Au pays des matrices fractales

PATRICK TELLER

RÉSUMÉ.

Les matrices de Weyr sont un substitut, récemment redécouvert ([3],[4]), aux matrices de Jordan; de même que toute matrice nilpotente est semblable à une somme directe de blocs de Jordan nilpotents, toute matrice nilpotente est aussi semblable à une somme directe de blocs de Weyr nilpotents.

Contrairement au commutant d'une matrice en blocs de Jordan [7] qui possède une forme assez inconfortable le commutant d'une matrice en blocs de Weyr est un ensemble de matrices qui possèdent une forme intéressante, de type fractal.

L'étude des ensembles de matrices fractales permet d'établir directement des propriétés qui ont jusqu'à maintenant exigé, soit des arguments de Géométrie Algébrique, soit de longs développements matriciels, comme les Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey sur la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par deux matrices. ([2],[5]).

Le premier paragraphe rappelle, pour le lecteur qui en ressentirait la nécessité, la forme de Jordan et introduit la forme de Weyr pour une matrice nilpotente.

Le deuxième décrit la structure triangulaire par blocs du commutant d'une matrice sous forme de Weyr, introduisant les matrices fractales.

La suite fait le pari que kes propriétés relatives aux couples (voire triplets) de matrices commutantes peuvent se démontrer plus simplement à l'aide de l'observation des matrices fractales et d'Algèbre linéaire élémentaire.

Le troisième ouvre l'étude des propriétés des Algébres de matrices fractales et établit des propriétés algébriques et « graphiques » qui sont exploitées dans les démonstrations élémentaires des Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey.

Le quatrième contient les démonstrations élémentaires annoncées, le Théorème de Laffey est démontré dans le cas général et on trouve une expression effective de la dimension de l'Algèbre $\mathbb{K}[A,W]$, ce qui constitue un résultat original.

Les suivants sont des chantiers à explorer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos.

1. La forme de jordan et la forme de Weyr

La forme de Jordan d'une matrice nilpotente est bien connue:

toute matrice nilpotente peut se mettre sous la forme $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$, où les indices forment une suite décroissante $t_1 \geqslant t_2 \geqslant .... \geqslant t_p$ et pour chaque k $J(t_k)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & .... & ... & 0 \\ .... & ... & .... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{t_k}(\mathbb{K})$; on conviendra de poser $t_0=0$.

La suite (t_i) sera appelée partition canoniquement associée à Γ.

Proposition 1. *Un ordre sur la base canonique*

Soit la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ dont on désignera les éléments $(e_1, ..., e_n)$ sous la forme $e_{i,k}$ de la manière suivante: $e_{i,k}$ représente $e_{t_0+....+t_{i-1}+k}$.

On dira que $e_{i,k} \leqslant e_{j,l}$ lorsque k<l ou k=l et i⩽j

Ce qui se traduit par une suite croissante $\mathcal{C}'=(e_{1,1}, e_{2,1}, ..., ...)$

Remarque 2. Il s'agit tout simplement d'un ordre lexicographique; on écrira $(i,j)\prec(k,l)$

Proposition 3. *Interprétation de la matrice Γ et construction de la matrice W*

On considère la matrice Γ décrite au-dessus et la base canonique (e_i), l'action de Γ sur la base peut se lire comme suit:

$$\begin{array}{l} 0\longleftarrow e_{p,1} \longleftarrow e_{p,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{p,t_p} \\ 0\longleftarrow e_{p-1,1} \longleftarrow e_{p-1,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{p-1,t_{p-1}} \\ ..... \\ 0\longleftarrow e_{1,1} \longleftarrow e_{1,2} \longleftarrow .... \longleftarrow ...... \qquad\qquad \longleftarrow e_{1,t_1} \end{array}$$

Tableau 1.

Posons $z_1=p$, $z_2=\text{card}(\{k,\ t_k \geqslant 2\})$, $z_3 = \text{card}(\{k,\ t_k \geqslant 3\})$,..., z_{t_1} (on conviendra de poser $z_{t_1+1}=0$), la suite (z_u) est décroissante, elle sera désignée sous le nom de partition canoniquement associée à W.

Parcourir la base $\mathcal{C}'$ dans l'ordre revient à parcourir le tableau, colonne après colonne du bas vers le haut et de la gauche vers la droite; la matrice Γ devient alors la matrice (par blocs) $W=(W_{i,j})$ où le bloc $W_{i,j}\in\mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{K})$. Le tableau implique que $\forall i \in \{1, ..., t_p - 1\}$ $W_{i,i+1}=$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(\mathbb{K})$ (attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et si $j\neq i+1$ $W_{i,j}=0$.

$W=\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & ... & ...0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & ... & .... \\ ... & ... & ... & ... & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & W_{t_{1-1},t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de Weyr associée à cette partition.

Remarque 4. Cette présentation de la forme de Weyr reprend le chemin totalement empirique qui m'a fait la découvrir; on peut bien entendu définir cette forme de manière indépendante de la forme de Jordan.

On lira dans [3] l'histoire de la redécouverte de cette forme matricielle longtemps oubliée et une description de cette forme, indépendamment des matrices de Jordan.

Exemple 5.

Soit Γ=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & ... & . & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ...... & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... \\ & & & & 0 & 1 & 0 & ... \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & ... & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J(4) & 0 & \\ 0 & J(3) & \\ 0 & ... & J(1) \end{pmatrix}$

On obtient W=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ ... & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & . & ... & ... & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & ... & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & ... & 0 & 0 \\ 0 & .... & . & ... & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 6. *Les puissances de W*

Soit pour tout u⩾v $N_{u,v}$=$\begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{u,v}(K)$.

W=$\begin{pmatrix} 0 & N_{z_1,z_2} & 0 & .. & ... \\ 0 & 0 & N_{z_2,z_3} & ... & ... \\ ... & .... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & N_{z_{t_1-1},z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$

W^2=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & N_{z_1,z_3} & 0 & .. & ... \\ . & 0 & 0 & N_{z_2,z_4} & ... & ... \\ ... & ... & .... & 0 & ... & ... \\ .... & ... & ... & ... & ... & N_{z_{t_1-2},z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & .... \\ 0 & ... & ... & & ...... & 0 \end{pmatrix}$

...

W^k=$\begin{pmatrix} 0 & .... & 0 & N_{z_1,z_{1+k}} & 0 & .. & ... \\ .... & ... & 0 & 0 & N_{z_2,z_{2+k}} & ... & ... \\ ... & ... & ... & .... & 0 & ... & ... \\ .... & ... & ... & ... & ... & ... & N_{z_{t_1-k},z_{t_1}} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ & & & & & & ... \\ 0 & 0 & ... & & .... & .... & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration.

Il suffit de remarquer que $N_{u,v}N_{v,w}=N_{u,w}$ □

Proposition 7. *Une simple propriété des matrices $N_{u,v}=\begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{K})$*

Si $M\in\mathcal{M}_{\mathrm{tu}}(\mathbb{K})$ $MN_{u,v}$ est la matrice M, privée de ses u-v dernières colonnes,

i) l'application $M\longmapsto MN_{u,v}$ est une surjection de $\mathcal{M}_{t,u}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{K})$

ii) l'application $M\longmapsto N_{u,v}M=\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ est une injection de $\mathcal{M}_{v,t}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{u,t}(\mathbb{K})$

2. Le commutant d'une matrice (nilpotente) en blocs de Weyr

Soit W comme au-dessus, on désignera par C(W) le commutant de W (en anglais Centralizer).

Définition 8. *Matrice emboitée de partition (z_1,..,z_{t_1})*

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(K)$ sera dite emboitée de partition (z_1,..,z_{t_1}) lorsque M=($M_{i,j}$) où $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i,z_j}(K)$ et $\forall (i,j)$ $i>j \Longrightarrow M_{i,j}=0$, $i \leqslant j \Longrightarrow M_{i,j}=\begin{pmatrix} M_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Théorème 9. *Le commutant de W*

Soit une matrice A=($A_{i,j}$), AW=WA si et seulement si
$\forall (i,j)$,
1. i>j $\Longrightarrow A_{i,j}=0$
2. si i$\leqslant j$ $A_{i,j}=\begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et donc
1. le commutant de W est simultanément trigonalisable (par blocs)
2. les éléments du commutant sont les matrices emboitées de partition (z_1,..,z_{t_1})

Démonstration.
Soit A=($A_{i,j}$) découpée en blocs comme W.
AW=WA $\Longleftrightarrow \forall (i,j) A_{i,j}W_{j,j+1}=W_{i,i+1}A_{i+1,j+1}$
1ère étape:
soit j<t_1, 0=$W_{j,j+1}A_{j+1,1}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_{j+1,1}$=0, c'est à dire $\forall j+1>1$, $A_{j+1,1}$=0
soit 1<j<t_1 $A_{j,1}$,$W_{1,2}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,2}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,2}$=0, c'est à dire $\forall j+1>2$, $A_{j+1,2}$=0 et ainsi de suite, ce qui entraîne que A est triangulaire supérieure par blocs.

2 ème étape: la diagonale de blocs:
soit j<t_1 $A_{j,j}W_{j,j+1}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,j+1}$.
si $z_j=z_{j+1}$ $W_{j,j+1}$=I_{z_j} et donc $A_{j,j}$=$A_{j+1,j+1}$
si z_j>z_{j+1} et si on pose $A_{j,j}=\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$ alors $A_{j,j}W_{j,j+1}=\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$ et $W_{j,j+1}A_{j+1,j+1}=\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,j+1}=\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $A_{j,j}=\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.
D'où la diagonale de blocs principale de la matrice A.

3ème étape: au-dessus de la diagonale de blocs
soit j<k<t_1 $A_{j,k}W_{k,k+1}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,k+1}$, qui conduit à un résultat analogue $A_{j,k}=\begin{pmatrix} A_{j+1,k+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.
On en déduit que ${}^tW_{i,i+1}A_{\mathrm{ij}}W_{j,j+1}=A_{i+1,j+1}$. □

Remarque 10.
Comme toute matrice (dans le cas d'un corps algèbriquement clos) est semblable à une somme directe de matrices de Jordan, donc ausssi de matrices de Weyr, la trigonalisabilité simultanée (par blocs) sera vraie pour le commutant d'une matrice quelconque à coefficients dans un tel corps.

Il est surprenant que cette propriété soit si peu explicitée. [3],[4].

Définition 11. *Réduction d'ordre k d'une matrice de C(W)*

Soit une matrice $M=(M_{i,j})$ *de* $C(W)$ *on désignera sous le nom de réduite d'ordre* k *la matrice* $M_k=(M_{i,j})_{i\geqslant k,j\geqslant k}$.

.

Proposition 12. *Expression algébrique de la réduction*

Soit une matrice $M=(M_{i,j})$ *de* $C(W)$, ${}^tW^k\mathrm{MW}^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{k+1} \end{pmatrix}$

Démonstration.

Il suffit d'établir le résultat pour k=1, ce qui se fait en appliquant la relation ${}^tW_{i,i+1}A_{\mathrm{ij}}W_{j,j+1}=A_{i+1,j+1}$. □

3. Des matrices de type « fractal »

L'hypothèse est que les propriétés des matrices du commutant de W doivent se lire dans la forme de celles-ci, c'est à dire leur aspect « fractal ».

Désormais la matrice W est fixée et nous employerons le terme de matrice emboitée pour désigner les éléments de C(W), sans repréciser la partition associée.

3.1. Aspect Combinatoire.

Définition 13. *lignes et colonnes, primaires et secondaires*

Soit une matrice emboitée M=$(M_{i,j})_{(i,j)\in\{1,..,t_1\}^2}$ pour chaque j$\leqslant t_1$ on note $M_{j,j} = \begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j} \end{pmatrix}$, avec M$_{t_1+1,t_1+1}$=0.

On appellera primaires les lignes et les colonnes de M qui apparaissent dans les matrices N$_{j,j}$, c'est à dire celles numérotées $\sum_{k=1\ldots i} z_k - z_{i+1} + 1$ jusqu'à $\sum_{k=1\ldots i} z_k$, les autres seront appelées secondaires.

Exemple 14.

les lignes primaires $\begin{pmatrix} a & \text{aa} & \text{aaa} & \text{aaaa} & b & \text{bb} & \text{bbb} & i \\ 0 & c & \text{cc} & \text{ccc} & f & \text{ff} & \text{fff} & \text{ii} \\ 0 & d & \text{dd} & \text{ddd} & g & \text{gg} & \text{ggg} & \text{iii} \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & \text{hh} & \text{iiii} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \text{aa} & \text{aaa} & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \text{cc} & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \text{dd} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, ici lignes 4,6,7 et 8

les colonnes primaires $\begin{pmatrix} a & \text{aa} & \text{aaa} & \text{aaaa} & b & \text{bb} & \text{bbb} & i \\ 0 & c & \text{cc} & \text{ccc} & f & \text{ff} & \text{fff} & \text{ii} \\ 0 & d & \text{dd} & \text{ddd} & g & \text{gg} & \text{ggg} & \text{iii} \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & \text{hh} & \text{iiii} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \text{aa} & \text{aaa} & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \text{cc} & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \text{dd} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, ici colonnes 4,6,7 et 8

Définition 15. *Domaine admissible, Classes, Espace admissible, Origines et Extrémités*

Nous allons considérer les matrices emboitées comme des éléments de $\mathbb{K}^{n^2}$, dont la structure est celle de matrices triangulaires par blocs, en rapport avec la partition associée à W.

On pourra repérer sur l'exemple suivant que les cases marquéees d'un zéro sont nécessairement nulles, tandis que les cases colorées (de l'exemple) **peuvent** être de valeur non nulle (ou pas); on les appellera admissibles.

On appellera « domaine admissible» l'ensemble des cases admissibles (DA); si M est une matrice emboitée ses termes non nuls se trouvent dans le domaine admissible.

On remarquera aussi que pour chaque matrice emboitée certaines cases doivent porter la même valeur, ce qui définit une relation d'équivalence parmi les cases du domaine admissible (par exemple ligne1-colonne1 avec ligne 5-colonne5 et ligne9-colonne9 dans la première matrice de l'exemple ci-dessous); chaque classe contient une unique case dans le bord directeur (on l'appellera l'extrémité de la classe) et une unique case dans une colonne primaire (on l'appellera l'origine de la classe).

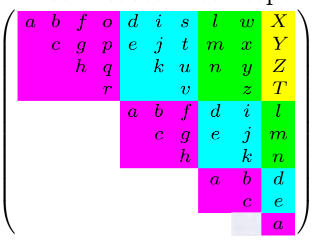
Les classes seront appelées « lacets ».

L'espace quotient de DA par la relation d'équivalence sera appelé « espace admissible », c'est un espace vectoriel dont les lacets constituent une base.

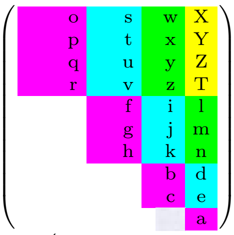
Tout espace vectoriel de matrices emboitées, en particulier tout espace vectoriel $\mathbb{K}[A,W]$, est isomorphe à un sous-espace vectoriel de l'espace admissible.

Un sous-espace vectoriel de l'espace admissible sera dit plein lorsque la réunion des cases non nulles est égale au domaine admissible.

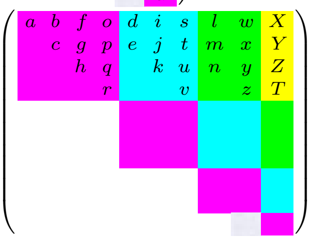
Exemple 16.
les cases correspondant à une même classe portent des lettres identiques



les origines



Les extremites



Remarque 17.
Une matrice emboitée A est déterminée par les extrémités de ses lacets c'est à dire sa première ligne (de blocs): A_{11}, ..., A_{1t_1} (que nous appellerons « bord directeur » en référence à la dénomination « leading edge » dans le [3]); elle est aussi déterminée par leurs origines.

3.2. Aspect Algébrique.

Théorème 18.
Soit une matrice emboitée A, l'ensemble des polynomes $P(X)$ tels que $P(A) \in W\mathbb{K}[A, W]$ est un idéal, non réduit à $\{0\}$; on appellera polynome réducteur le générateur unitaire de cet idéal.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que W$\mathbb{K}[A, W]$ est un idéal et que le polynome minimal de A convient; on en déduit donc que le polynome réducteur de A divise son polynome minimal.
Le polynome réducteur de la matrice A sera noté Δ_A. □

Définition 19. *propriété M*
On dira qu'une matrice $M \in \mathbb{K}[A, W]$ possède la propriété M lorsque ses blocs diagonaux M_{jj} sont nuls, de meme que toutes ses lignes primaires.
L'exemple suivant illustre le fait, immédiat, que toute matrice M de $W\mathbb{K}[A,\ W]$ possède la propriété M.

```
(%i19) W:matrix([0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,
```

(%o19) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
(%i23) N:matrix([a,b,d,u,f,g],[0,c,h,v,j,k],[0,0,l,0,q,r],[0,0,0,a,b,u],[0,0,0,0,c,v],[0,0,0,0,0,a
```

(%o23) $\begin{pmatrix} a & b & d & u & f & g \\ 0 & c & h & v & j & k \\ 0 & 0 & l & 0 & q & r \\ 0 & 0 & 0 & a & b & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

```
(%i24) N.W;
```

(%o24) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Mais la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant:

$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ posssède la propriété M mais n'appartient pas à $W\mathbb{K}[A, W]$.

3.3. Une caractérisation de l'appartenance à l'idéal $W\mathbb{K}[A, W]$.

3.3.1. Le cas facile: lorsque l'Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ est pleine .

Théorème 20.

Soit une matrice emboitée A telle que l'Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ est pleine, une matrice M de $\mathbb{K}[A, W]$ appartient à l'idéal $W\mathbb{K}[A, W]$ si et seulement si elle possède la propriété M.

Démonstration.

On sait déja que $W\mathbb{K}[A, W]$ est inclus dans l'espace vectoriel des matrices de $\mathbb{K}[A, W]$ qui possèdent la propriété M, il suffit donc de montrer qu'ils ont la même codimension dans $\mathbb{K}[A, W]$.

1) Soit M $\in\mathbb{K}[A, W]$ dénombrons les contraintes indépendantes à satisfaire pour posséder la propriété M:

i) dans le bloc $M_{1,1}$ il faut annuler tous les termes (sauf ceux qui sont nuls par définition): $z_1^2 - \{(z_1 - z_2)z_2 + ... + (z_{t_1-1} - z_{t_1})z_{t_1}\}$

ii) dans chaque ligne de blocs (hors les blocs diagonaux dont les éléments sont déja décomptés dans $M_{1,1}$) il faut annuler tous les termes apparaissant dans des cases relevant à la fois d'une ligne primaire et d'une colonne primaire : $(z_i\text{-}z_{i+1})\{(z_{i+1} - z_{i+2}) + . + (z_{t_1-1} - z_{t_1}) + z_{t_1} - z_{t_1+1}\} = (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$ termes à annuler

Ce qui représente $\sum_{i=1 \dots t_1} (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$ conditions.

D'où au total la codimension de l'espace vectoriel des matrices qui possèdent la propriété M est ${z_1}^2$.

2)

Considérons ψ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[A, W]$ défini par $M \longmapsto \mathrm{MW}$, de bord directeur $(0, M_{1,1}W_{1,2}, ..., M_{1,t_1-1}W_{t_1-1,t_1})$; les éléments du noyau sont caractérisés par la propriété suivante: dans chaque M_{1j} les z_{j+1} premières colonnes sont nulles; ce qui signifie que le noyau « correspond » aux $z_j - z_{j+1}$ dernières colonnes de chaque $M_{1,j}$.

Par suite la dimension du noyau de ψ est $z_1(z_1\text{-}z_2+z_2\text{-}z_3+..+z_{t_1}\text{-}z_{t_1+1})=z_1^2$, ce qui constitue la codimension de l'image, c'est à dire de $W\mathbb{K}[A,W]$.

Par suite l'espace des matrices de $\mathbb{K}[A,\ W]$ qui possèdent la propriété M est égal à l'idéal $W\mathbb{K}[A,W]$.

□

Proposition 21. *Soit une matrice emboitée $M{=}(M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,..,t_1\}^2}$ pour chaque $j\leqslant t_1$ on note $M_{\mathrm{jj}}=\begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j}\end{pmatrix}$, avec M_{t_1+1,t_1+1}=0, on désigne par ρ_j le polynome minimal de N_{jj} et $\mu_q=\rho_q....\rho_{t_1-1}\rho_{t_1}$ et $\mu=\mu_1$.*

Alors la matrice $\mu(M)$ possède la propriété M.

En particulier les blocs $\mu(M_{j,j})$ sont nuls, de même que les lignes primaires toutes entières sont nulles.

On remarquera que le degré de μ est égal à la somme des tailles des $N_{j,j}$, c'est à dire la taille de M_{11}, c'est à dire p.

Démonstration. *la partie concernant les blocs de la diagonale est immédiate.*

Le reste se démontre par récurrence à partir de la remarque suivante:

Pour toute matrice emboitée

lorsque sur une diagonale de blocs le bloc supérieur est de taille (u,v) et le bloc inférieur est de taille (u',v'), si v>v' les u-u' dernières coordonnées des v' premières colonnes sont nulles; il s'agit donc des éléments des colonnes secondaires dans les lignes primaires: d'où, dans $\rho_i(M)$, qui est une matrice emboitée, **les lignes primaires** *numérotées $\sum_{k=1...i} z_k - z_{i+1} + 1$, ..., $\sum_{k=1...i} z_k$ (c'est à dire celles qui contiennent le bloc $\rho_i(N_{\mathrm{ii}})=0$)* **contiennent des zéros dans les colonnes secondaires**, *elles ont donc l'allure suivante $\begin{pmatrix} 0\ ...\ 0 & \rho_i(N_{\mathrm{ii}})=0 & 0 & * & 0 & * & .... & * & 0\end{pmatrix}$, où la partie mauve est nulle parce que la matrice est triangulaire supérieure, et dans la partie verte les zéros corespondent à notre remarque.*

et, si nous supposons que dans $\rho_{i+1}(M)....\rho_{t_1}(M)$ les colonnes ont l'allure suivante $\begin{pmatrix} * \\ .... \\ ... \\ * \\ *_{\mathrm{ij}} \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ ... \\ ... \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

c'est à dire **les lignes primaires** *de numéros supérieurs ou égaux à $\sum_{k=1...i} z_k+1$* **sont nulles** *(la partie bleue), ce qui traduit l'hypothèse de récurrence, on voit clairement qu'après le produit $\rho_i(M)\rho_{i+1}(M)....\rho_{t_1}(M)$les lignes primaires numérotées $\sum_{k=1...i} z_k - z_{i+1} + 1$, ..., $\sum_{k=1...i} z_k$ sont nulles.*

Il suffit, pour initialiser, de traiter le cas de $\rho_{t_1}(M_{t_1,t_1})$ qui est immédiat. □

Exemple 22.

```
(%i5) m:matrix([1,9,8,8,13,4,5],[0,2,8,8,3,4,5],[0,0,8,8,0,40,51],[0,0,7,8,0,4,
      5],[0,0,0,0,1,9,13],[0,0,0,0,0,2,3],[0,0,0,0,0,0,1]);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i6) m-ident(7);
```

(%o6) $$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) `(m-ident(7)).(m-2*ident(7));`

(%o7) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 176 & 184 & 14 & 505 & 669 \\ 0 & 0 & 112 & 120 & 0 & 383 & 499 \\ 0 & 0 & 98 & 104 & 0 & 312 & 466 \\ 0 & 0 & 91 & 98 & 0 & 308 & 399 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i8) `(m-ident(7)).(m-2*ident(7)).(m.m-16*m+8*ident(7));`

(%o8) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -98 & -1242 & 236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i9)

Exemple 23. le cas d'une Algèbre pleine

Les matrices emboitées qui vérifient la propriété M: $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d & i & s & l & w & X \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & j & t & m & x & Y \\ & & 0 & 0 & & 0 & u & 0 & y & Z \\ & & & 0 & & & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & d & i & l \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & j & m \\ & & & & & & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & d \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices emboitées appartenant à W.$\mathbb{K}[A, W]$

$$\begin{pmatrix} a & b & f & o & d & i & s & l & w & X \\ & c & g & p & e & j & t & m & x & Y \\ & & h & q & & k & u & n & y & Z \\ & & & r & & & v & & z & T \\ & & & & a & b & f & d & i & l \\ & & & & & c & g & e & j & m \\ & & & & & & h & & k & n \\ & & & & & & & a & b & d \\ & & & & & & & & c & e \\ & & & & & & & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & f & d & i & l \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & c & g & e & j & m \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & k & n \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & a & b & d \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & c & e \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & a \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 24.
Si A est une matrice emboitée A pour laquelle l'Algèbre $\mathbb{K}[A, W]$ est pleine, le polynôme réducteur est de degré inférieur ou égal à $z_1 = p$.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer les propositions 18,20 et 21.

Remarquons que dans le cas d'une Algèbre $\mathbb{K}[A,W]$ pleine le polynome réducteur Δ_A est un multiple du polynome minimal de A_{11} puisqu'il en est annulateur et un diviseur de son polynome caractéristique (Cayley-Hamilton) puisque chacun des polynomes minimaux ρ_i divise son polynome caractéristique.

Il est de degré inférieur ou égal à z_1=p. □

3.3.2. Lorsque l'Algèbre $\mathbb{K}[A,W]$ n'est pas pleine.

La proposition 20 n'est plus applicable.

Cependant la matrice emboitée A est, trivialement, la limite d'une suite (A_t) de matrices dont l'Algèbre $\mathbb{K}[A_t,W]$ est pleine; pour chacune désignons par Δ_t son polynome réducteur alors $\forall t\in\mathbb{N},\exists\mathbb{Q}_t\in\mathbb{K}[X,Y],\Delta_t(A_t)=\mathrm{W}\mathrm{Q}_t(A_t,W)$.

Par ailleurs les polynomes Δ_t sont de degré inférieur ou égal à z_1 et ont pour racines des valeurs propres des matrices A_t correspondantes, une application immédiate du Théoreme de Gershgorin montre que leurs coefficients aussi sont bornés; par suite, quitte à se resteindre à une sous-suite, on peut supposer que la suite des polynômes Δ_t converge.

De même les polynomes Q_t(X,Y) sont aussi de degré borné (tant par rapport à X qu'à Y), d'où l'existence d'un polynome Δ_A unitaire de degré minimal, inférieur ou égal à z_1 tel que $\Delta_A(A)\in W\mathbb{K}[A,W]$.

Remarquons aussi que Δ_A(A) doit vérifier la propriété M et donc être un multiple du polynôme minimal de la matrice A_{11}; par ailleurs, par passage à la limite, Δ_A doit diviser le polynome caractéristique de la matrice A_{11}.

3.4. Polynome réducteur et polynome minimal de A_{11}.

Remarque 25. Polynôme réducteur de A et polynôme minimal de A_{11}.

Le polynôme réducteur de A n'est pas forcément égal au polynôme minimal de A_{11} comme le prouve l'exemple suivant.

D'autre part la démonstration précédente montre que lorsque A_{11} est cyclique ces deux polynômes sont égaux.

(nous appellerons « cyclique » toute matrice dont le polynome minimal est égal au polynome caractéristique; en anglais « non derogatory »)

Exemple 26.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Le polynome minimal de A_{11} est $(X-1)^2$, mais le polynome réducteur de A est $(X-1)^3$; comme on peut le constater dans la session suivante de Maxima:

(%i9) $\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&1&1\\0&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$;

(%o9) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i10) `m:%;`

(%o10) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i11) `(m-ident(7));`

(%o11) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i12) `(m-ident(7)).(m-ident(7));`

(%o12) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i13) `(m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));`

(%o13) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i14)

En résumé

Théorème 27.

Soit A une matrice emboitée, l'idéal $I = \{P \in K[X],\ P(A) \in \mathrm{WK}[A, W]\}$ est engendré par un polynôme unitaire $\Delta_A(X)$ qui vérifie $\pi_{A_{11}}(X) | \Delta_A(X) | \chi_{A_{11}}(X)$.

Son degré est donc inférieur ou égal à z_1.

4. La dimension de l'algèbre engendrée par deux matrices qui commutent

Définition 28. *Matrice emboitée admissible*

Une matrice emboitée A sera dite admissible lorsque son polynome réducteur est de degré z_1.

Proposition 29.

A est admissible si et seulement ses réduites le sont.

Démonstration.

S'il existe k tel que le polynome réducteur de la matrice A_k *est de degré strictement inférieur* à z_k *la démonstration par récurrence de la proposition 21 montre que le polynome réducteur de A est de degré strictement inférieur* à z_1=*p*.

La réciproque est évidente. □

Définition 30. *Liste des polynomes réducteurs d'une matrice emboitée*

Soit $A=(A_{\mathrm{ij}})$ *et pour tout* $k\in\{1, ..., t_1\}$ $A_k=(A_{\mathrm{ij}})_{i>k,j>k}$, *on désignera par* $(\Delta_1, ..., \Delta_{t_1})$ *les polynomes réducteurs des réduites* A_k *et par* d_k *leur degrés respectifs.*

Lemme 31. *Avec les notations ci-dessus*

$AW^{k-1}\in W^kC(W) \Longrightarrow A_k \in W_kC\,(W_k)$

Démonstration.

$AW^{k-1}=\mathrm{Z}\mathrm{W}^k \Longrightarrow ({}^tW)^{k-1}AW^{k-1}=({}^tW)^{k-1}ZW^{k-1}\,W \Longleftrightarrow A_k = Z_kW_k$ □

Théorème 32.

Soient $(A,W)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, *où W est une matrice nilpotente sous forme de Weyr et AW=WA.*

Alors dim(K[A,W])$\leqslant\sum_{k=1....t_1} d_k$.

Le Théorème améliore la majoration établie historiquement par Gerstenhaber ([2]), dans l'esprit de la Géométrie Algébrique, et qui a reçu par la suite de nombreuses démonstrations soit dans cet esprit soit plus élémentaires et longues...(dont [1] etc..).

Démonstration.

La démonstration se fera par récurrence sur t_1.

0) Si t_1=1 le résultat est immédiat: A=$A_{1,1}$ et W=I; il suffit d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à t_1-1.

On pose A=$\begin{pmatrix} A_{1,1} & C \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix}$, où $A_{11}\in\mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et W=$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{W_{1,2}}=(W_{1,2}, 0, ..., 0)$ et W_2=$\begin{pmatrix} 0 & W_{2,3} & 0 & .... & 0 \\ ... & 0 & W_{3,4} & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 & & \\ ... & .... & ... & ... & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ est aussi une matrice de Weyr de partition associée (z_2,..,z_{t_1}), $A_2W_2=W_2A_2$, d'où dim($\mathbb{K}[A_2,W_2]$)$\leqslant\sum_{k=2....t_1} d_k$ par application de l'hypothèse de récurrence.

2) D'apres le Théorème 18 $\mathbb{K}$[A,W]=Vect(I,A,..,A^{d_1-1})$\oplus W\mathbb{K}$[A,W].

3) Remarquons que pour k$\geqslant$0 $W^{k+1}A^q$=$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {A_{1,1}}^q & * \\ 0 & A_2^q \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^kA_2^q \end{pmatrix}$.

4) Donc la dimension de Vect($W^{k+1}A^q$, $q \geqslant 0$, $k \geqslant 0$) est inférieure ou égale à celle de Vect($W_2^kA_2^q, q\geqslant 0, k\geqslant 0$), qui est égale à celle de $\mathbb{K}$[A_2,W_2].

D'où la dimension de $\mathbb{K}[A,W]$est inférieure ou égale à $\sum_{k=1....t_1} d_k \leqslant n$.

Le résultat s'étend sans difficulté, dans le cas algèbriquement clos, à toute Algèbre commutative engendrée par 2 matrices. Ce qui constitue le Théorème de Gerstenhaber; on comparera avec [3] qui reprend le schéma de la démonstration du [1] (mais) dans le cadre des matrices de Weyr.

Par ailleurs l'inégalite $\dim(\mathbb{K}[A,\ W])\leqslant\sum_{k=1\dots t_1} d_k$ est une amélioration conséquente du même Théorème; nous y reviendrons plus loin. □

Nous allons maintenant établir une minoration de la dimension de l'Algèbre $\mathbb{K}[A,W]$

Proposition 33.
La famille ($I, A, \dots, A^{d_1-1}, W, \mathrm{WA}, \dots\dots, \mathrm{WA}^{d_2-1}, \dots\dots, \mathbb{W}, \mathrm{WA}, \dots., \mathrm{WA}^{d_{t_1}-1}$) est libre

Démonstration.
Supposons $\sum_{1\leqslant j\leqslant t_p, 0\leqslant p_j\leqslant d_j-1} x_{\mathrm{jp}_j} W^{j-1} A^{p_j}=0$.

On en déduit: $\sum_{0\leqslant p_1\leqslant d_1-1} x_{1,\mathrm{jp}_1} A^{p_1} \in \mathrm{WC}(W)$, d'où les x_{1,jp_1} sont nuls.

d'ou il vient $\sum_{0\leqslant p_2\leqslant d_2-1} x_{2,\mathrm{jp}_2} \mathrm{WA}^{p_2} \in W^2 C(W)$ qui entraine, d'après le lemme 30, $\sum_{0\leqslant p_2\leqslant d_2-1} x_{2,\mathrm{jp}_2} A_2^{p_2} \in \mathrm{W_2C(W_2)}$, d'ou les x_{2,jp_2} sont nuls.

etc...

Ce qui établit le résultat. □

D'où, en fin de compte:

Théorème 34.
La dimension de $\mathbb{K}[A,\ W]$ *est égale à* $\sum_{k=1\dots t_1} d_k$ *et une base en est* ($I, A, \dots, A^{d_1-1}$, W, $\mathrm{WA}, \dots\dots, \mathrm{WA}^{d_2-1}, \dots\dots, \mathbb{W}, \mathrm{WA}, \dots., \mathrm{WA}^{d_{t_1}-1}$)

Ce résultat est original; il améliore la majoration du Théorème de Gerstenhaber, il étend le Théorème de Laffey établi dans le seul cas « homogène » (c'est à dire lorsque les indices $z_1, z_2, \dots$ sont tous égaux). La base proposée est à comparer avec [1].

Théorème 35. *Condition nécessaire et suffisante pour que la dimension de K[A, W] soit égale* à n.

L'Algèbre K[A, W] est de dimension maximale si et seulement si A est admissible.

Démonstration.
La condition est nécessaire comme l'établit le Théorème 33; la proposition 28 établit qu'elle est suffisante .

L'exemple 26 montre que ceci n'est pas équivalent à « $A_{1,1}$ cyclique »

□

Remarque 36.
Ce résultat généralise la condition nécessaire et suffisante établie seulement dans le cas « homogène », c'est à dire lorsque les blocs $\mathrm{A}_{j,j}$ sont tous de même taille (et donc égaux) [3],[5]; dans ces hypothèses la condition se résume à « $\mathrm{A}_{1,1}$ cyclique », on voit que la situation est plus complexe dans le cas général.

Exemple 37.
On trouvera ici un exemple de matrice A, telle que $\mathrm{A}_{1,1}$ n'est pas cyclique mais K[A,W] est de dimension n:

```
(%i3) m:matrix([1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,0,1,1],[0,0,0,1]);
(%i4) m.m;
```

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5) `w:matrix([0,0,1,0],[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,0,0]);`

(%o5) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) `m.w;`

(%o6) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) `a*ident(4)+b*m+c*m.m+d*w;`

(%o7) $$\begin{pmatrix} c+b+a & 0 & d+2\,c+b & 3\,c+b \\ 0 & c+b+a & 0 & 2\,c+b \\ 0 & 0 & c+b+a & d+2\,c+b \\ 0 & 0 & 0 & c+b+a \end{pmatrix}$$

(%i8) `linsolve([a+b+c,b+2*c+d,b+2*c,b+3*c],[a,b,c,d]);`

(%o8) $[a=0,b=0,c=0,d=0]$

(%i9)

Exemple 38.

Ici le degré du polynome minimal de A_{11} est 2; les degrés des polynomes réducteurs sont $d_1=3, d_2=2, d_1=1$ et la dimension de $\mathbb{K}[A,W]$ est 6=3+2+1.

(%i4) `m:matrix([1,1,0,0,0,11,12],[0,1,0,0,0,21,25],[0,0,1,1,0,33,37],[0,0,0,1,0,51,54],[0,0,0,0,1,1,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,1]);`

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5) `(m-ident(7));`

(%o5) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) `(m-ident(7)).(m-ident(7));`

(%o6) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));
```

(%o7) $$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) w:matrix([0,0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0],
      [0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0]);
```

(%o9) $$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) a*ident(7)+b*m+c*m.m+d*w+e*m.w+f*m.m.w+g*w.w+h*m.w.w+i*m.m.w.w;
```

(%o10) $(c+b+a, 2\,c+b, 0, 0, f+e+d, 2\,f+e+43\,c+11\,b, i+h+g+49\,c+12\,b; 0, c+b+a, 0, 0, 0, f+e+d+42\,c+21\,b, 50\,c+25\,b; 0, 0, c+b+a, 2\,c+b, 0, 117\,c+33\,b, 128\,c+37\,b; 0, 0, 0, c+b+a, 0, 102\,c+51\,b, 108\,c+54\,b; 0, 0, 0, 0, c+b+a, 2\,c+b, f+e+d; 0, 0, 0, 0, 0, c+b+a, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, c+b+a)$

```
(%i13) linsolve([a+b+c,2*c+b,f+e+d,2*f+e+43*c+11*b,i+h+g+49*c+12*b,117*c+33*b,
       128*c+37*b,102*c+51*b,108*c+54*b],[a,b,c,d,e,f,g,h,i]);
```

(%o13) $[a=0, b=0, c=0, d=\%r3, e=-2\%r3, f=\%r3, g=-\%r2-\%r1, h=\%r2, i=\%r1]$

(%i14)

La résolution annonce 3 degrés de liberté, donc le rang du système est 9-3=6; ce qui détermine la dimension de l'Algèbre étudiée.

5. Une base de $\mathbb{K}[A,W]$

La démonstration du Théorème 22 nous fournit une procédure pour la détermination d'une base de $\mathbb{K}[A,W]$

i) trouver d_1 L:[I,A,...,A$^{d_1-1}$]

ii) trouver d_2 L:L@[W$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_k \end{pmatrix}$, M_k base de $\mathbb{K}[A_1,W_1]$....

a completer

suite a voir + tard

6. L'ensemble des matrices emboitées admissibles (en chantier)

Il est immédiat que l'ensemble des matrices cycliques est un ouvert dense de l'ensemble C(W) des matrices emboitées.

Théorème 39. *L'ensemble des matrices emboitées admissibles est un ouvert dense de C(W)*

Démonstration.

Pour tout k$\in\{0, ..., p-1\}$ nous désignons par A'$_k$ la matrice A^k, privée de ses lignes secondaires; A est admisssible si et seulement si les matrices (I,A'$_1$, ...,A'$_{p-1}$) sont linéairement indépendantes; ce qui définit un ouvert.

La densité découle de celle de l'ensemble des matrices cycliques, qui sont, comme vu plus haut, admissibles. □

Paris, Juin 2018

Bibliographie:

[1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, Linear Multilinear Algebra 27 (1990), 147-157

[2] M. Gerstenhaber, « *On dominance and varieties of commuting matrices* », Ann. Math., vol. 73,1961, p. 324-348

[3] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.

[4] P. Teller, http://lalgebrisant.fr/images/MatricesCommutantes/LeCommutantesttrigonalisable.pdf

[5] T.J. Laffey, S.Lazarus, Two-generated Commutative Matrix Subalgebras, Linear Algebra and its Applications, 147, 1991, p249-273.

[6] M.G. Neubauer, D.J. Saltman, Two-Generated Commutative Subalgebras of $\mathcal{M}_n(F)$, Journal of Algebra, 164, pp.545-562, 1994.