans les démonstrations élémentaires des Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey.

Il a été sérieusement remanié et corrigé.

Le quatrième contient les démonstrations élémentaires annoncées, le Théorème de Laffey est démontré dans le cas général et on trouve une expression effective de la dimension de l'Algèbre $\mathbb{K}[A,W]$, ce qui constitue un résultat original.

Les suivants sont des chantiers à explorer.

Dans ce qui suit \mathbb{K} désigne un corps algébriquement clos.

1. LA FORME DE JORDAN ET LA FORME DE WEYR

La forme de Jordan d'une matrice nilpotente est bien connue:

toute matrice nilpotente peut se mettre sous la forme $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J(t_2) & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & J(t_p) \end{pmatrix}$, où les indices forment une suite décroissante $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$ et pour chaque k

$$J(t_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{t_k}(\mathbb{K});$$
 on conviendra de poser $t_0=0$.

La suite (t_i) sera appelée partition canoniquement associée à Γ .

Proposition 1. *Un ordre sur la base canonique*

Soit la base canonique \mathcal{C} de \mathbb{K}^n dont on désignera les éléments (e_1, \dots, e_n) sous la forme $e_{i,k}$ de la manière suivante: $e_{i,k}$ représente $e_{t_0+\dots+t_{i-1}+k}$.

On dira que $e_{i,k} \leq e_{j,l}$ lorsque $k < l$ ou $k=l$ et $i \leq j$

Ce qui se traduit par une suite croissante $\mathcal{C}' = (e_{1,1}, e_{2,1}, \dots, \dots)$

Remarque 2. Il s'agit tout simplement d'un ordre lexicographique; on écrira $(i,j) < (k,l)$

Proposition 3. *Interprétation de la matrice Γ et construction de la matrice W*

On considère la matrice Γ décrite au-dessus et la base canonique (e_i) , l'action de Γ sur la base peut se lire comme suit:

$$\begin{array}{l} 0 \leftarrow e_{p,1} \leftarrow e_{p,2} \leftarrow \dots \leftarrow e_{p,t_p} \\ 0 \leftarrow e_{p-1,1} \leftarrow e_{p-1,2} \leftarrow \dots \leftarrow e_{p-1,t_{p-1}} \\ \dots \\ 0 \leftarrow e_{1,1} \leftarrow e_{1,2} \leftarrow \dots \leftarrow \dots \leftarrow e_{1,t_1} \end{array}$$

Tableau 1.

Posons $z_1=p, z_2=\text{card}(\{k, t_k \geq 2\}), z_3 = \text{card}(\{k, t_k \geq 3\}), \dots, z_{t_1}$ (on conviendra de poser $z_{t_1+1}=0$), la suite (z_u) est décroissante, elle sera désignée sous le nom de partition canoniquement associée à W .

Parcourir la base \mathcal{C}' dans l'ordre revient à parcourir le tableau, colonne après colonne du bas vers le haut et de la gauche vers la droite; la matrice Γ devient alors la matrice (par blocs) $W=(W_{i,j})$ où le bloc $W_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i, z_j}(\mathbb{K})$. Le tableau implique que $\forall i \in \{1, \dots, t_p - 1\}$ $W_{i,i+1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_i+1} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i, z_{i+1}}(\mathbb{K})$$
 (attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et

si $j \neq i+1$ $W_{i,j}=0$.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & \dots & \dots 0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W_{t_1-1, t_1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
 est appelée la matrice de Weyr associée à cette partition.

Remarque 4. Cette présentation de la forme de Weyr reprend le chemin totalement empirique qui m'a fait la découvrir; on peut bien entendu définir cette forme de manière indépendante de la forme de Jordan.

On lira dans [3] l'histoire de la redécouverte de cette forme matricielle longtemps oubliée et une description de cette forme, indépendante des matrices de Jordan.

Exemple 5.

$$\text{Soit } \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(4) & 0 \\ 0 & J(3) \\ 0 & \dots & J(1) \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 6. *Les puissances de W*

Soit pour tout $u \geq v$ $N_{u,v} = \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{u,v}(K)$.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & N_{z_1, z_2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & N_{z_2, z_3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & N_{z_{t_1-1}, z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_{z_1, z_3} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & N_{z_2, z_4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_{z_{t_1-2}, z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

...

$$W^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & N_{z_1, z_1+k} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & N_{z_2, z_2+k} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_{z_{t_1-k}, z_{t_1}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Il suffit de remarquer que $N_{u,v}N_{v,w} = N_{u,w}$

□

Proposition 7. *Une simple propriété des matrices $N_{u,v} = \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{K})$*

Si $M \in \mathcal{M}_{t,u}(\mathbb{K})$ $MN_{u,v}$ est la matrice M , privée de ses $u-v$ dernières colonnes,

i) l'application $M \mapsto MN_{u,v}$ est une surjection de $\mathcal{M}_{t,u}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{K})$

ii) l'application $M \mapsto N_{u,v}M = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ est une injection de $\mathcal{M}_{v,t}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{u,t}(\mathbb{K})$

2. LE COMMUTANT D'UNE MATRICE (NILPOTENTE) EN BLOCS DE WEYR

Soit W comme au-dessus, on désignera par $C(W)$ le commutant de W (en anglais Centralizer).

Définition 8. *Matrice emboîtée de partition (z_1, \dots, z_{t_1})*

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ sera dite emboîtée de partition (z_1, \dots, z_{t_1}) lorsque $M = (M_{i,j})$ où $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i, z_j}(K)$ et $\forall (i, j) \ i > j \implies M_{i,j} = 0, \ i \leq j \implies M_{i,j} = \begin{pmatrix} M_{i+1, j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Théorème 9. *Le commutant de W*

Soit une matrice $A = (A_{i,j})$, $AW = WA$ si et seulement si

$\forall (i, j)$,

1. $i > j \implies A_{i,j} = 0$

2. si $i \leq j \ A_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i+1, j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et donc

1. le commutant de W est simultanément trigonalisable (par blocs)

2. les éléments du commutant sont les matrices emboîtées de partition (z_1, \dots, z_{t_1})

Démonstration.

Soit $A = (A_{i,j})$ découpée en blocs comme W .

$AW = WA \iff \forall (i, j) \ A_{i,j} W_{j, j+1} = W_{i, i+1} A_{i+1, j+1}$

1ère étape:

soit $j < t_1, \ 0 = W_{j, j+1} A_{j+1, 1}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} A_{j+1, 1} = 0$, c'est à dire $\forall j+1 > 1, \ A_{j+1, 1} = 0$

soit $1 < j < t_1 \quad A_{j, 1}, W_{1, 2} = W_{j, j+1} A_{j+1, 2}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} A_{j+1, 2} = 0$, c'est à dire $\forall j+1 > 2,$

$A_{j+1, 2} = 0$ et ainsi de suite, ce qui entraîne que A est triangulaire supérieure par blocs.

2 ème étape: la diagonale de blocs:

soit $j < t_1 \ A_{j, j} W_{j, j+1} = W_{j, j+1} A_{j+1, j+1}$.

si $z_j = z_{j+1} \ W_{j, j+1} = I_{z_j}$ et donc $A_{j, j} = A_{j+1, j+1}$

si $z_j > z_{j+1}$ et si on pose $A_{j, j} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$ alors $A_{j, j} W_{j, j+1} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$ et

$W_{j, j+1} A_{j+1, j+1} = \begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} A_{j+1, j+1} = \begin{pmatrix} A_{j+1, j+1} \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $A_{j, j} = \begin{pmatrix} A_{j+1, j+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.

D'où la diagonale de blocs principale de la matrice A .

3ème étape: au-dessus de la diagonale de blocs

soit $j < k < t_1 \ A_{j, k} W_{k, k+1} = W_{j, j+1} A_{j+1, k+1}$, qui conduit à un résultat analogue

$A_{j, k} = \begin{pmatrix} A_{j+1, k+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.

On en déduit que ${}^t W_{i, i+1} A_{ij} W_{j, j+1} = A_{i+1, j+1}$. □

Remarque 10.

Comme toute matrice (dans le cas d'un corps algébriquement clos) est semblable à une somme directe de matrices de Jordan, donc aussi de matrices de Weyr, la trigonalisabilité (par blocs) sera vraie pour le commutant d'une matrice quelconque à coefficients dans un tel corps.

Il est surprenant que cette propriété soit si peu explicitée. [3],[4].

Définition 11. *Réduction d'ordre k d'une matrice de $C(W)$*

Soit une matrice $M = (M_{i,j})$ de $C(W)$ on désignera sous le nom de réduite d'ordre k la matrice $M_k = (M_{i,j})_{i \geq k, j \geq k}$.

Proposition 12. *Expression algébrique de la réduction*

Soit une matrice $M=(M_{i,j})$ de $C(W)$, ${}^tW^kMW^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{k+1} \end{pmatrix}$

Démonstration.

Il suffit d'établir le résultat pour $k=1$, ce qui se fait en appliquant la relation ${}^tW_{i,i+1}A_{ij}W_{j,j+1} = A_{i+1,j+1}$. \square

3. DES MATRICES DE TYPE « FRACTAL »

L'hypothèse est que les propriétés des matrices du commutant de W doivent se lire dans la forme de celles-ci, c'est à dire leur aspect « fractal ».

Désormais la matrice W est fixée et nous employerons le terme de matrice emboîtée pour désigner les éléments de $C(W)$, sans repréciser la partition associée.

3.1. Aspect Combinatoire.

Définition 13. *lignes et colonnes, primaires et secondaires*

Soit une matrice emboîtée $M=(M_{i,j})_{(i,j)\in\{1,..,t_1\}^2}$ pour chaque $j\leq t_1$ on note $M_{j,j} = \begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j} \end{pmatrix}$, avec $M_{t_1+1,t_1+1}=0$.

On appellera primaires les lignes et les colonnes de M qui apparaissent dans les matrices $N_{j,j}$, c'est à dire celles numérotées $\sum_{k=1\dots i} z_k - z_{i+1} + 1$ jusqu'à $\sum_{k=1\dots i} z_k$, les autres seront appelées secondaires.

Exemple 14.

$$\begin{array}{l} \text{les lignes primaires} \\ \text{les colonnes primaires} \end{array} \begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & iiiii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ ici lignes 4,6,7 et 8}$$

$$\begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & iiiii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ ici colonnes 4,6,7 et 8}$$

Définition 15. *Domaine admissible, Classes, Espace admissible, Origines et Extrémités*

Nous allons considérer les matrices emboîtées comme des éléments de \mathbb{K}^{n^2} , dont la structure est celle de matrices triangulaires par blocs, en rapport avec la partition associée à W .

On pourra repérer sur l'exemple suivant que les cases marquées d'un zéro sont nécessairement nulles, tandis que les cases colorées (de l'exemple) **peuvent** être de valeur non nulle (ou pas); on les appellera admissibles.

On appellera « domaine admissible » l'ensemble des cases admissibles (DA); si M est une matrice emboîtée ses termes non nuls se trouvent dans le domaine admissible.

On remarquera aussi que pour chaque matrice emboîtée certaines cases doivent porter la même valeur, ce qui définit une relation d'équivalence parmi les cases du domaine admissible (par exemple ligne1-colonne1 avec ligne 5-colonne5 et ligne9-colonne9 dans la première matrice de l'exemple ci-dessous); chaque classe contient une unique case dans le bord directeur (on l'appellera l'extrémité de la classe) et une unique case dans une colonne primaire (on l'appellera l'origine de la classe).

Les classes seront appelées « lacets ».

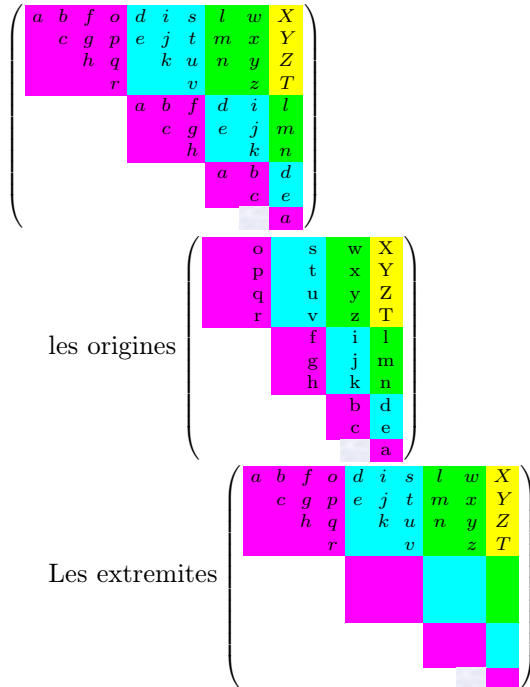
L'espace quotient de DA sera appelé « espace admissible », c'est un espace vectoriel dont les lacets constituent une base.

Tout espace vectoriel de matrices emboîtées, en particulier tout espace vectoriel $\mathbb{K}[A, W]$, est isomorphe à un sous-espace vectoriel de l'espace admissible.

Un sous-espace vectoriel de l'espace admissible sera dit plein lorsque la réunion des cases non nulles est égale au domaine admissible.

Exemple 16.

les cases correspondant à une même classe portent des lettres identiques



Remarque 17.

Une matrice emboîtée A est déterminée par les extrémités de ses lacets c'est à dire sa première ligne (de blocs): A_{11}, \dots, A_{1t_1} (que nous appellerons « bord directeur » en référence à la dénomination « leading edge » dans le [3]); elle est aussi déterminée par leurs origines.

3.2. Aspect Algébrique.

Théorème 18.

Soit une matrice emboîtée A, l'ensemble des polynomes $P(X)$ tels que $P(A) \in \text{WK}[A, W]$ est un idéal, non réduit à $\{0\}$; on appellera polynome réducteur le générateur unitaire de cet idéal.

Démonstration.

Il suffit de remarquer que $\text{WK}[A, W]$ est un idéal et que le polynome minimal de A convient; on en déduit donc que le polynome réducteur de A divise son polynome minimal.

Le polynome réducteur de la matrice A sera noté Δ_A . □

Définition 19. propriété M

On dira qu'une matrice $M \in \mathbb{K}[A, W]$ possède la propriété M lorsque ses blocs diagonaux M_{jj} sont nuls, de meme que toutes ses lignes primaires.

L'exemple suivant illustre le fait, immédiat, que toute matrice M de $\text{WK}[A, W]$ possède la propriété M.

(%i19) W:matrix([0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0])

$$(\%o19) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i23) N:matrix([a,b,d,u,f,g],[0,c,h,v,j,k],[0,0,1,0,q,r],[0,0,0,a,b,u],[0,0,0,0,c,v],[0,0,0,0,0,0],

$$(\%o23) \begin{pmatrix} a & b & d & u & f & g \\ 0 & c & h & v & j & k \\ 0 & 0 & l & 0 & q & r \\ 0 & 0 & 0 & a & b & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(%i24) N.W;

$$(\%o24) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ possède la propriété M mais n'appartient pas à}$$

$WK[A, W]$.

3.3. Une caractérisation de l'appartenance à l'idéal $WK[A, W]$.

3.3.1. Le cas facile: lorsque l'Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ est pleine .

Théorème 20.

Soit une matrice emboîtée A telle que l'Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ est pleine, une matrice M de $\mathbb{K}[A, W]$ appartient à l'idéal $WK[A, W]$ si et seulement si elle possède la propriété M .

Démonstration.

On sait déjà que $WK[A, W]$ est inclus dans l'espace vectoriel des matrices de $\mathbb{K}[A, W]$ qui possèdent la propriété M , il suffit donc de montrer qu'ils ont la même codimension dans $\mathbb{K}[A, W]$.

1) Soit $M \in \mathbb{K}[A, W]$ dénombrons les contraintes indépendantes à satisfaire pour posséder la propriété M :

i) dans le bloc $M_{1,1}$ il faut annuler tous les termes (sauf ceux qui sont nuls par définition): $z_1^2 - \{(z_1 - z_2)z_2 + \dots + (z_{t_1-1} - z_{t_1})z_{t_1}\}$

ii) dans chaque ligne de blocs (hors les blocs diagonaux dont les éléments sont déjà décomptés dans $M_{1,1}$) il faut annuler tous les termes apparaissant dans des cases relevant à la fois d'une ligne primaire et d'une colonne primaire : $(z_i - z_{i+1})\{(z_{i+1} - z_{i+2}) + \dots + (z_{t_1-1} - z_{t_1}) + z_{t_1} - z_{t_1+1}\} = (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$ termes à annuler

Ce qui représente $\sum_{i=1 \dots t_1} (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$ conditions.

D'où au total la codimension de l'espace vectoriel des matrices qui possèdent la propriété M est z_1^2 .

2)

Considérons ψ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[A, W]$ défini par $M \mapsto MW$, de bord directeur $(0, M_{1,1}W_{1,2}, \dots, M_{1,t_1-1}W_{t_1-1,t_1})$; les éléments du noyau sont caractérisés par la propriété suivante: dans chaque M_{1j} les z_{j+1} premières colonnes sont nulles; ce qui signifie que le noyau « correspond » aux $z_j - z_{j+1}$ dernières colonnes de chaque $M_{1,j}$.

Par suite la dimension du noyau de ψ est $z_1(z_1 - z_2 + z_2 - z_3 + \dots + z_{t_1} - z_{t_1+1}) = z_1^2$, ce qui constitue la codimension de l'image, c'est à dire de $WK[A, W]$.

Par suite l'espace des matrices de $\mathbb{K}[A, W]$ qui possèdent la propriété M est égal à l'idéal $WK[A, W]$. □

Ce qui nous conduit, dans le cas d'une Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ pleine, au résultat suivant qui nous fournit une piste pour le polynôme réducteur:

Proposition 21. Soit une matrice emboîtée $M = (M_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, t_1\}^2}$ pour chaque $j \leq t_1$ on note $M_{jj} = \begin{pmatrix} M_{j+1, j+1} & * \\ 0 & N_{j, j} \end{pmatrix}$, avec $M_{t_1+1, t_1+1} = 0$, on désigne par ρ_j le polynôme minimal de N_{jj} et $\mu_q = \rho_q \dots \rho_{t_1-1} \rho_{t_1}$ et $\mu = \mu_1$

Dans la matrice $\mu(M)$ les blocs $\mu(M_{j, j})$ sont nuls, de même que les lignes primaires toutes entières sont nulles.

On remarquera que le degré de μ est égal à la somme des tailles des $N_{j, j}$, c'est à dire la taille de M_{11} : p .

Démonstration. la partie concernant les blocs de la diagonale est immédiate.

le reste se démontre par récurrence à partir de la remarque suivante:

Pour toute matrice emboîtée

lorsque sur une diagonale de blocs le bloc supérieur est de taille (u, v) et le bloc inférieur est de taille (u', v') , si $v > v'$ les $u - u'$ dernières coordonnées des v' premières colonnes sont nulles; il s'agit donc des éléments des colonnes secondaires dans les lignes primaires: d'où, dans $\rho_i(M)$, qui est une matrice emboîtée, les lignes primaires numérotées $\sum_{k=1 \dots i} z_k - z_{i+1} + 1, \dots, \sum_{k=1 \dots i} z_k$ (c'est à dire celles qui contiennent le bloc $\rho_i(N_{ii}) = 0$) **contiennent des zéros dans les colonnes secondaires**, elles ont donc l'allure suivante $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \rho_i(N_{ii})=0 & 0 & * & 0 & * & \dots & * & 0 \end{pmatrix}$, où la partie mauve est nulle parce que la matrice est triangulaire supérieure, et dans la partie verte les zéros corespondent à notre remarque.

et, si nous supposons que dans $\rho_{i+1}(M) \dots \rho_{t_1}(M)$ les colonnes ont l'allure suivante

$$\begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ *_{ij} \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ \dots \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est à dire les lignes primaires de numéros supérieurs ou égaux à $\sum_{k=1 \dots i} z_k + 1$ sont nulles (la partie bleue), ce qui traduit l'hypothèse de récurrence, on voit clairement qu'après le produit $\rho_i(M) \rho_{i+1}(M) \dots \rho_{t_1}(M)$ les lignes primaires numérotées $\sum_{k=1 \dots i} z_k - z_{i+1} + 1, \dots, \sum_{k=1 \dots i} z_k$ sont nulles.

Il suffit, pour initialiser, de traiter le cas de $\rho_{t_1}(M_{t_1, t_1})$ qui est immédiat. □

Exemple 22.

```
(%i5) m:matrix([1,9,8,8,13,4,5], [0,2,8,8,3,4,5], [0,0,8,8,0,40,51], [0,0,7,8,0,4,5], [0,0,0,0,1,9,13], [0,0,0,0,0,2,3], [0,0,0,0,0,0,1]);
```

```
(%o5) \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
```

```
(%i6) m-ident(7);
```

$$(\%o6) \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) (m-ident(7)).(m-2*ident(7));

$$(\%o7) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 176 & 184 & 14 & 505 & 669 \\ 0 & 0 & 112 & 120 & 0 & 383 & 499 \\ 0 & 0 & 98 & 104 & 0 & 312 & 466 \\ 0 & 0 & 91 & 98 & 0 & 308 & 399 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i8) (m-ident(7)).(m-2*ident(7)).(m.m-16*m+8*ident(7));

$$(\%o8) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -98 & -1242 & 236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i9)

Exemple 23.

Les matrices emboîtées qui verifient la propriété M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d & i & s & l & w & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j & t & m & x & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & y & Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & d & i & l \\ & & & & & & & & 0 & 0 & j & m \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 & d \\ & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices emboîtées appartenant à $W.\mathbb{K}[A, W]$

$$\begin{pmatrix} a & b & f & o & d & i & s & l & w & X \\ c & g & p & e & j & t & m & x & Y \\ h & q & k & u & n & y & Z \\ r & & & & v & z & T \\ & a & b & f & d & i & l \\ & & c & g & e & j & m \\ & & & h & & k & n \\ & & & & a & b & d \\ & & & & & c & e \\ & & & & & & a \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 24.

Si A est une matrice emboîtée A pour laquelle l'Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ est pleine, le polynome réducteur est de degré inférieur ou égal à $z_1=p$.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer les propositions 18,20 et 21.

Remarquons que dans le cas d'une Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ pleine le polynôme réducteur Δ_A est un multiple du polynôme minimal de A_{11} puisqu'il en est annulateur et un diviseur de son polynôme caractéristique (Cayley-Hamilton) puisque chacun des polynômes minimaux ρ_i divise son polynôme caractéristique.

Il est de degré inférieur ou égal à $z_1=p$. \square

3.3.2. Lorsque l'Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ n'est pas pleine.

La proposition 20 n'est plus applicable.

Cependant la matrice emboîtée A est, trivialement, la limite d'une suite (A_t) de matrices dont l'Algèbre $\mathbb{K}[A_t, W]$ est pleine; pour chacune désignons par Δ_t son polynôme réducteur alors $\forall t \in \mathbb{N}, \exists Q_t \in \mathbb{K}[X, Y], \Delta_t(A_t) = WQ_t(A_t, W)$.

Par ailleurs les polynômes Δ_t sont de degré inférieur ou égal à z_1 et ont pour racines des valeurs propres des matrices A_t correspondantes, une application immédiate du Théoreme de Gershgorin montre que leurs coefficients aussi sont bornés; par suite, quitte à se restreindre à une sous-suite, on peut supposer que les polynômes Δ_t convergent.

De meme les polynômes Q_t sont aussi de degré borné (tant par rapport à X qu'à Y), d'où l'existence d'un polynôme Δ_A unitaire de degré minimal, inférieur ou égal à z_1 tel que $\Delta(A) \in W\mathbb{K}[A, W]$.

Remarquons aussi que Δ_A doit vérifier la propriété M et que, par passage à la limite, il doit diviser le polynôme caractéristique de la matrice A_{11} , ce qui donne une direction pour le déterminer.

3.4. Polynôme réducteur et polynôme minimal de A_{11} .

Remarque 25. Polynôme réducteur de A et polynôme minimal de A_{11} .

Le polynôme reducteur de A n'est pas forcément égal au polynôme minimal de A_{11} comme le prouve l'exemple suivant.

D'autre part la démonstration précédente montre que lorsque A_{11} est cyclique ces deux polynômes sont égaux.

(nous appellerons « cyclique » toute matrice dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique; en anglais « non derogatory »)

Exemple 26.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme minimal de A_{11} est $(X - 1)^2$, mais le polynôme réducteur de A est $(X - 1)^3$; comme on peut le constater dans la session suivante de Maxima:

$$(\%i9) \quad \left(\begin{array}{c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right);$$

$$(\%o9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i10) m: %;

$$(\%o10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i11) (m-ident(7));

$$(\%o11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i12) (m-ident(7)).(m-ident(7));

$$(\%o12) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i13) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));

$$(\%o13) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i14)

4. LA DIMENSION DE L'ALGÈBRE ENGENDRÉE PAR DEUX MATRICES QUI COMMUTENT

Définition 27. *Matrice emboîtée admissible*

Une matrice emboîtée A sera dite admissible lorsque son polynome réducteur est de degré z_1 .

Proposition 28.

A est admissible si et seulement ses réduites le sont.

Démonstration.

S'il existe k tel que le polynome réducteur de la matrice A_k est de degré strictement inférieur à z_k la démonstration par récurrence de la proposition 21 montre que le polynome réducteur de A est de degré strictement inférieur à $z_1=p$.

La réciproque est évidente. □

Définition 29. *Liste des polynomes réducteurs d'une matrice emboîtée*

Soit $A=(A_{ij})$ et pour tout $k \in \{1, \dots, t_1\}$ $A_k=(A_{ij})_{i>k, j>k}$, on désignera par $(\Delta_1, \dots, \Delta_{t_1})$ les polynomes réducteurs des réduites A_k et par d_k leur degrés respectifs.

Lemme 30. *Avec les notations ci-dessus*

$$AW^{k-1} \in W^k C(W) \implies A_k \in W_k C(W_k)$$

Démonstration.

$$AW^{k-1} = ZW^k \implies ({}^t W)^{k-1} AW^{k-1} = ({}^t W)^{k-1} ZW^{k-1} W \iff A_k = Z_k W_k \quad \square$$

Théorème 31.

Soient $(A, W) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, où W est une matrice nilpotente sous forme de Weyr et $AW=WA$. Alors $\dim(K[A, W]) \leq \sum_{k=1, \dots, t_1} d_k$.

Le Théorème améliore la majoration établie historiquement par Gerstenhaber ([2]), dans l'esprit de la Géométrie Algébrique, et qui a reçu par la suite de nombreuses démonstrations soit dans cet esprit soit plus élémentaires et longues...(dont [1] etc..).

Démonstration.

La démonstration se fera par récurrence sur t_1 .

0) Si $t_1=1$ le résultat est immédiat: $A=A_{1,1}$ et $W=I$; il suffit d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à t_1-1 .

On pose $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & C \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix}$, où $A_{11} \in \mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et $W = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{1,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{W}_{1,2} = (W_{1,2}, 0, \dots, 0)$ et $W_2 = \begin{pmatrix} 0 & W_{2,3} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & W_{3,4} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & W_{t_1-1, t_1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est aussi une matrice de Weyr de partition associée (z_2, \dots, z_{t_1}) , $A_2 W_2 = W_2 A_2$, d'où $\dim(\mathbb{K}[A_2, W_2]) \leq \sum_{k=2, \dots, t_1} d_k$ par application de l'hypothèse de récurrence.

2) D'après le Théorème 18 $\mathbb{K}[A, W] = \text{Vect}(I, A, \dots, A^{d_1-1}) \oplus W \mathbb{K}[A, W]$.

3) Remarquons que pour $k \geq 0$ $W^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{1,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{1,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1}^q & * \\ 0 & A_2^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{1,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k A_2^q \end{pmatrix}$.

4) Donc la dimension de $\text{Vect}(W^{k+1} A^q, q \geq 0, k \geq 0)$ est inférieure ou égale à celle de $\text{Vect}(W_2^k A_2^q, q \geq 0, k \geq 0)$, qui est égale à celle de $\mathbb{K}[A_2, W_2]$.

D'où la dimension de $\mathbb{K}[A, W]$ est inférieure ou égale à $\sum_{k=1, \dots, t_1} d_k \leq n$.

Le résultat s'étend sans difficulté, dans le cas algébriquement clos, à toute Algèbre commutative engendrée par 2 matrices. Ce qui constitue le Théorème de Gerstenhaber; on comparera avec [3] qui reprend le schéma de la démonstration du [1] (mais) dans le cadre des matrices de Weyr.

Par ailleurs l'inégalité $\dim(\mathbb{K}[A, W]) \leq \sum_{k=1, \dots, t_1} d_k$ est une amélioration conséquente du même Théorème; nous y reviendrons plus loin. \square

Nous allons maintenant établir une minoration de la dimension de l'Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$

Proposition 32.

La famille $(I, A, \dots, A^{d_1-1}, W, WA, \dots, WA^{d_2-1}, \dots, \mathbb{W}, WA, \dots, WA^{d_{t_1}-1})$ est libre

Démonstration.

Supposons $\sum_{1 \leq j \leq t_p, 0 \leq p_j \leq d_j-1} x_{j,p_j} W^{j-1} A^{p_j} = 0$.

On en déduit: $\sum_{0 \leq p_1 \leq d_1-1} x_{1,p_1} A^{p_1} \in WC(W)$, d'où les x_{1,p_1} sont nuls.

d'où il vient $\sum_{0 \leq p_2 \leq d_2-1} x_{2,p_2} WA^{p_2} \in W^2C(W)$ qui entraîne, d'après le lemme 30,

$\sum_{0 \leq p_2 \leq d_2-1} x_{2,p_2} A_2^{p_2} \in W_2C(W_2)$, d'où les x_{2,p_2} sont nuls.

etc...

Ce qui établit le résultat. \square

D'où, en fin de compte:

Théorème 33.

La dimension de $\mathbb{K}[A, W]$ est égale à $\sum_{k=1, \dots, t_1} d_k$ et une base en est $(I, A, \dots, A^{d_1-1}, W, WA, \dots, WA^{d_2-1}, \dots, \mathbb{W}, WA, \dots, WA^{d_{t_1}-1})$

Ce résultat est original; il améliore la majoration du Théorème de Gerstenhaber, il étend le Théorème de Laffey établi dans le seul cas « homogène » (c'est à dire lorsque les indices z_1, z_2, \dots sont tous égaux). La base proposée est à comparer avec [1].

Théorème 34. *Condition nécessaire et suffisante pour que la dimension de $K[A, W]$ soit égale à n .*

L'Algèbre $K[A, W]$ est de dimension maximale si et seulement si A est admissible.

Démonstration.

La condition est nécessaire comme l'établit le Théorème 33; la proposition 28 établit qu'elle est suffisante .

L'exemple 26 montre que ceci n'est pas équivalent à « $A_{1,1}$ cyclique » \square

Remarque 35.

Ce résultat généralise la condition nécessaire et suffisante établie seulement dans le cas « homogène », c'est à dire lorsque les blocs $A_{j,j}$ sont tous de même taille (et donc égaux) [3],[5]; dans ces hypothèses la condition se résume à « $A_{1,1}$ cyclique », on voit que la situation est plus complexe dans le cas général.

Exemple 36.

On trouvera ici un exemple de matrice A , telle que $A_{1,1}$ n'est pas cyclique mais $K[A, W]$ est de dimension n :

(%i3) `m:matrix([1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,0,1,1],[0,0,0,1]);`

(%i4) `m.m;`

(%o4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5) `w:matrix([0,0,1,0],[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,0,0]);`

(%o5)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) `m.w;`

(%o6)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) `a*ident(4)+b*m+c*m.m+d*w;`

(%o7)
$$\begin{pmatrix} c+b+a & 0 & d+2c+b & 3c+b \\ 0 & c+b+a & 0 & 2c+b \\ 0 & 0 & c+b+a & d+2c+b \\ 0 & 0 & 0 & c+b+a \end{pmatrix}$$

(%i8) `linsolve([a+b+c,b+2*c+d,b+2*c,b+3*c],[a,b,c,d]);`

(%o8) $[a=0, b=0, c=0, d=0]$

(%i9)

Exemple 37.

Ici le degré du polynôme minimal de A_{11} est 2; les degrés des polynômes réducteurs sont $d_1 = 3$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1$ et la dimension de $\mathbb{K}[A, W]$ est $6=3+2+1$.

(%i4) `m:matrix([1,1,0,0,0,11,12],[0,1,0,0,0,21,25],[0,0,1,1,0,33,37],[0,0,0,1,0,51,54],[0,0,0,0,1,1,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,1]);`

(%o4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5) `(m-ident(7));`

(%o5)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) `(m-ident(7)).(m-ident(7));`

(%o6)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));
```

$$(\%o7) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) w:matrix([0,0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0]);
```

$$(\%o9) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) a*ident(7)+b*m+c*m.m+d*w+e*m.w+f*m.m.w+g*w.w+h*m.w+i*m.m.w.w;
```

$$(\%o10) \begin{pmatrix} c+b+a & 2c+b & 0 & 0 & f+e+d & 2f+e+43c+11b & i+h+g+49c+12b \\ 0 & c+b+a & 0 & 0 & 0 & f+e+d+42c+21b & 50c+25b \\ 0 & 0 & c+b+a & 2c+b & 0 & 117c+33b & 128c+37b \\ 0 & 0 & 0 & c+b+a & 0 & 102c+51b & 108c+54b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c+b+a & 2c+b & f+e+d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+b+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c+b+a \end{pmatrix}$$

```
(%i13) linsolve([a+b+c,2*c+b,f+e+d,2*f+e+43*c+11*b,i+h+g+49*c+12*b,117*c+33*b,
128*c+37*b,102*c+51*b,108*c+54*b],[a,b,c,d,e,f,g,h,i]);
```

```
(%o13) [a=0,b=0,c=0,d=%r3,e=-2%r3,f=%r3,g=-%r2-%r1,h=%r2,i=%r1]
```

```
(%i14)
```

La résolution annonce 3 degrés de liberté, donc le rang du système est $9-3=6$; ce qui détermine la dimension de l'Algèbre étudiée.

5. UNE BASE DE $\mathbb{K}[A, W]$

La démonstration du Théorème 22 nous fournit une procédure pour la détermination d'une base de $\mathbb{K}[A, W]$

- i) trouver d_1 L:[I,A,...,A^{d₁-1}]
 - ii) trouver d_2 L:L@[W($\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_k \end{smallmatrix}$), M_k base de $\mathbb{K}[A_1, W_1]$
- a completer

suite a voir + tard

6. L'ENSEMBLE DES MATRICES EMBOITÉES ADMISSIBLES (EN CHANTIER)

Il est immédiat que l'ensemble des matrices cycliques est un ouvert dense de l'ensemble $C(W)$ des matrices emboîtées.

Théorème 38. *L'ensemble des matrices emboîtées admissibles est un ouvert dense de $C(W)$*


Démonstration.

Pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$ nous désignons par A'_k la matrice A^k , privée de ses lignes secondaires; A est admissible si et seulement si les matrices $(I, A'_1, \dots, A'_{p-1})$ sont linéairement indépendantes; ce qui définit un ouvert.

La densité découle de celle de l'ensemble des matrices cycliques, qui sont, comme vu plus haut, admissibles. \square

Paris, Juin 2018

Bibliographie:

- [1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, Linear Multilinear Algebra 27 (1990), 147-157 
- [2] M. Gerstenhaber, « On dominance and varieties of commuting matrices », *Ann. Math.*, vol. 73, 1961, p. 324-348
- [3] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.
- [4] P. Teller, <http://lalgebrisant.fr/images/MatricesCommutantes/LeCommutantestrigonalisable.pdf>
- [5] T.J. Laffey, S.Lazarus, Two-generated Commutative Matrix Subalgebras, Linear Algebra and its Applications, 147, 1991, p249-273.
- [6] M.G. Neubauer, D.J. Saltman, Two-Generated Commutative Subalgebras of $\mathcal{M}_n(F)$, Journal of Algebra, 164, pp.545-562, 1994.