Introduction à l'étude de $\mathbb{C}[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$, lorsque AB=BA

PAR PATRICK TELLER

Dans ce travail nous allons étudier des matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, lorsque cela n'entraîne aucune ambiguité nous confondrons matrice et endomorphisme.

L'objectif de ces pages est de fournir sous une forme simplifiée les éléments nécessaires pour suivre le travail sur l'algèbre engendrée par deux matrices A et B, telles que AB=BA.[2]

L'essentiel est inspiré par l'article de Barria et Halmos [1], j'ose espérer que ces lignes sont d'accès plus facile.

1 Matrices de Toeplitz Triangulaires (supérieures)

On désignera ici par $J(k)$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$, elle est nilpotente d'ordre k.

1. On appellera matrices de Toeplitz triangulaires supérieures (TTS) les matrices de la forme $A_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix}$ (t_i lignes, t_j colonnes avec $t_i \leqslant t_j$) ou $\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j)) \\ 0 \end{pmatrix}$ (t_i lignes, t_j colonnes avec $t_i \geqslant t_j$), où les Q_{ij} sont des polynomes.

On désignera par T_{t_i,t_j} ces ensembles de matrices.

On sait qu'usuellement les matrices de Toeplitz sont des matrices carrées et elles sont caractérisées par le fait que toutes les parallèles à la diagonale principales sont constantes; les TTS (Toeplitz triangulaires supérieures) sont (peuvent être) rectangulaires et le triangle auquel il est fait allusion est le « triangle rectangle du coin supérieur droit ».

Exemple 1.

La matrice suivante est de Toeplitz $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, les trois suivantes sont TTS $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Il est immédiat que $J(t_i)\begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & J(t_i)Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j)) \\ 0 \end{pmatrix}J(t_j) = \begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j))J(t_j) \\ 0 \end{pmatrix}$; il est moins immédiat mais facile à vérifier que $\begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix}J(t_j) = \begin{pmatrix} 0 & J(t_i)Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix} = J(t_i)\begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix}$ et $J(t_i)\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j))J(t_j) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J(t_j)) \\ 0 \end{pmatrix}J(t_j)$; par suite ces résultats s'étendent par linéarité au cas du produit d'une matrice de Toeplitz triangulaire supérieure par un polynome Q(J(t)).

b. Soit Q(J(t)) où Q est un polynome de valuation q alors Q(J(t))J(t) est un polynome en J(t) de valuation q+1; ce qui se traduit par une « translation » vers la droite d'une oblique nulle.

c. En raisonnant par blocs on remarquera que le produit de deux matrices de Toeplitz triangulaires supérieures, lorsqu'il est possible, est une matrice de Toeplitz triangulaire supérieure; ce qui n'est pas vrai dans le cas général pour des matrices de Toeplitz classiques.

Exemple 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 9 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. Comme dans le cas de matrices carrées nilpotentes on parlera d'ordre d'une matrice de Toeplitz triangulaire supérieure non carrée: l'ordre de $A_{\text{ij}} = \begin{pmatrix} 0 & Q_{\text{ij}}(J(t_i)) \end{pmatrix}$ sera $\min\{k \in \mathbb{N}, J(t_i)^k A_{\text{ij}} = 0\}$, il sera inférieur ou égal à t_i et celui de $\text{A}_{\text{ij}}=\begin{pmatrix} Q_{\text{ij}}(J(t_j)) \\ 0 \end{pmatrix}$ sera, de même, $\min\{k \in \mathbb{N}, J(t_i)^k A_{\text{ij}} = 0\}$, inférieur ou égal à t_j.

(le cas de matrices carrées TTS étant particulier car il contient les matrices ayant une diagonale non nulle qui n'ont pas d'ordre).

e. On pourra définir l'anti-transposition qui transforme une matrice TTS de $\mathcal{M}_{t_i,t_j}(\mathbb{C})$ en une matrice TTS de $\mathcal{M}_{t_j,t_i}(\mathbb{C})$:

Exemple 3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; on peut la réaliser comme suit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ suivi d'une transposition.

L'anti-transposition étant une involution linéaire elle permet de ne considérer pour établir certaines propriétés de ne considérer que la moitié des cas.

(par exemple dans les alinea précédents).

On désignera par $\text{T}_{p,q}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices TTS de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

2 Matrices en blocs de Toeplitz

Soit un entier strictement positif n et une suite d'entiers strictement positifs $t_1 \geqslant t_2 ...... \geqslant t_p$ tels que $t_1 + t_2 + ... + t_p = n$, on appellera matrice en blocs de Toeplitz de type $(t_1, t_2, ..., t_p)$ une matrice $\text{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, formée de blocs (M_{ij}) de Toeplitz triangulaires supérieures, de tailles respectives $t_i \times t_j$.

Proposition 4.

L'ensemble T$(t_1, t_2, ..., t_p)$ des matrices en blocs de Toeplitz de type $(t_1, t_2, ..., t_p)$ est une Algèbre de dimension $(2p-1)t_1 + (2p-3)t_2 + ... + 1t_p$.

Démonstration.

La seule difficulté concernerait la multiplication, elle est levée par le paragraphe précédent.

(par ailleurs ceci découle du fait que T$(t_1, t_2, ..., t_p)$ est un commutant [3]). □

3 Le commutant de $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$ est $\mathbf{T}(\mathbf{t}_1,..,\mathbf{t}_p)$

On se reportera à [3]

4 Un morphisme injectif de $T(t_1,..,t_p)$ dans $T(t_p,..,t_p)$

Soit $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$ et $T(t_1,..,t_p)$ nous allons définir, suivant Barria et Halmos [1] , une application qui associe à toute matrice de $T(t_1,..,t_p)$ une matrice de $T(t_p,..,t_p)$; pour celà nous avons besoin de quelques définitions.

Définition 5. *Cellule (i,j) d'une matrice $M=(M_{\mathrm{ij}})$ de $T(t_1,..,t_p)$*

Il s'agit du bloc M_{ij}, c'est une matrice TTS

Définition 6. *Expansion d'une matrice de $T(t_1,..,t_p)$*

Soit $M \in T(t_1,..,t_p)$, de cellules (M_{ij}), (cad pour tout (i,j) $M_{\mathrm{ij}} \in T_{\mathrm{ti,tj}}(\mathbb{C})$), on désignera par $\hat{M} \in \mathcal{M}_{\mathrm{pt}_p}(\mathbb{C})$ la matrice de $T(t_p,t_p,..,t_p)$ dont chaque cellule $\hat{M}_{\mathrm{ij}} \in T_{t_p t_p}(\mathbb{C})$ est de Toeplitz Triangulaire supérieure avec le bloc M_{ij} dans les t_i premières lignes et les t_j premières colonnes, et le reste nul ; on notera ε: $M \longmapsto \hat{M}$.

Proposition 7. *L'expansion est un morphisme injectif d'algèbres*

Démonstration.

Il suffit de raisonner par blocs □

Définition 8. *Retraction d'une matrice de $T(t_p,t_p,..,t_p)$ (p fois) à une matrice de type $(t_1,..,t_p)$*

Soit $P \in T(t_p,t_p,..,t_p)$, de cellules (P_{ij}),, on désignera par $\bar{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de $T(t_1,..,t_p)$ dont chaque cellule $\bar{P}_{\mathrm{ij}} \in \mathrm{Tt}_{i,t_j}(\mathbb{C})$ est égale à la matrice extraite de P_{ij} formée par les lignes $[\![1, t_i]\!]$et les colonnes $[\![1, t_j]\!]$; on notera ρ: $P \longmapsto \bar{P}$.

Exemple 9.

M=$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d & c \\ 0 & a & 0 & 0 & d \\ b & e & f & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, $\hat{M} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & d & c \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & b & e & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & f \end{pmatrix}$,M^2=$\begin{pmatrix} a2 & \mathrm{bd} & 0 & \mathrm{df+ad} & \mathrm{cf+ac} \\ 0 & a2 & 0 & 0 & \mathrm{df+ad} \\ \mathrm{bf+ab} & \mathrm{ef+ae} & f2 & \mathrm{bd} & \mathrm{de+bc} \\ 0 & \mathrm{bf+ab} & 0 & f2 & \mathrm{bd} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f2 \end{pmatrix}$

$$\hat{M}^2 = \begin{pmatrix} \alpha 2 & \mathrm{bd} & \mathrm{de+bc} & 0 & \mathrm{df+ad} & \mathrm{cf+ac} \\ 0 & a2 & \mathrm{bd} & 0 & 0 & \mathrm{df+ad} \\ 0 & 0 & a2 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{bf+ab} & \mathrm{ef+ae} & 0 & f2 & \mathrm{bd} & \mathrm{de+bc} \\ 0 & \mathrm{bf+ab} & \mathrm{ef+ae} & 0 & f2 & \mathrm{bd} \\ 0 & 0 & \mathrm{bf+ab} & 0 & 0 & f2 \end{pmatrix}$$

Proposition 10.

L'application ρ: $M \longmapsto \bar{M}$ est un morphisme (non-injectif) d'algèbres et $\rho \circ \varepsilon = \mathrm{Id}$

La structure de $T(t_p,..,t_p)$ en fait une algèbre de $\mathbb{C}[J(t_p)]$ matrices carrées de taille p (à un isomorphisme près)

Ce qui va permettre d'appliquer la version « anneau » du théorème de Cayley-Hamilton:

5 Le théorème de Cayley-Hamilton dans le cas d'un anneau

Théorème 11.

Soit un anneau R et une matrice $P=(p_{\mathrm{ij}})\in\mathcal{M}_n(R)$*, si on désigne par* $\chi(X)$ *le polynôme caractéristique de P alors* $\chi(P)=0$.

On trouvera une démonstration élémentaire de ce résultat classique dans le cas de matrices à coefficients dans un anneau: http://faculty.fairfield.edu/cbernhardt/cayleyhamilton.pdf

On en déduira que l'algèbre engendrée par P consiste en l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients dans l'anneau R) des matrices I,P,...,P^{n-1}.

6 L'algèbre engendrée par deux matrices A et B qui commutent.

On supposera que B est une matrice nilpotente de la forme $\begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & \ldots\ldots & & \\ & & & \ldots. & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$, avec $t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_p$ et A une matrice (de T$(t_1,t_2\ldots,t_p)$ qui commute avec B.

$\hat{A}$ est une matrice de taille p à coefficients dans $\mathbb{C}[B]$, le théorème de Cayley-Hamilton permet de conclure qu'il existe des éléments $P_0(B)$, ..., $P_{p-1}(B)$) de $\mathbb{C}[B]$ tels que $P_0(B)\hat{A}^0+P_1(B)\hat{A}+\ldots+P_{p-1}(B)\hat{A}^{p-1}=\hat{A}^p$.; donc par isomorphisme il existe des éléments $P_0(B),\ldots,P_{p-1}(B)$) de $\mathbb{C}[B]$ tels que $P_0(B)A^0+P_1(B)A+\ldots+P_{p-1}(B)A^{p-1}=A^p$.

Rappelons que le polynôme minimal de B est $X^{t_p}=0$.

D'où une famille génératrice de l'algèbre Alg(B,A): L=(I, B, ..., B^{t_p-1}, A, AB, ..., AB^{t_p-1} ,..., A^{p-1}, $A^{p-1}B$, ..., $A^{p-1}B^{t_p-1}$); nous allons montrer, en allégeant la démonstration de Barria et Halmos [], que cette famille peut se réduire:

Rappelons que $A=(A_{\mathrm{ij}})$, $A_{\mathrm{ij}}=\begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J_{t_i}) \end{pmatrix}$ si $i\leqslant j$ et si $i\geqslant j$, $A_{\mathrm{ij}}=\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J_{t_j}) \\ 0 \end{pmatrix}$, et la matrice $J(t_k)$ est d'ordre t_k, par suite $Q_{\mathrm{ij}}(J_{t_i})$ est d'ordre inférieur ou égal à t_i et $Q_{\mathrm{ij}}(J_{t_j})$ d'ordre inférieur ou égal à t_j; alors si on pose $M=(M_{\mathrm{ij}})=AB^{t_{p-1}}$ on trouve pour tout (i,j) $M_{\mathrm{ij}}=A_{\mathrm{ij}}J(t_j)^{t_{p-1}}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 0 & Q_{\mathrm{ij}}(J_{t_i}) \end{pmatrix}J(t_j)^{t_{p-1}}=\begin{pmatrix} 0 & J_{t_i}{}^{t_{p-1}}Q_{\mathrm{ij}}(J_i) \end{pmatrix}$, qui est nul si i<p et $\begin{pmatrix} Q_{\mathrm{ij}}(J_{t_j}) \\ 0 \end{pmatrix}J(t_j)^{t_{p-1}}=\begin{pmatrix} J(t_j)^{t_{p-1}}Q_{\mathrm{ij}}(J_{t_j}) \\ 0 \end{pmatrix}$, qui est nul si j<p, d'où AB$^{t_{p-1}}=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & Q(J(t_p)) \end{pmatrix}$, où $Q(J(t_p))$ est un polynôme en $J(t_p)$, de valuation supérieure ou égale à t_{p-1}, donc $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & Q(J(t_p)) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q(J(t_1))=0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & Q(J(t_{p-1}))=0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & Q(J(t_p)) \end{pmatrix}=Q(B)$); ce qui permet d'exclure de la liste des générateurs les matrices $AB^{t_{p-1}},AB^{t_{p-1}+1},\ldots,AB^{t_p-1}$.

On pourra opérer de même pour chaque matrice $A^{p-j}B^{t_j}$:

Décomposons A en blocs comme suit: A=$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$, où $M_{11}\in\mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$ $M_{12}\in\mathcal{M}_{\alpha\beta}(\mathbb{C})$, M$_{21}\in\mathcal{M}_{\beta\alpha}(\mathbb{C})$, M$_{22}\in\mathcal{M}_\beta(\mathbb{C})$, avec $\alpha=t_1+t_2+\ldots.+t_j$ et $\beta=t_{j+1}+\ldots.+t_p$.

Les ordres des matrices de Toeplitz apparaissant dans la première ligne et la première colonne sont inférieurs ou égaux à t_j donc si on pose B=$\begin{pmatrix} B_\alpha & 0 \\ 0 & B_\beta \end{pmatrix}$ on aura $B^{t_j}A^{p-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_\beta^{t_j}M_{22}^{p-j} \end{pmatrix}$, et par application du théoreme de Cayley Hamilton $M_{22}^{p-j} = P_0(B_\beta)M_{22}^0 + P_1(B_\beta)M_{22} + \ldots + P_{p-j-1}(B_\beta)M_{22}^{p-j-1}$.

Par suite $B_\beta^{t_j}M_{22}^{p-j} = Q_0(B_\beta)M_{22}^0 + Q_1(B_\beta)M_{22} + \ldots + Q_{p-j-1}(B_\beta)M_{22}^{p-j-1}$, et comme les Q_k sont de valuation supérieure ou égale à t_j on a les égalités $Q_k(B)A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_k(B_\beta)M_{22}^k \end{pmatrix}$ et, donc, en tenant compte de l'ordre de nilpotence de B, $B^{t_j}A^{p-j}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $I, B, \ldots, B^{t_p-1}, A, AB, \ldots, AB^{t_p-1}, \ldots, A^{p-j-1}, A^{p-j-1}B, \ldots, A^{p-j-1}B^{t_p-1}$

En itérant on montre que la famille $L=(I,\ B,\ \ldots,\ B^{t_p-1},\ A,\ AB,\ \ldots,\ AB^{t_{p-1}-1}\ ,\ \ldots,\ A^{p-1},\ A^{p-1}B,\ \ldots,\ A^{p-1}B^{t_1-1})$ est génératrice de l'algèbre engendrée par A et B; son cardinal est $t_p + t_{p-1} + \ldots + t_1 = n$.

D'où le

Théorème 12.

Si (A,B) sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $AB = BA$, la dimension de l'algèbre Alg(A, B) *engendrée par A et B est inférieure ou égale à n.*

Démonstration.

Si B ne possède qu'une valeur propre le résultat vient d'être démontré; dans le cas de plusieurs valeurs propres, il suffira de raisonner relativement à chacun des blocs $\Gamma(\lambda_1), \ldots, \Gamma(\lambda_r)$ □

Bibliographie:

[1] J.Barria, P.R. Halmos, Vector Bases for two commuting Matrices, Linear and Multilinear Algebra, vol 27, 1990, section 3, pp.147-157

[2] P. Teller, Une caractérisation effective de la dimension de l'algèbre engendrée par deux matrices commutantes, www.lalgebrisant.fr (2016)

[3] H.W. Turnbull and A.C. Aitken, An introduction to the Theory of Canonical Matrices, Blackie and Sons, 1932.

[4] P. Teller, Toeplitz, Commutant et Bicommutant, www.lalgebrisant.fr

Nimes Juillet 2017