Une (autre) démonstration (très) élémentaire du théorème du bicommutant

PAR PATRICK TELLER

Le théorème du bicommutant établit que si M$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et si Cent(M)$=\{P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{PM}=\mathrm{MP}\}$ alors $\{Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P\in\mathrm{Cent}(M), \mathrm{QP}=\mathrm{PQ}\}=\mathbb{C}[M]$, nous allons en proposer une démonstration originale qui repose sur la description du commutant d'une somme de blocs de Jordan.

Rappelons brièvement le commutant d'une matrice sous forme de blocs de Jordan [1]

1 Matrices de Toeplitz Triangulaires (supérieures)

On désignera ici par $J(k)$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, elle est nilpotente d'ordre k.

1. On appellera matrices de Toeplitz triangulaires supérieures les matrices de la forme $A_{\mathrm{ij}}=\begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix}$ (t_i lignes, t_j colonnes avec $t_i\leqslant t_j$) ou $\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j)) \\ 0 \end{pmatrix}$ (t_i lignes, t_j colonnes avec $t_i\geqslant t_j$), où les Q_{ij} sont des polynomes.

On désignera par T_{t_i,t_j} ces ensembles de matrices.

On sait qu'usuellement les matrices de Toeplitz sont des matrices carrées et elles sont caractérisées par le fait que toutes les parallèles à la diagonale principales sont constantes; les TTS (Toeplitz triangulaires supérieures) sont (peuvent être) rectangulaires et le triangle auquel il est fait allusion est le « triangle rectangle du coin supérieur droit ».

Exemple 1.

La matrice suivante est de Toeplitz $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, les trois suivantes sont TTS $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 2.

On appellera anti-transposition la symétrie par rapport à la « seconde » diagonale, qui transforme une matrice TTS de $\mathcal{M}_{t_i,t_j}(\mathbb{C})$ en une matrice TTS de $\mathcal{M}_{t_j,t_i}(\mathbb{C})$:

Exemple 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*; on peut la réaliser comme suit* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *suivi d'une transposition.*

L'anti-transposition est une involution linéaire.

Proposition 4. *Pourquoi des matrices de Toeplitz Triangulaires Supérieures ?*

1) Soit la matrice J(k) et M=(m_{ij}) $\in\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, MJ(k)=J(k)M si et seulement si $\forall(i,j)$ $m_{ij}=m_{i+1,j+1}$; c'est à dire M est une matrice TTS (carrée).

2) Soit les entiers r$\neq s$, les matrices J(r), J(s) et M=(m_{ij}) $\in\mathcal{M}_{rs}(\mathbb{C})$, MJ(s)=J(r)M si et seulement si $\forall(i,j)$ $m_{ij}=m_{i+1,j+1}$; c'est à dire M est une matrice TTS.

Démonstration.

1) Ce résultat est plus que classique.

2) Considérons d'abord le cas r<s.

Ce cas s'étudie de même que le 1): d'abord $\forall(i,j)$ $m_{ij}=m_{i+1,j+1}$, puis $m_{rs}=0$ et $\forall j, m_{rj}=m_{r,j+1}$; d'où M est une matrice TTS, il ne reste qu'à vérifier que ceci est suffisant.

Le cas r>s se déduit par anti-transposition. □

2 Blocs de Toeplitz

Soit un entier strictement positif n et une suite d'entiers strictement positifs $t_1 \leqslant t_2 ...... \leqslant t_p$ tels que $t_1+t_2+...+t_p=n$, on appellera Matrice en Blocs de Toeplitz, de type $(t_1, t_2, ..., t_p)$, toute matrice M$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formée de blocs ($M_{ij}$) de Toeplitz triangulaires supérieures, de tailles respectives $t_i \times t_j$.

3 Le commutant d'une matrice sous forme de Jordan

a. On notera $J(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & ... & ... & ... \\ ... & 0 & ... & 1 & ... \\ ... & ... & ... & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ il est immédiat que si A est une matrice carrée, $AJ(\lambda)=J(\lambda)A \Longleftrightarrow A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & ... & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & ... & ... & a_{k-2} \\ ... & 0 & ... & a_1 & \\ ... & ... & ... & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_0 \end{pmatrix}$, c'est à dire A est un polynôme en $J(\lambda)=P(J(\lambda_i))$; c'est une matrice TTS.

Par suite, si B ne contient qu'un bloc de Jordan par valeur propre, le commutant de B sera constitué par les matrices de la forme $\begin{pmatrix} P_1(J(\lambda_1)) & & & & \\ & P_2(J(\lambda_2)) & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & P_r(J(\lambda_r)) \end{pmatrix}=P_1(J(\lambda_1)) \oplus ...... \oplus P_r(J(\lambda_r))$; c'est une matrice en blocs de Toeplitz, qui plus est elle est diagonale par blocs.

b. Cas de plusieurs blocs de Jordan pour une même valeur propre.

Soit $\Gamma(\lambda_k)=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_k) & & & & \\ & J_2(\lambda_k) & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_p(\lambda_k) \end{pmatrix}=J_1(\lambda_k) \oplus .... \oplus J_{u_k}(\lambda_k)$; pour déterminer le commutant il revient au même de considérer $\Gamma(\lambda_k)$-$\lambda_k I$, c'est à dire la matrice $J_1(0) \oplus .... \oplus J_p(0)$, que nous noterons $\Gamma=\begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_p \end{pmatrix}$, et nous supposerons la suite des tailles t_i des blocs de Jordan, croissante.

Comme dans le cas du commutant d'un bloc de Jordan, si on écrit $M=(M_{ij})$ où les M_{ij} sont des blocs de taille $t_i \times t_j$, M commute avec $\Gamma(\lambda_k)$ si et seulement si $\forall(i,j)\in\{1,..,p\}^2$, $M_{ij}J_j=J_iM_{ij}$; ce qui, d'après la Proposition 2, est équivalent au fait que chaque bloc M_{ij} est une matrice TTS; d'où le

Théorème 5. *[1]*

Le commutant de $\Gamma = \begin{pmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_p \end{pmatrix}$, *où les blocs diagonaux sont de tailles* $t_1 \leqslant t_2 \leqslant ... \leqslant t_p$ *est T(* $t_1, t_2, ..., t_p$*).*

c. Cas général.

Soit B=$\Gamma(\lambda_1) \oplus .... \oplus \Gamma(\lambda_r)$ alors A commutera avec B si et seulement si $A = A_1 \oplus .... \oplus A_r$ où chaque A_k est une matrice blocs (M_{ij}) comme au-dessus et l'algèbre engendrée par B et A et le commutant de A est le produit direct des commutants des matrices $\Gamma(\lambda_1), ..., \Gamma(\lambda_r)$.

4 Le centre de T($t_1, t_2, ..., t_p$)

Reprenons les notations du Théorème 5:

Il est clair que Γ et l'algèbre $\mathbb{C}[\Gamma]$ appartiennent à ce centre.

Considérons les matrices D=$\begin{pmatrix} d_1 I_{t_1} & & & \\ 0 & d_2 I_{t_2} & & \\ ... & 0 & .... & \\ 0 & ... & 0 & d_p I_{t_p} \end{pmatrix}$, où les d$_i$ sont distincts deux à deux, et M=(M$_{\text{ij}}$), appartenant toutes deux à T(t_1, t_2, ..., t_p); si on pose P=DM-MD, alors $\forall(i,\ j) \in \{1, ..., p\}^2$; P$_{\text{ij}}$=$(d_i - d_j) M_{\text{ij}}$, on en déduit que P=0 $\Longleftrightarrow \forall(i,j), i \neq j \Longrightarrow$ M$_{\text{ij}}$=0.

Donc restent dans M les blocs diagonaux M$_{\text{ii}}$=$\begin{pmatrix} a_{\text{ii}} & b_{\text{ii}} & c_{\text{ii}} & ... \\ 0 & a_{\text{ii}} & ... & .... \\ ... & 0 & ... & b_{\text{ii}} \\ ... & 0 & 0 & a_{\text{ii}} \end{pmatrix}$, pour lesquels nous devons établir que les familles (a$_{\text{ii}}$), (b$_{\text{ii}}$), ...sont constantes; pour cela considérons pour tout couple i<j la matrice Q de T($t_1, t_2, ..., t_p$) dans laquelle tous les éléments sont nuls sauf le bloc Q$_{\text{ij}}$=$\begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & & 0 & 0 & 1 & & \\ ... & & ... & ... & 0 & 1 & \\ 0 & & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors MQ=QM $\Longrightarrow Q_{\text{ij}} M_{\text{jj}} = M_{\text{ii}} Q_{\text{ij}}$, d'où $a_{\text{ii}} = a_{\text{jj}}, b_{\text{ii}} = b_{\text{jj}}$, ... (tant qu'ils existent).

Donc M s'écrit $\begin{pmatrix} a I_{t_1} + \text{bJ}_{t_1} + \text{cJ}_{t_1}^2 + ... & & & \\ 0 & a I_{t_2} + \text{bJ}_{t_2} + \text{cJ}_{t_2}^2 + ... & & \\ ... & 0 & .... & \\ 0 & ... & 0 & a I_{t_p} + \text{bJ}_{t_p} + \text{cJ}_{t_p}^2 + ... \end{pmatrix}$

Théorème 6.

Le centre de T($t_1, t_2, ..., t_p$*) est l'algèbre* $\mathbb{C}[\Gamma]$

Et, par suite,

Théorème 7. *(théorème du bicommutant)*

Le bicommutant de Γ *est l'algèbre* $\mathbb{C}[\Gamma]$ *et donc le bicommutant d'une matrice B est l'algèbre* $\mathbb{C}[B]$.

5 Le bicommutant dans le cas réel

Bien sûr dans le cas réel c'est en apparence différent puisqu'il n'est plus possible d'avoir recours à la décomposition de Jordan.

Soit A$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nous désignerons par Com$_{\mathbb{R}}$(A)=$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{AM} = \text{MA}\}$ et Com$_{\mathbb{C}}(A)$=$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{AM} = \text{MA}\}$.

Il est évident que $\mathrm{Com}_{\mathbb{R}}$(A) est inclus dans $\mathrm{Com}_{\mathbb{C}}(A)$, mais si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, AM = MA $\Longrightarrow$ $A\bar{M}=\bar{M}A$, donc Re(M) et Im(M) appartiennent à $\mathrm{Com}_{\mathbb{R}}$(A); et réciproquement, d'où $\mathrm{Com}_{\mathbb{C}}(A)=\{P+\mathrm{iQ},(P,Q)\in\mathrm{Com}_{\mathbb{R}}(A)^2\}$.

Le paragraphe précédent établit l'implication:

$$\begin{cases} P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ \forall M\in\mathrm{Com}_{\mathbb{C}}(A),\mathrm{PM}=\mathrm{MP}\end{cases} \Longrightarrow P\in\mathbb{C}[A]$$

soit alors P$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$\forall M\in\mathrm{Com}_{\mathbb{R}}(A),\mathrm{PM}=\mathrm{MP}$, alors $\forall M\in\mathrm{Com}_{\mathbb{C}}(A),\mathrm{PM}=\mathrm{MP}$ donc $P\in\mathbb{C}[A]$,et comme P$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on en déduit que $P\in\mathbb{R}[A]$.

Ce qui établit le théorème du bicommutant dans le cas réel.

[1] H.W. Turnbull, A.C. Aitken, An introduction to the Theory of Canonical Matrices, Blackie and Sons, 1932.

Nimes, 27 Juillet 2017