La culture du Pivot 2 : A la recherche des sommets

par Patrick Teller

10 Janvier 2022

Soit un polytope (P), connu par une matrice indicatrice, on désire en connaître le nombre et la liste des sommets.

On va présenter ici une méthode naïve qui applique intensément le pivot.

1 Criss-cross et Pivots (compléments) [2]

Dans l'article précédent a été rappelée (mais pas détaillée) la méthode du simplexe qui permet de « sauter » de sommet en sommet d'un polyèdre à la recherhce du maximum d'une fonction affine ou de la preuve qu'elle n'est pas majorée.

2 Initialisation

On part donc du tableau suivant

	u_1	u_2	$\dots$	u_n	u_{n+1}	u_{n+2}	$\dots$	u_{n+p}	u_{n+p+1}	w
u_{n+1}	$m11$	$m12$	$\dots$	$m1n$	1	0	$\dots$	0	0	$w1$
u_{n+2}	....	...	...	....	0	1	...	...	...	$w2$
...	....	....	...	...	...	...	...	...	...	...
....	....	....	....	...	...	...	...	...	....	...
u_{n+p}	mp1	....	...	mpn	0	...	...	1	0	wp
un $+ p + 1$	$s1$	$s2$	...	sn	sn $+ 1 = 0$	...	...	sn $+ p = 0$	1	c

(attention: plus de fonction à optimiser)

Comme l'objet étudié est un polytope les trois états finaux possibles décrits dans le précédent article, se rédusient à un seul: les wi sont positifs.

3 La promenade sur les sommets

La méthode du simplexe consiste à déterminer à chaque état le pivotage à effectuer en fonction des signes des s_j et des quotients $\frac{\mathrm{wi}}{\mathrm{mij}}$; chaque pivotage est destiné à améliorer la valeur du scalaire c.

Mais essentiellement chaque pivotage est destiné à « sauter » d'un sommet à un sommet voisin, c'est ce que nous allons détailler et exploiter ici.

Les variables Z sont appelées variables d'écart chacune représente une distance (orientée) par rapport à un hyperplan d'appui, de même que les xi représentent les distances aux hyperplans de coordonnées; un point appartient à une face du polytope lorsque la variable d'écart correspondante est nulle de même qu'il appartient à un hyperplan de coordonnée lorsque cette coordonnée est nulle; en ce sens les xi sont aussi des variables d'écart.

Pour qu'un tableau représente un état du système il faut que les scalaires wi soient positifs (puisque ce sont les valeurs des variables de la base, et alors les variables hors-base, qui sont nulles, nous indiquent que l'état est en un sommet, et ce sommet est l'intersection des hyperplans dont les variables d'écart s'annulent.

De plus les wi sont alors les valeurs des variables de la base, donc chaque sommet est à la fois décrit par le tableau par les hyperplans auxquels il appartient et par les cordonnées que l'on lit dans les colonne w.

Si on admet (ou sait) que le polyèdre étudié est un polytope les seuls états qui seront traversés au cours des pivotages sont des états transitoires, c'est à dire l'algorithme continue.

Reste à préciser la règle d'évolution du système: en un état donné, que fait-on ?

4 La règle d'évolution du système

Ici à chaque « état du tableau » toutes les colonnes sont éligibles pour le choix du pivot et dans chacune des colonnes (disons j_0) nous choisirons la ligne suivant le principe classique $i_0 = \min\Big\{i, \frac{b_{i_0}}{m_{i_0 j_0}} = \min \frac{-b_i}{m_{ij_0}}, -b_i \geqslant 0, m_{ij_0}\Big\}$. En conséquence chaque état donne naissance à (au moins) n états.

Cette description, débutée comme un système dynamique, suit donc une croissance exponentielle comme le montrer le petit exemple suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour la première colonne on compare les quotients 5/1,2/5 et le pivot sera le terme 5 de la dernière ligne, première colonne.

Pour la deuxième colonne on compare les quotients 8/6 et 2/1 le pivot sera le terme 6 de la deuxième colonne, deuxième igne.

Effectuons le premier pivot et on obtient $\begin{pmatrix} 0 & -46/5 & 1 & 0 & -1/5 & 23/5 \\ 0 & 32/5 & 0 & 1 & 2/5 & 36/5 \\ 1 & 1/5 & 0 & 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

De même on effectue le pivot de la deuxième colonne:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 3/2 & 0 & 17 \\ -1/3 & 1 & 0 & 1/6 & 0 & 4/3 \\ 16/3 & 0 & 0 & -1/6 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Mais à la différence de la programmation linéaire le choix de la colonne ne sera pas déterminé par la dernière ligne (associée au coût) et chaque colonne (hormis la dernière, celle de w) sera légitime car dans le cas d'un polytope (donc borné) il ne peut y avoir de colonne strictement négative..

Pour chaque colonne j0 on effectuera tous les pivots possibles:

on effectuera un pivot autour de la case (i0,j0) pour chaque i0 tel que $\frac{\mathrm{w}_{i0}}{\mathrm{m}_{i0j0}} = \min\{\frac{\mathrm{wi}}{\mathrm{mij}}, \mathrm{mij0} > 0\}$;

le respect des règles de Blandt en cas de dégénérescence nous assure que le procédé continuera sans « boucler ».

Soit le tableau initial m1, on posera $\mathrm{E}_0 = \{m\}$, il va donner par pivots naissance à de nouveaux tableaux, que l'on appellera ses descendants, bien sûr en nombre fini que nous désignerons par m1,.., et nous noterons $\mathrm{E}_1 = \{m1, m2, \ldots\}$

puis $\mathrm{E}_2 = \{m11, \ldots, \mathrm{mpp}\}$ etc.… Enfin on posera pour tout n $\mathrm{E(n)} = \cup_{k \leqslant} \mathrm{nE}_k$ et on a bien sûr $\mathrm{E(n)} \subset E(n+1)$.

Comme le nombre des sommets est fini il existe un entier n tel que E(n)=E(n+1), par suite E(n) désigne l'ensemble des sommets accessibles à partir du tableau m.

D'autre part si on considère deux sommets A et B, et une fonction affine fassez générale , en désignant par T le sommet où f est maximale, il existe un chemin à travers les sommets qui relie A et T, un autre qui relie B et T, donc l'ensemble des sommets est connexe.

Par suite E(n) est l'ensemble des tableaux représentant des sommets.

Remarquons que chaque tableau contient trois informations importantes: d'une part les valeurs des variables de la base en ce sommet qui donnent la localisation, les noms des variables hors-base qui donnent les hyperplans d'appui contenant le sommet et que l'on appellera l'identité du sommet, il conviendra de les conserver tout au long de l'algorithme, d'autre part les colonnes des variables hors-base (et la dernière colonne) contiennent le « code » qui déterminera les pivots à employer; on peut ne pas les conserver.

Afin de diminuer la complexité il convient de vérifier avant chaque pivot si le sommet à atteindre est déjà répertorié; cela se fait sans pivotage: l'observation du quotient optimal $\frac{\mathrm{w}_{i0}}{\mathrm{m}_{i0j0}}$ nous enseigne qui va quitter la base (l'hyperplan correspondant à ce moment à la ligne i0) et qui va la rejoindre (l'hyperplan correspondant à la colonne j0), d'où on peut prévoir ce que seront les hyperplans d'appui contenant le prochain sommet et comparer avec la liste des identités des sommets déjà visités; si ce sommet a déjà été visité on annule le pivot prévu.

Ceci permettra de réduire le nombre de pivots exécutés.

On comparera avec [1],[2] qui, me semble-til, ont recours à des résolutions de systèmes d'équations .

Exemple 1.

Première étape: déterminer un point de base admissible qui sera le sommet initial

```
(%i51) e:matrix([0,x,y,z1,z2,z3,w],[z1,-3,2,1,0,0,-2],[z2,5,4,0,1,0,62],[z3,0,-1,
       0,0,1,-1]);
```

(%o51) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ z1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ z2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 62 \\ z3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
(%i52) for j:2 thru 7 do e[2,j]:e[2,j]/2;for i:3 thru 4 do (coeff:e[i,3],for j:2
       thru 7 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[2,j]);e[2,1]:y;e;
```

(%o52) **done**
(%o53) **done**

(%o54) y

(%o55) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ z2 & 11 & 0 & -2 & 1 & 0 & 66 \\ z3 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
(%i56) for j:2 thru 7 do e[3,j]:e[3,j]/11;for i:2 thru 2 do (coeff:e[i,2],for j:2
       thru 7 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[3,j]);for i:4 do (coeff:e[i,2],for j:2 thru
       7 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[3,j]);e[3,1]:x;e;
```

(%o56) **done**

(%o57) **done**

```
inpart: invalid index 5 of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);
```

(%o59) x

(%o60) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 0 & 8 \\ x & 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i61)
(%i27)

Sommet initial: (6,8,0,0,7).
E_0: $\{z1z2\}$
Pivot de la colonne z1: l'élément (4,4)
Pivot de la colonne z2: l'élément (4,5)

```
(%i61) m1:copymatrix(e);
```

(%o61) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 0 & 8 \\ x & 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i62)
```
for j:2 thru 7 do m1[4,j]:22*m1[4,j]/5; for i:2 thru 3 do (coeff:m1[i,4],
for j:2 thru 7 do m1[i,j]:m1[i,j]-coeff*m1[4,j]);m1[4,1]:z1;m1;
```

(%o62) **done**

(%o63) **done**

(%o64) $z1$

(%o65) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{58}{5} \\ z1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{22}{5} & \frac{154}{5} \end{pmatrix}$$

(%i66)
```
m2:copymatrix(e);
```

(%o66) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 0 & 8 \\ x & 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i67)
```
for j:2 thru 7 do m2[4,j]:22*m2[4,j]/3;for i:2 thru 3 do (coeff:m2[i,5],
for j:2 thru 7 do m2[i,j]:m2[i,j]-coeff*m2[4,j]);m2[4,1]:z2;m2;
```

(%o67) **done**

(%o68) **done**

(%o69) $z2$

(%o70) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ x & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ z2 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{22}{3} & \frac{154}{3} \end{pmatrix}$$

(%i71)

(%i21)

Deux nouveaux sommets m1: z2z3 qui a comme coordonnées (58/5,1,154/3,0,0)
m2 :z1z3 qui a comme coordonnées (4/3,1,0,154/3,0)
Pivot de la colonne z2 (4,5)
Pivot de la colonne z3 (4,6)

(%i21)
```
m11:copymatrix(m1);
```

(%o21) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{58}{5} \\ z1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{22}{5} & \frac{154}{5} \end{pmatrix}$$

(%i71)
```
for j:2 thru 7 do m11[4,j]:5*m11[4,j]/3; for i:2 thru 3 do (coeff:m11[i,5],
for j:2 thru 7 do m11[i,j]:m11[i,j]-coeff*m11[4,j]);m11[4,1]:z2;m11;
```

(%o71) **done**

(%o72) **done**

(%o73) $z2$

(%o74) $m11$

(%i75) `m12:copymatrix(m1);`

(%o75) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{58}{5} \\ z1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{22}{5} & \frac{154}{5} \end{pmatrix}$$

(%i76)
```
for j:2 thru 7 do m12[4,j]:5*m12[4,j]/22; for i:2 thru 3 do (coeff:m12[i,
6],for j:2 thru 7 do m12[i,j]:m12[i,j]-coeff*m12[4,j]);m12[4,1]:z3;m12;
```

(%o76) **done**

(%o77) **done**

(%o78) $z3$

(%o79) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 0 & 8 \\ x & 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i80)

Ni m11 , ni m12 ne sont de nouveaux sommets; de même on trouverait que ni m21, ni m22 ne sont nouveaux, donc le polytope possède trois sommets (e,m1,m2).

BIBLIOGRAPHIE:

[1] Lazarus, Chapitre 6, Polytopes, https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~lazarusf/Enseignement/polytopes.pdf

[2] M.Manas,J.Nedoma, Finding All vertices of a Convex Polyedron, Numerische Mathematik, vol 12, pp.226-229.