

# Au pays des matrices fractales

PATRICK TELLER

## RÉSUMÉ.

Les matrices de Weyr sont un substitut, récemment redécouvert ([3],[4]), aux matrices de Jordan; le commutant d'une matrice en blocs de Weyr est un ensemble de matrices qui possèdent une forme particulière, de type fractal.

L'étude des ensembles de matrices fractales permet d'établir directement des propriétés qui ont jusqu'à maintenant exigé, soit des arguments de Géométrie Algébrique, soit de longs artifices matriciels, comme les Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey sur la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par deux matrices. ([2],[5]).

Le premier paragraphe rappelle, pour le lecteur qui en ressentirait la nécessité la forme de Jordan et introduit la forme de Weyr pour une matrice nilpotente.

Le deuxième décrit la structure triangulaire par blocs du commutant d'une matrice sous forme de Weyr, introduisant les matrices fractales (ou emboîtées).

Le troisième ouvre l'étude des propriétés des Algèbres de matrices fractales et établit des propriétés algébriques et « graphiques » qui sont exploitées dans les démonstrations élémentaires des Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey.

Le dernier contient les démonstrations élémentaires annoncées et établit une expression effective de la dimension de l'Algèbre  $K[A,W]$ , ce qui constitue un résultat original.

## 1. LA FORME DE JORDAN ET LA FORME DE WEYR

La forme de Jordan d'une matrice nilpotente est bien connue:

toute matrice nilpotente peut se mettre sous la forme  $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J(t_2) & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & J(t_p) \end{pmatrix}$ , où les indices forment une suite décroissante  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_p$  et pour chaque  $k$

$$J(t_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{t_k}(\mathbb{K});$$
 on conviendra de poser  $t_0=0$ .

La suite  $(t_i)$  sera appelée partition canoniquement associée à  $\Gamma$ .

### Proposition 1. Un ordre sur la base canonique

Soit la base canonique  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{K}^n$  dont on désignera les éléments  $(e_1, \dots, e_n)$  sous la forme  $e_{i,k}$  de la manière suivante:  $e_{i,k}$  représente  $e_{t_0+\dots+t_{i-1}+k}$ .

On dira que  $e_{i,k} \leq e_{j,l}$  lorsque  $k < l$  ou  $k=l$  et  $i \leq j$

Ce qui se traduit par une suite croissante  $\mathcal{C}' = (e_{1,1}, e_{2,1}, \dots, \dots)$

**Remarque 2.** Il s'agit tout simplement d'un ordre lexicographique; on écrira  $(i,j) < (k,l)$

### Proposition 3. Interprétation de la matrice $\Gamma$ et construction de la matrice $W$

On considère la matrice  $\Gamma$  décrite au-dessus et la base canonique  $(e_i)$ , l'action de  $\Gamma$  sur la base peut se lire comme suit:

$$\begin{array}{l} 0 \leftarrow e_{p,1} \leftarrow e_{p,2} \leftarrow \dots \leftarrow e_{p,t_p} \\ 0 \leftarrow e_{p-1,1} \leftarrow e_{p-1,2} \leftarrow \dots \leftarrow e_{p-1,t_{p-1}} \quad * \\ \dots \\ 0 \leftarrow e_{1,1} \leftarrow e_{1,2} \leftarrow \dots \leftarrow \dots \quad \leftarrow e_{1,t_1} \end{array}$$

Posons  $z_1=p, z_2=\text{card}(\{k, t_k \geq 2\}), z_3 = \text{card}(\{k, t_k \geq 3\}), \dots, z_{t_1}$  (on conviendra de poser  $z_{t_p+1}=0$ ), la suite  $(z_u)$  est décroissante, elle sera désignée sous le nom de partition canoniquement associée à  $W$ .

Parcourir la base  $\mathcal{C}'$  dans l'ordre revient à parcourir le tableau  $*$ , colonne après colonne du bas vers le haut et de la gauche vers la droite; la matrice  $\Gamma$  devient alors la matrice (par blocs)  $W=(w_{i,j})$  où le bloc  $W_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i, z_j}(\mathbb{K})$ . Le tableau implique que  $\forall i \in \{1, \dots, t_p - 1\} W_{i, i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i, z_{i+1}}(\mathbb{K})$  (attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et si  $j \neq i+1$   $W_{i,j}=0$ .

$$W = \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & \dots & \dots 0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W_{t_1-1, t_1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ est appelée la matrice de Weyr associée à cette partition.}$$

**Remarque 4.** Cette présentation de la forme de Weyr reprend le chemin totalement empirique qui m'a fait la découvrir; on peut bien entendu définir cette forme de manière indépendante de la forme de Jordan.

On lira dans [3] l'histoire de la redécouverte de cette forme matricielle longtemps oubliée.

**Exemple 5.**

$$\text{Soit } \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(4) & 0 \\ 0 & J(3) \\ 0 & \dots & J(1) \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Proposition 6.** Les puissances de  $W$

$$\text{Soit pour tout } u \geq v \ N_{u,v} = \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{u,v}(K).$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & N_{z_1, z_2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & N_{z_2, z_3} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & N_{z_{t_1-1}, z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_{z_1, z_3} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & N_{z_2, z_4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_{z_{t_1-2}, z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$W^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & N_{z_1, z_{1+k}} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & N_{z_2, z_{2+k}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N_{z_{t_1-k}, z_{t_1}} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Démonstration.**

Il suffit de remarquer que  $N_{u,v} N_{v,w} = N_{u,w}$  □

**Proposition 7.** Une simple propriété des matrices  $N_{u,v} = \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{K})$

- Si  $M \in \mathcal{M}_{tu}(\mathbb{K})$   $MN_{u,v}$  est la matrice  $M$ , privée de ses  $u-v$  dernières colonnes,  
i) l'application  $M \mapsto MN_{u,v}$  est une surjection de  $\mathcal{M}_{t,u}(\mathbb{K})$  sur  $\mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{K})$   
ii) l'application  $M \mapsto N_{u,v}M = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$  est une injection de  $\mathcal{M}_{v,t}(\mathbb{K})$  dans  $\mathcal{M}_{u,t}(\mathbb{K})$

## 2. LE COMMUTANT D'UNE MATRICE (NILPOTENTE) EN BLOCS DE WEYR

Soit  $W$  comme au-dessus, on désignera par  $C(W)$  le commutant de  $W$  (en anglais Centralizer).

**Définition 8.** Matrice emboîtée de partition  $(z_1, \dots, z_{t_1})$

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(K)$  sera dite emboîtée de partition  $(z_1, \dots, z_{t_1})$  lorsque  $M = (M_{i,j})$  où  $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i, z_j}(K)$  et  $\forall (i, j) \ i > j \implies M_{i,j} = 0, \ i \leq j \implies M_{i,j} = \begin{pmatrix} M_{i+1, j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

**Théorème 9.** Le commutant de  $W$

Soit une matrice  $A = (A_{ij})$ ,  $AW = WA$  si et seulement si

$\forall (i, j)$ ,

1.  $i > j \implies A_{i,j} = 0$

2. si  $i \leq j \ A_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i+1, j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$  et donc

1. le commutant de  $W$  est simultanément trigonalisable (par blocs)

2. les éléments du commutant sont les matrices emboîtées de partition  $(z_1, \dots, z_{t_1})$

**Démonstration.**

Soit  $A = (A_{i,j})$  découpée en blocs comme  $W$ .

$AW = WA \iff \forall (i, j) \ A_{i,j} W_{j, j+1} = W_{i, i+1} A_{i+1, j+1}$

1ère étape:

soit  $j < t_1, \ 0 = W_{j, j+1} A_{j+1, 1}$ , d'où  $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} A_{j+1, 1} = 0$ , c'est à dire  $\forall j+1 > 1, \ A_{j+1, 1} = 0$

soit  $1 < j < t_1 \quad A_{j, 1}, W_{1, 2} = W_{j, j+1} A_{j+1, 2}$ , d'où  $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} A_{j+1, 2} = 0$ , c'est à dire  $\forall j+1 > 2,$

$A_{j+1, 2} = 0$  et ainsi de suite, ce qui entraîne que  $A$  est triangulaire supérieure par blocs.

2 ème étape: la diagonale de blocs:

soit  $j < t_1 \ A_{j, j} W_{j, j+1} = W_{j, j+1} A_{j+1, j+1}$ .

si  $z_j = z_{j+1} \ W_{j, j+1} = I_{z_j}$  et donc  $A_{j, j} = A_{j+1, j+1}$

si  $z_j > z_{j+1}$  et si on pose  $A_{j, j} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$  alors  $A_{j, j} W_{j, j+1} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$  et

$W_{j, j+1} A_{j+1, j+1} = \begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} A_{j+1, j+1} = \begin{pmatrix} A_{j+1, j+1} \\ 0 \end{pmatrix}$ , d'où  $A_{j, j} = \begin{pmatrix} A_{j+1, j+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$ .

D'où la diagonale de blocs principale de la matrice  $A$ : une chaîne de matrices emboîtées.

3ème étape: au-dessus de la diagonale de blocs

soit  $j < k < t_1 \ A_{j, k} W_{k, k+1} = W_{j, j+1} A_{j+1, k+1}$ , qui conduit à un résultat analogue

$A_{j, k} = \begin{pmatrix} A_{j+1, k+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$ .

On en déduit que  $W_{i, i+1} A_{ij} W_{j, j+1} = A_{i+1, j+1}$ . □

**Remarque 10.**

Comme toute matrice (dans le cas d'un corps algébriquement clos) est semblable à une somme directe de matrices de Jordan, donc aussi de matrices de Weyr, la trigonalisabilité (par blocs) sera vraie pour le commutant d'une matrice quelconque à coefficients dans un tel corps.

Il est surprenant que cette propriété soit si peu explicitée. [3],[4].

Pour la suite ces définitions et propriétés:

**Définition 11.** Réduction d'ordre  $k$  d'une matrice de  $C(W)$

Soit une matrice  $M=(M_{i,j})$  de  $C(W)$  on désignera sous le nom de réduite d'ordre  $k$  la matrice  $M_k=(M_{i,j})_{i \geq k, j \geq k}$ .

**Proposition 12.** Expression algébrique de la réduction

Soit une matrice  $M=(M_{i,j})$  de  $C(W)$ ,  ${}^tW^k M W^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_k \end{pmatrix}$

**Démonstration.**

Il suffit d'établir le résultat pour  $k=1$ , ce qui se fait en appliquant la relation  ${}^tW_{i,i+1} A_{ij} W_{j,j+1} = A_{i+1,j+1}$ .  $\square$

### 3. DES MATRICES DE TYPE « FRACTAL »

Ce paragraphe vient de la remarque que les propriétés des matrices du commutant de  $W$  doivent se lire dans la forme de celles-ci, c'est à dire leur aspect « fractal ».

#### 3.1. Aspect Algébrique.

**Définition 13.** lignes et colonnes, primaires et secondaires

Soit une matrice emboîtée  $M=(M_{ij})_{(i,j) \in \{1,..,t_1\}^2}$  pour chaque  $j < t_1$  on note  $M_{jj} = \begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j+1,j+1} \end{pmatrix}$ , avec  $M_{t_1 t_1} = 0$ .

On appellera primaires les lignes et les colonnes de  $M$  qui apparaissent dans les matrices  $N_{jj}$ , c'est à dire celles numérotées  $\sum_{k=1..i} z_k - z_{i+1} + 1$  jusqu'à  $\sum_{k=1..i} z_k$ , les autres seront appelées secondaires.

**Exemple 14.**

$$\text{les lignes primaires} \begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & iiiii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ ici lignes 2,3,4 et 6,7 et 8}$$

$$\text{les colonnes primaires} \begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & iiiii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ ici colonnes 2,3,4 et 6,7 et 8}$$

**Lemme 15.**

Soit une matrice emboîtée  $M=(M_{ij})_{(i,j) \in \{1,..,t_1\}^2}$  pour chaque  $j < t_1$  on note  $M_{jj} = \begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j+1,j+1} \end{pmatrix}$ , avec  $M_{t_1+1,t_1+1} = 0$ , on désigne par  $\rho_j$  le polynome minimal de  $N_{jj}$  et  $\mu_q = \rho_q \cdots \rho_{t_1-1} \rho_{t_1}$  et  $\mu = \mu_1$

Dans la matrice  $\mu(M)$  les blocs  $\mu(M_{jj})$  sont nuls, de même que les lignes primaires toutes entières sont nulles.

On remarquera que le degré de  $\mu$  est égal à la somme des tailles des  $N_{jj}$ , c'est à dire la taille de  $M_{11}$ :  $p$ .

**Démonstration.** la partie concernant les blocs de la diagonale est immédiate.

le reste se démontre par récurrence à partir de la remarque suivante:

Pour toute matrice emboîtée

lorsque sur une diagonale de blocs le bloc supérieur est de taille  $(u,v)$  et le bloc inférieur est de taille  $(u',v')$ , si  $v > v'$  les  $u-u'$  dernières coordonnées des  $v'$  premières colonnes sont nulles; il s'agit donc des éléments des colonnes secondaires dans les lignes primaires: d'où, dans  $\rho_i(M)$ , qui est une matrice emboîtée, les lignes primaires numérotées  $\sum_{k=1\dots i} z_k - z_{i+1} + 1, \dots, \sum_{k=1\dots i} z_k$  (c'est à dire celles qui contiennent le bloc  $\rho_i(N_{ii}) = 0$ ) **contiennent des zéros dans les colonnes secondaires**, elles ont donc l'allure suivant  $(\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & \rho_i(N_{ii})=0 & 0 & * & 0 & * & \dots & * & 0 \end{matrix})$ , où la partie mauve est nulle parce que la matrice est triangulaire supérieure, et dans la partie verte les zéros corespondent à notre remarque.

et, si nous supposons que dans  $\rho_{i+1}(M)\dots\rho_{t_1}(M)$  les colonnes ont l'allure suivante

$$\begin{pmatrix} * \\ \dots \\ * \\ *_{ij} \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ \dots \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est à dire les lignes primaires de numéros supérieurs ou égaux à  $\sum_{k=1\dots i} z_k + 1$  sont nulles (la partie bleue), ce qui traduit l'hypothèse de récurrence, on voit clairement qu'après le produit  $\rho_i(M)\rho_{i+1}(M)\dots\rho_{t_1}(M)$  les lignes primaires numérotées  $\sum_{k=1\dots i} z_k - z_{i+1} + 1, \dots, \sum_{k=1\dots i} z_k$  sont nulles.

Il suffit pour initialiser de traiter le cas de  $\rho_{t_1}(M_{t_1,t_1})$  qui est immédiat. □

**Exemple 16.**

```
(%i5) m:matrix([1,9,8,8,13,4,5],[0,2,8,8,3,4,5],[0,0,8,8,0,40,51],[0,0,7,8,0,4,5],[0,0,0,0,1,9,13],[0,0,0,0,0,2,3],[0,0,0,0,0,0,1]);
```

```
(%o5) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i6) m-ident(7);
```

```
(%o6) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i7) (m-ident(7)).(m-2*ident(7));
```

```
(%o7) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 176 & 184 & 14 & 505 & 669 \\ 0 & 0 & 112 & 120 & 0 & 383 & 499 \\ 0 & 0 & 98 & 104 & 0 & 312 & 466 \\ 0 & 0 & 91 & 98 & 0 & 308 & 399 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i8) (m-ident(7)).(m-2*ident(7)).(m.m-16*m+8*ident(7));
```

$$(\%o8) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -98 & -1242 & 236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i9)

### 3.2. Aspect « graphique ».

Nous allons détailler les propriétés des blocs de la première ligne d'une matrice emboîtée.

Exemple 17.  $A = \begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & ii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & c_{11} & c_{12} & d_{11} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & c_{21} & c_{22} & d_{21} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & c_{31} & c_{32} & d_{31} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} & c_{41} & c_{42} & d_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 & 0 & b_{54} & b_{55} & 0 & c_{52} & d_{51} \\ & & & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_{11} & b_{12} & c_{11} \\ & & & & & 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_{21} & b_{22} & c_{21} \\ & & & & & 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & b_{32} & c_{31} \\ & & & & & 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & b_{42} & c_{41} \\ & & & & & & & & & a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ & & & & & & & & & 0 & a_{22} & b_{21} \\ & & & & & & & & & & & a_{11} \end{pmatrix}$$

#### Remarque 18.

Une matrice emboîtée  $A$  est déterminée par sa première ligne (de blocs):  $A_{11}, \dots, A_{1t_1}$  (que nous appellerons « bord directeur » en référence à la dénomination « leading edge » dans le [3]); mais, attention, l'exemple ci-dessus met en évidence le fait que tout « bord directeur » ne définit pas une matrice emboîtée, il faut respecter la place des zéros.

Dans le cas d'une matrice emboîtée chaque bloc  $A_{1j}$  contient des copies des blocs  $A_{i,j-i-1}$

**Définition 19.** *Profondeur d'un vecteur colonne, profil d'une matrice*

Soit  $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix}$  on appellera profondeur de  $V$  l'entier  $\max\{i, v_i \neq 0\}$  (si  $V=0$  on conviendra que sa profondeur est nulle).

Dans le cas où  $V$  peut prendre diverses valeurs nous appellerons profondeur générique le maximum des profondeurs.

Nous appellerons profil d'une matrice la suite des profondeurs de ses colonnes et profil générique le maximum des profils.

Nous allons repérer dans chaque colonne d'un bloc du bord déterminant la profondeur générique; dans l'exemple ci-dessus:

$$A_{11}:(1,3,3,4), A_{12}:(3,4,4), A_{13}:(4)$$

**Proposition 20.** *Caractérisation des blocs directeurs d'une matrice emboîtée*

Soit  $W$  de partition associée  $(z_1, \dots, z_{t_1})$  et  $A = (A_{ij})$  une matrice emboîtée de partition  $(z_1, \dots, z_{t_1})$  alors pour chaque  $j \in \{1, \dots, t_1\}$

i) le profil générique du bloc  $A_{1j}$  est égal à  $(z_{t_1-j+1}^{z_{t_1}}, z_{t_1-j}^{z_{t_1-1}-z_{t_1}}, \dots, z_1^{z_j-z_{j+1}})$

ii) une suite de blocs  $(M_j)$  est le bord directeur d'une matrice emboîtée si et seulement si pour chaque  $j$  le profil du bloc  $M_j$  est inférieur ou égal à  $(z_{t_1-j+1}^{z_{t_1}}, z_{t_1-j}^{z_{t_1-1}-z_{t_1}}, \dots, z_1^{z_j-z_{j+1}})$ .

**Démonstration.**

i) Se fait par récurrence en « remontant » chaque diagonale depuis  $A_{t_1-j+1, t_1}$  et en ajoutant autant de lignes de zéros que nécessaire chaque fois que l'on passe à un bloc dont le nombre de lignes est strictement supérieur.

ii) il suffit de remarquer que pour chaque bloc du bord directeur la seule contrainte concerne les « zéros imposés » par la remontée et que si les profondeurs vérifient les contraintes on peut construire une matrice emboîtée à partir du bord directeur.  $\square$

$$\left( \begin{array}{ccc} & & \\ & A_{13} & \\ & & A_{24} \\ & & & \\ & & & & A_{35} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \left( \begin{array}{cccccc} a & aa & d & e & f & g \\ b & bb & dd & ee & ff & gg \\ c & cc & ddd & eee & fff & ggg \\ 0 & 0 & dddd & eeee & ffff & gggg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ffff & ggggg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & fffff & gggggg \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{ccc} a & aa & d & e \\ b & bb & dd & ee \\ c & cc & ddd & eee \\ 0 & 0 & dddd & eeee \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{c} a & aa \\ b & bb \\ c & cc \end{array} \right) \end{array} \right)$$

**Proposition 21.** Caractérisation de l'idéal  $WC(W)$

L'ensemble  $WC(W)$  est un idéal et une matrice emboîtée  $M$  appartient à  $WC(W)$  si et seulement

$M_{11}=0$  et pour tout  $j \geq 2$  le profil du bloc  $M_{1j}$  est inférieur ou égal à  $(z_{t_1-j+2}^{z_{t_1}}, z_{t_1-j+1}^{z_{t_1-1}-z_{t_1}}, \dots, z_2^{z_j-z_{j+1}})$ .

**Démonstration.**  $\square$

$WC(W)$  est un idéal bilatère parce que les matrices de  $C(W)$  commutent avec  $W$ .

Soit une matrice emboîtée  $T$ , alors pour chacun de ses blocs  $T_{1j-1}$  ( $2 \leq j \leq t_1$ ) le profil est inférieur ou égal à  $(z_{t_1-(j-1)+1}^{z_{t_1}}, z_{t_1-j+1}^{z_{t_1-1}-z_{t_1}}, \dots, z_1^{z_{j-1}-z_j})$ , par suite, le bloc  $(WT)_{1j} = T_{1j-1}W_{j-1, j}$ , égal au bloc  $T_{1j-1}$  privé de ses  $z_{j-1} - z_j$  dernières colonnes, a un profil inférieur ou égal à  $(z_{t_1-(j-1)+1}^{z_{t_1}}, z_{t_1-j+1}^{z_{t_1-1}-z_{t_1}}, \dots, z_2^{z_j-z_{j+1}})$ .

Réciproquement, pour tout  $j \geq 2$ , quelle que soit la matrice  $C_j \in \mathcal{M}_{z_1 \times z_j}(\mathbb{K})$  il existe des matrices  $T_{1j-1} \in \mathcal{M}_{z_1 \times z_{j-1}}(\mathbb{K})$  telles que  $T_{1j-1}W_{j-1, j} = C_j$  (proposition 7).

Le bloc  $T_{1j-1}W_{j-1, j}$  est tout simplement égal au bloc  $T_{1j-1}$  privé de ses  $z_{j-1} - z_j$  dernières colonnes, donc si le profil de  $C_j$  est inférieur ou égal à  $(z_{t_1-j+2}^{z_{t_1}}, z_{t_1-j+1}^{z_{t_1-1}-z_{t_1}}, \dots, z_2^{z_j-z_{j+1}})$  on peut trouver pour chaque  $j-1 > 0$  une matrice  $T_{1j-1} \in \mathcal{M}_{z_1 \times z_{j-1}}(\mathbb{K})$  dont le profil est inférieur ou égal à  $(z_{t_1-(j-1)+1}^{z_{t_1}}, z_{t_1-j+1}^{z_{t_1-1}-z_{t_1}}, \dots, z_1^{z_{j-1}-z_j})$ .

En complétant par un bloc  $T_{1t_1} \in \mathcal{M}_{z_1 \times z_{t_1}}(\mathbb{K})$  on obtient le bord directeur d'une matrice  $T$  emboîtée.

**Proposition 22.** Si  $A$  est une matrice emboîtée générique  $WC(W) \cap \mathbb{K}[A, W] = W\mathbb{K}[A, W]$

**Démonstration.**

JE N'ARRIVE PAS A LE DEMONTRER bien que tous les exemples traités sur Maxima le manifestent  $\square$

**Théorème 23.**

Soit une matrice emboîtée  $A$ , il existe un polynôme  $P(X)$  non nul et de degré inférieur ou égal à  $z_1 = p$  et une matrice emboîtée  $B$  tels que  $P(A) = WB$

**Démonstration.**

Il a été montré plus haut que dans chaque bloc  $\mu(A)_{ij}$  de  $\mu(A)$  les  $z_i - z_{i+1}$  dernières lignes sont nulles donc le profil du bloc  $\mu(A)_{1j}$  est inférieur ou égal à  $(z_{t_1-j+2}^{z_{t_1}}, z_{t_1-j+1}^{z_{t_1-1}-z_{t_1}}, \dots, z_2^{z_j-z_{j+1}})$ .

Donc il existe une matrice  $T$  de  $C(W)$  telle que  $TW = \mu(A)$ .

Comme  $WC(W)$  est un idéal, il en est de même pour  $\{P, P(A) \in WC(W)\}$ , nous désignerons par  $\Delta$  un générateur de cet idéal; il est un multiple du polynôme minimal de  $A_{11}$  puisqu'il en est annulateur et un diviseur de son polynôme caractéristique (Cayley-Hamilton) puisque chacun des polynômes minimaux  $\rho_i$  divise son polynôme caractéristique. il est de degré inférieur ou égal à  $z_1=p$ ; on l'appellera polynôme directeur de la matrice  $A$ .  $\square$

**Remarque 24.** Polynôme directeur de  $A$  et polynôme minimal de  $A_{11}$ .

Le polynôme directeur de  $A$  n'est pas forcément égal au polynôme minimal de  $A_{11}$  comme le prouve l'exemple suivant.

D'autre part la démonstration précédente montre que lorsque  $A_{11}$  est cyclique ces deux polynômes sont égaux.

(nous appellerons « cyclique » toute matrice dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique; en anglais « non derogatory »)

**Exemple 25.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme minimal de  $A_{11}$  est  $(X - 1)^2$ , mais le polynôme directeur de  $A$  est  $(X - 1)^3$ ; comme on peut le constater dans la session suivante de Maxima:

$$(\%i9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(\%o9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i10) m: %;

$$(\%o10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i11) (m-ident(7));



$$(\%o11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i12) (m-ident(7)).(m-ident(7));

$$(\%o12) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i13) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));

$$(\%o13) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i14)

La proposition 22 et le Théoreme 23 entraînent

**Théorème 26.**

Soit une matrice emboîtée  $A$  et son polynome directeur  $\Delta$ ,  $\Delta(A)$  appartient à  $W\mathbb{K}[A, W]$ .

4. LA DIMENSION DE L'ALGÈBRE ENGENDRÉE PAR DEUX MATRICES QUI COMMUTENT

**Définition 27.** *Matrice emboîtée admissible*

Une matrice emboîtée  $A$  sera dite admissible lorsque son polynome directeur est de degré  $z_1$ .

**Proposition 28.**

$A$  est admissible si et seulement ses réduites le sont.

**Démonstration.**

S'il existe  $k$  tel que le polynome directeur de la matrice  $A_k$  est de degré strictement inférieur à  $z_k$  la démonstration par récurrence du lemme 15 montre que le polynome directeur de  $A$  est de degré strictement inférieur à  $z_1=p$ .

La réciproque est évidente. □

**Définition 29.** *Liste des polynomes directeurs d'une matrice emboîtée*

Soit  $A=(A_{ij})$  et pour tout  $k \in \{1, \dots, t_1\}$   $k=(A_{ij})_{i \geq k, j \geq k}$ , on désignera par  $(\Delta_1, \dots, \Delta_{t_1})$  les polynomes directeurs des réduites  $A_k$  et par  $d_k$  leur degrés respectifs.

**Lemme 30.** *Avec les notations ci-dessus*

$$AW^{k-1} \in W^k C(W) \implies A_k \in W_k C(W_k)$$

**Démonstration.**

$$AW^{k-1}=ZW^k \implies ({}^tW)^{k-1}AW^{k-1}=({}^tW)^{k-1}ZW^{k-1}W \iff A_k = Z_kW_k \quad \square$$

**Théorème 31.**

Soient  $(A, W) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , où  $W$  est une matrice nilpotente sous forme de Weyr et  $AW=WA$ .

Alors  $\dim(\mathbb{K}[A, W]) \leq \sum_{k=1, \dots, t_1} d_k$ .

Le Théorème améliore la majoration établie historiquement par Gerstenhaber ([2]), dans l'esprit de la Géométrie Algébrique, et qui reçu par la suite de nombreuses démonstrations dans cet esprit ou plus élémentaires et longues... (dont [1] etc..).

**Démonstration.**

La démonstration se fera par récurrence sur  $t_1$ .

0) Si  $t_1=1$  le résultat est immédiat:  $A=A_{11}$  et  $W=I$ ; il suffit d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à  $t_1-1$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & C \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ , où  $A_{11} \in \mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , et  $W = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}$ ,  $\widetilde{W}_{12} = (W_{12}, 0, \dots, 0)$  et  $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & W_{23} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & W_{34} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & W \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  est aussi une matrice de Weyr de partition associée  $(z_2, \dots, z_{t_1})$ ,  ${}_1(\mathbb{K})^2$  et  $A_1W_1=W_1A_1$ , d'où  $\dim(\mathbb{K}[A_1, W_1]) \leq \sum_{k=2, \dots, t_1} d_k$  par application de l'hypothèse de récurrence.

2) Remarquons que pour  $k \geq 0$   $W^{k+1}A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}^k A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^q & * \\ 0 & A_1^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1^{k-1} A_1^q \end{pmatrix}$ .

$$3) \Delta_1(A) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \Delta_1(A_1) \end{pmatrix} = TW = T \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}.$$

**Démonstration.**

La démonstration se fera par récurrence sur  $t_1$ .

0) Si  $t_1=1$  le résultat est immédiat:  $A=A_{11}$  et  $W=I$ ; il suffit d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à  $t_1-1$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & C \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ , où  $A_{11} \in \mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , et  $W = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}$ ,  $\widetilde{W}_{12} = (W_{12}, 0, \dots, 0)$  et  $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & W_{23} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & W_{34} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & W \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  est aussi une matrice de Weyr de partition associée  $(z_2, \dots, z_{t_1})$ ,  ${}_1(\mathbb{K})^2$  et  $A_1W_1=W_1A_1$ , d'où  $\dim(\mathbb{K}[A_1, W_1]) \leq \sum_{k=2, \dots, t_1} d_k$  par application de l'hypothèse de récurrence.

2) D'après la proposition 22 et les suivantes  $\mathbb{K}[A, W] = \text{Vect}(I, A, \dots, A^{d_1-1}) \oplus W\mathbb{K}[A, W]$ .

3) Remarquons que pour  $k \geq 0$   $W^{k+1}A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^q & * \\ 0 & A_1^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1^k A_1^q \end{pmatrix}$ .

4) Donc la dimension de  $\text{Vect}(W^{k+1}A^q, q \geq 0, k \geq 0)$  est inférieure ou égale à celle de  $\text{Vect}(W_1^k A_1^q, q \geq 0, k \geq 0)$ , qui est égale à celle de  $\mathbb{K}[A_1, W_1]$ .

D'où la dimension de  $\mathbb{K}[A, W]$  est inférieure ou égale à  $\leq \sum_{k=1, \dots, t_1} d_k \leq n$ .

D'où la dimension de l'Algèbre  $\mathbb{K}[A, W]$  est inférieure ou égale à  $n$ ; le résultat s'étend sans difficulté, dans le cas algébriquement clos, à toute Algèbre commutative engendrée par 2 matrices. Ce qui constitue le Théorème de Gerstenhaber; on comparera avec [3] qui reprend le schéma de la démonstration du [1] (mais) dans le cadre des matrices de Weyr.

Par ailleurs l'inégalité  $\dim(\mathbb{K}[A, W]) \leq \sum_{k=1, \dots, t_1} d_k$  est une amélioration conséquente du même Théorème; nous y reviendrons plus loin.  $\square$

On en déduit que la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par deux matrices de taille  $n$  est inférieure ou égale à  $n$ .

$$\begin{aligned}
& 4) \text{ Par suite } \forall q \geq d_1, \forall k \in \{0, \dots, t_1 - 2\}, A^{q-d_1} \Delta_1(A) W^k = \\
& \mathbb{T} \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{q-d_1} & ** \\ 0 & A_1^{q-d_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1^k \end{pmatrix} = \\
& \mathbb{T} \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & **W_1^k \\ 0 & W_1^k A_1^{q-d_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \Delta_1(A_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & **W_1^k \\ 0 & W_1^k A_1^{q-d_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & **W_1^k \\ 0 & W_1^k A_1^{q-d_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \Delta_1(A_1) \end{pmatrix} = \\
& \begin{pmatrix} 0 & **W_1^k \Delta_1(A_1) \\ 0 & W_1^k A_1^{q-d_1} \Delta_1(A_1) \end{pmatrix}; \text{ supposons } \sum x_{k,q} W_1^k A_1^{q-d_1} \Delta_1(A_1) = 0 \text{ alors, comme la matrice } \sum \\
& x_{k,q} \begin{pmatrix} 0 & *W_1^k \Delta_1(A_1) \\ 0 & W_1^k A_1^{q-d_1} \Delta_1(A_1) \end{pmatrix} \text{ est emboitee alors}
\end{aligned}$$

La dernière matrice est emboitee donc si le bloc  $V$  est nul il en est de même pour les blocs du bord directeur  $(0, U_2, \dots, U_{t_1-1})$ ; d'autre part le bloc  $(W_1^k A_1^{q-d_1} \Delta_1(A_1))_{t_1, t_1}$  est nul donc le bloc  $U_t$  aussi.

En conclusion la dimension du sous-espace  $\text{Vect}(W^k A^{q-d_1} \Delta_1(A), q \geq d_1, k \geq 0)$  est inférieure ou égale à celle de  $\text{Vect}(W_1^k A_1^{q-d_1} \Delta_1(A_1), q \geq d_1, k \geq 0)$

5) D'autre part comme pour  $q < d_1$  et  $k > 0$   $W^k A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{12} \\ 0 & W_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_1^{k-1} A_1^q \end{pmatrix}$  la dimension de  $\text{Vect}(W^k A^q, q < d_1, k \geq 1)$  est inférieure ou égale à celle de  $\text{Vect}(W_1^k A_1^q, q < d_1, k - 1 \geq 0)$  (en fait la proposition 7.ii entraîne l'égalité).

D'où la dimension de  $\mathbb{K}[A, W] \cap \text{WC}(W)$  est inférieure ou égale à la somme des dimensions de  $\text{Vect}(W^k A_1^{q-d_1} \Delta_1(A_1), q \geq d_1, k \geq 0)$  et de  $\text{Vect}(W_1^k A_1^q, q < d_1, k \geq 1)$ , c'est à dire inférieure ou égale à celle de  $\text{Vect}(W_1^k A_1^q, q \geq 0, k \geq 0)$

6) Il ne manque donc plus que  $\text{Vect}(I, A, \dots, A^{d_1-1})$  dont la dimension est égale à  $d_1$ .

7) Au total:

$$\dim(\text{Vect}(W^k A^q, q \geq 0, k \geq 0)) \leq \sum_{k=1, \dots, t_1} d_k \leq n.$$

D'où la dimension de l'Algèbre  $\mathbb{K}[A, W]$  est inférieure ou égale à  $n$ ; le résultat s'étend sans difficulté, dans le cas algébriquement clos, à toute Algèbre commutative engendrée par 2 matrices. Ce qui constitue le Théorème de Gerstenhaber; on comparera avec [3] qui reprend le schéma de la démonstration du [1] (mais) dans le cadre des matrices de Weyr.

Par ailleurs l'inégalité  $\dim(\text{Vect}(W^k A^q, q \geq 0, k \geq 0)) \leq \sum_{k=1, \dots, t_1} d_k$  est une amélioration conséquente du même Théorème; nous y reviendrons plus loin.  $\square$

On en déduit que la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par deux matrices de taille  $n$  est inférieure ou égale à  $n$ .

Nous allons maintenant établir une minoration de la dimension de l'Algèbre  $\mathbb{K}[A, W]$

### Proposition 32.

*La famille  $(I, A, \dots, A^{d_1-1}, W, WA, \dots, WA^{d_2-1}, \dots, W, WA, \dots, WA^{d_{t_1}-1})$  est libre*

### Démonstration.

Supposons  $\sum_{1 \leq j \leq t_p, 0 \leq p_j \leq d_j-1} x_{j,p_j} W^{j-1} A^{p_j} = 0$ .

On en déduit:  $\sum_{0 \leq p_1 \leq d_1-1} x_{1,p_1} A^{p_1} \in \text{WC}(W)$ , d'où les  $x_{1,p_1}$  sont nuls.

d'où il vient  $\sum_{0 \leq p_2 \leq d_2-1} x_{2,p_2} WA^{p_2} \in W^2 C(W)$  qui entraîne, d'après le lemme 30,

$\sum_{0 \leq p_2 \leq d_2-1} x_{2,p_2} B_2^{p_2} \in W_2 C(W_2)$ , d'où les  $x_{2,p_2}$  sont nuls.

etc...

Ce qui établit le résultat.  $\square$

D'où, en fin de compte:

**Théorème 33.**

La dimension de  $\mathbb{K}[A, W]$  est égale à  $\sum_{k=1 \dots t_1} d_k$

Ce résultat est original; il améliore la majoration du Théorème de Gerstenhaber, il étend le Théorème de Laffey établi dans le seul cas « homogène » ( c'est à dire lorsque les indices  $z_1, z_2, \dots$  sont tous égaux).

**Théorème 34.** Condition nécessaire et suffisante pour que la dimension de  $\mathbb{K}[A, W]$  soit égale à  $n$ .

L'Algèbre  $\mathbb{K}[A, W]$  est de dimension maximale si et seulement si  $A$  est admissible.

**Démonstration.**

La condition est nécessaire comme l'établit le Théorème 30; la proposition 26 établit qu'elle est suffisante .

L'exemple 24 montre que ceci n'est pas équivalent à «  $A_{11}$  cyclique »

□

**Remarque 35.**

Ce résultat généralise la condition nécessaire et suffisante établie seulement dans le cas « homogène », c'est à dire lorsque les blocs  $A_{jj}$  sont tous de même taille (et donc égaux) [3],[5]; dans ces hypothèses la condition se résume à «  $A_{11}$  cyclique », on voit que la situation est plus complexe dans le cas général.

**Exemple 36.**

On trouvera ici un exemple de matrice  $A$ , telle que  $A_{11}$  n'est pas cyclique mais  $\mathbb{K}[A, W]$  est de dimension  $n$ :

(%i3) `m:matrix([1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,0,1,1],[0,0,0,1]);`

(%i4) `m.m;`

(%o4) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5) `w:matrix([0,0,1,0],[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,0,0]);`

(%o5) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) `m.w;`

(%o6) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) `a*ident(4)+b*m+c*m.m+d*w;`

(%o7) 
$$\begin{pmatrix} c+b+a & 0 & d+2c+b & 3c+b \\ 0 & c+b+a & 0 & 2c+b \\ 0 & 0 & c+b+a & d+2c+b \\ 0 & 0 & 0 & c+b+a \end{pmatrix}$$

(%i8) `linsolve([a+b+c,b+2*c+d,b+2*c,b+3*c],[a,b,c,d]);`

(%o8) `[a=0,b=0,c=0,d=0]`

(%i9)

## 5. L'ENSEMBLE DES MATRICES EMBOITÉES ADMISSIBLES

Il est immédiat que l'ensemble des matrices cycliques est un ouvert dense de l'ensemble  $C(W)$  des matrices emboîtées.

**Théorème 37.** *L'ensemble des matrices emboîtées admissibles est un ouvert dense de  $C(W)$*


**Démonstration.**

Pour tout  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  nous désignons par  $A'_k$  la matrice  $A^k$ , privée de ses lignes secondaires;  $A$  est admissible si et seulement si les matrices  $(I, A'_1, \dots, A'_{p-1})$  sont linéairement indépendantes; ce qui définit un ouvert.

La densité découle de celle de l'ensemble des matrices cycliques. □

Paris, Février 2018

Bibliographie:

- [1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, *Linear Multilinear Algebra* 27 (1990), 147-157 
- [2] M. Gerstenhaber, « *On dominance and varieties of commuting matrices* », *Ann. Math.*, vol. 73, 1961, p. 324-348
- [3] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, *Advanced Topics in Linear Algebra*, Oxford University Press, 2011.
- [4] P. Teller, <http://laldebrisant.fr/images/MatricesCommutantes/LeCommutantestrigonalisable.pdf>
- [5] T.J. Laffey, S.Lazarus, Two-generated Commutative Matrix Subalgebras, *Linear Algebra and its Applications*, 147, 1991, p249-273.