UN THÉORÈME DE CAYLEY-HAMILTON POUR LES MATRICES FRACTALES

PATRICK TELLER 24 février 2022

Résumé.
On connait bien depuis l'article [1] une famille génératrice de l'algèbre engendrée par deux matrices commutantes, on en trouvera ici une démonstration assez rapide qui, par ailleurs fournit directement les coefficients des « premiers » termes, présente une procédure qui permettrait d'en calculer autant que nécessssaire et d'effectuer des calculs dans l'algèbre $\mathbb{C}[M, W]$.

Nous allons montrer que dans le cas d'une matrice à diagonale cyclique cette famille génératrice est une base de l'algèbre $\mathbb{C}[A, B]$.

1. Matrices de Weyr

On trouvera ici un rappel des définitions et des résultats élémentaires concernant les Matrices de Weyr; les constructions et les démonstrations peuvent être trouvées dans l'article d'exposition d'Helen Shapiro [11] et le livre original et très riche de J. Clark, K. O'Meara, C. Vinsonhalter [6].

Définition 1.
La matrice de Weyr associée à la composition $z_1 \geqslant z_2 \geqslant .. \geqslant z_t$ *de* n

On appelle matrice de Weyr nilpotente, associée à la composition $z_1 \geqslant z_2 \geqslant .. \geqslant z_t$ de n, la matrice définie par blocs comme suit:

1. $W = (W_{i,j})$ où le bloc $W_{i,j}$ appartient à $\mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{C})$;
2. $\forall i \in \{1, \dots, t-1\}$, $W_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(\mathbb{C})$
3. si $j \neq i+1$, $W_{i,j} = 0$;

d'où $W = \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & \dots & \dots 0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & \dots & \dots. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & W_{z_{t-1},z_t} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

W est appelée la matrice de Weyr nilpotente associée à la composition $z_1 \geqslant z_2 \geqslant .. \geqslant z_t$; W est nilpotente d'ordre t.

Théorème 2. *Toute matrice nilpotente* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est semblable à une unique matrice de Weyr nilpotente* W*.*

Théorème 3. *Toute matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est semblable (de manière unique, à l'ordre près) à une matrice en blocs de Weyr* $\begin{pmatrix} \lambda_1 I + W_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I + W_2 & & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_r I + W_r \end{pmatrix}$, *où les* W_i *sont des matrices de Weyr nilpotentes.*

Théorème 4. *(Le commutant de la matrice de Weyr nilpotente* $W(z_1,..,z_t)$*)*

Soient $W = (W_{i,j})$ *une matrice de Weyr nilpotente et une matrice* $A = (A_{i,j})$

$AW = WA$ *si et seulement si*

1. $\forall (i,j),\ i > j \Longrightarrow A_{i,j} = 0$

2. $\forall (i,\ j),\quad i \leqslant j \quad A_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ *(que l'on peut écrire* ${}^tW_{i,i+1} A_{\mathrm{ij}} W_{j,j+1} = A_{i+1,j+1}$*)*

Une telle matrice sera appelée matrice fractale associée à la composition $z_1 \geqslant z_2 \geqslant .. \geqslant z_t$, l'ensemble des matrices fractales associées à la composition $z_1 \geqslant z_2 \geqslant .. \geqslant z_t$ sera noté $F(z_1,..,z_t)$ ou F s'il n'y a pas d'ambiguité, c'est le commutant de W, c'est donc une algèbre.

Dans une matrice fractale A le bloc $A_{1,1}$ sera appelé bloc directeur.

Voici un exemple de matrice fractale associée à la composition (5,3,2,1)

$$M = \begin{pmatrix} a & b & d & p & u & g & i & z & l & \mathrm{dd} & A \\ 0 & c & e & q & v & h & j & \mathrm{zz} & m & \mathrm{ee} & B \\ 0 & 0 & f & r & w & 0 & k & \mathrm{aa} & n & \mathrm{ff} & C \\ 0 & 0 & 0 & s & x & 0 & 0 & \mathrm{bb} & 0 & \mathrm{gg} & D \\ 0 & 0 & 0 & t & y & 0 & 0 & \mathrm{cc} & 0 & \mathrm{hh} & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & d & g & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & e & h & j & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & k & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

est une matrice fractale; elle est triangulaire supérieure par blocs, on remarquera qu'en effet chaque bloc $M_{i,j}$ contient une copie de son successeur « en diagonale » $M_{i+1,j+1}$.

Théorème 5. *Trigonalisation d'une matrice fractale*

Toute matrice fractale est semblable à une matrice fractale triangulaire supérieure.

De même, si on considère deux matrices fractales A et B telles que $AB = BA$*, elles sont simultanément semblables à deux matrices fractales, triangulaires supérieures, qui commutent entre elles.*

Démonstration. □

Soit $M = (M_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\dots,t\}^2}$ *une matrice fractale; on notera comme plus haut pour chaque* i *de* $\{1,\dots,t\}$ $M_{i,i} = \begin{pmatrix} M_{i+1,i+1} & * \\ 0 & N_i \end{pmatrix}$, avec $M_{t+1,t+1} = (0)$.

Les matrices N_i, étant à coefficients complexes, il existe pour tout i une matrice P_i inversible telle que $P_i^{-1}N_iP_i$=T_i est triangulaire supérieure, puis on pose Q_{t+1}=(0) et pour i=t à i=1 Q_i $=\begin{pmatrix} Q_{i+1} & 0 \\ 0 & P_i \end{pmatrix}$.

*On montre par une récurrence immédiate que les blocs $Q_i^{-1}M_{i,i}Q_i$ sont triangulaires supérieures et, par suite, si on pose Q=(Q_i), alors Q^{-1}*MQ *est triangulaire supérieure.*

*Reste à vérifier que Q^{-1}*WQ=*W et pour celà comparons $Q_i^{-1}W_{i,i+1}Q_{i+1}$ et $W_{i,i+1}$:*

$Q_i^{-1}W_{i,i+1}Q_{i+1}=\begin{pmatrix} Q_{i+1}^{-1} & 0 \\ 0 & P_i^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{i+1} \\ 0 \end{pmatrix}Q_{i+1}=\begin{pmatrix} Q_{i+1}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}Q_{i+1}=W_{i,i+1}$, *puis calculons Q^{-1}*WQ:

$$\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & & & & \\ & \ldots & & & \\ & & Q_i^{-1} & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & Q_t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & & \ldots 0 \\ & 0 & W_{2,3} & & \\ 0 & 0 & 0 & & \ldots. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & W_{z_{t-1},z_t} \\ 0 & \ldots & \ldots & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & & & & \\ & \ldots & & & \\ & & Q_{i+1} & & \\ & & & \ldots & \\ & & & & Q_t \end{pmatrix}$$

est la matrice dont les blocs en position (i,i+1) sont de la forme ($Q_i^{-1}W_{i,i+1}Q_{i+1}$)=$W_{i,i+1}$et les autres blocs sont nuls, c'est-à-dire W.

*En résumé Q^{-1}*MQ *est triangulaire supérieure, et commute avec Q^{-1}*WQ $=W$ *donc elle appartient aussi à F.*

Proposition 6. *Quelques résultats immédiats*

1. Soient ($A_1,\ldots,A_m$) une famille d'éléments de F qui commutent entre eux deux à deux alors $\mathbb{C}[A_1,\ldots,A_m]=\{\sum\lambda_{i_1,\ldots,i_m}A_1^{i_1}\ldots A_m^{i_m}\}$ est une sous-algèbre commutative de F

2. Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de F contenant W, WF=$\{\mathrm{Wg}, g\in\mathcal{A}\}$ *est un idéal (bilatère)de $\mathcal{A}$.*

3. Soient deux matrices fractales A et B telles que AB=BA, l'ensemble des polynomes $P(X,Y)$ tels que $P(A,B)\in W(\mathbb{C}[W,A,B])$ est un idéal de $\mathbb{C}[X,Y]$. il sera noté $W(\mathbb{C}[W,A,B])\colon\mathbb{C}[X,Y]$.

Démonstration.

1. immédiat.

2. découle du fait que F est le commutant de W et donc que tout élément de $\mathcal{A}$ commute avec W.

3. découle du fait que $W\mathbb{C}[W,A,B]$ est un idéal de l'algèbre $\mathbb{C}[W,A,B]$. ☐

Définition 7. *(Extraction d'une matrice de F(z_1,..,z_t))*

Soit une matrice M=($M_{i,j}$) de F(z_1,..,z_t) on désignera par $\Psi(M)$ la matrice ${}^tW$MW.

Proposition 8. *Propriétés de* Ψ

1) Soit M une matrice fractale où on pose M=$\begin{pmatrix} M_{1,1} & \star \\ 0 & M_2' \end{pmatrix}$, ${}^tW$MW $=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_2' \end{pmatrix}$ *et M_2' appartient à F(z_2,..,z_t); en particulier ${}^tWW=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-z_1} \end{pmatrix}$ et W_2 est nilpotente, associée à la composition (z_2,..,z_t)*

2) Si A et B sont deux matrices commutantes appartenant à F(z_1,..,z_t) A_2 et B_2 sont des matrices commutantes appartenant à F(z_1,..,z_t), dont la première ligne de blocs est annulée et les autres sont conservées.

3) Ψ *est un endomorphisme d'algèbres de* $F(z_1,..,z_t)$ *vers* $F(z_1,..,z_t)$ *(mise à part la question de l'image de la matrice unité)*

4) Le noyau de Ψ *est l'annulateur de l'élément* W*.*

Démonstration.

$$\begin{pmatrix} {}^tW_{1,2} & 0 & & & & \\ 0 & {}^tW_{2,3} & 0 & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & & {}^tW_{t,t-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{i,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & \dots & & \dots 0 \\ & 0 & W_{2,3} & & & & \\ & & 0 & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & & \dots. \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & W_{z_{t-1},,z_1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & & 0 \\ \dots & M'_{2,2} & \dots & \dots & & M'_{2,t} \\ \dots & 0 & M'_{3,3} & & & \\ \dots & \dots & 0 & \dots. & & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M'_{t,t} \end{pmatrix}$$

où $M'_{k,q}={}^tW_{k-1,k}M_{k-1,q-1}W_{q-1,q}$ *si* $(k,q)\in\{1,\dots t\}^2$ *et* $M'_{k,q}=(0)$ *sinon.*

Le Théorème 4 entraîne que si $k>1$ *et* $q>1$ $M'_{k,q}=M_{k,q}$ *d'où l'extraite* ${}^tWMW$ *de la matrice fractale* $M=(M_{i,j})$ *est la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M_{2,2} & \dots & \dots & \dots & M_{2,t_1} \\ \dots & 0 & M_{3,3} & & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots. & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M_{t,t} \end{pmatrix}$.

2) Si on pose $A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A'_{12} \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix} B_{1,1} & 0 \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix}$ *l'égalité* $AB=BA$ *entraîne* $A_{1,1}B_{1,1}=B_{1,1}A_{1,1}$ *et*

$A'_2B'_2=B'_2A'_2$ *et, de même,* $AW=WA$ *et* $BW=WB$ *entraînent que* A'_2 *et* B'_2 *commutent avec* W_2*.*

3) Considérons deux matrices fractales A et B, ${}^t\mathrm{WAW}{}^t\mathrm{WBW}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A'_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A'_2B'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\mathrm{AB})'_2 \end{pmatrix}$*, selon les principes de la multiplication par blocs, et ceci est égal, d'après les alinéas au-dessus, à* ${}^t\mathrm{WABW}$*.*

La linéarité est, quant à elle, évidente.

4) Pour déterminer l'allure des éléments du noyau de Ψ *il suffit de comparer une matrice fractale N et son image par* Ψ*,* $\Psi(N)$ *est la matrice N dans laquelle ont été effacées les* z_1 *première lignes, donc le noyau de N est formé par les matrices de* $\mathbb{C}[W,M]$ *dont les lignes à partir de la* z_1+1*ième sont nulles; dit autrement ce sont les matrices de* $\mathbb{C}[W,M]$ *dans lesquelles chaque bloc (1,j) de la première ligne de blocs a ses* z_j*-*z_{j+1} *dernières colonnes non nulles.*

Si on observe les matrices de la forme WZ, où Z est fractale, on constate que Ker(Ψ*) est exactement l'annulateur de W.*

□

2. Un théorème de type Cayley-Hamilton pour les matrices fractales

Nous allons proposer une nouvelle (et plus élémentaire) démonstration concernant la (classique) famille génératrice de l'algèbre engendrée par deux matrices commutantes, dans le cas où l'une, W, est nilpotente sous forme de Weyr.

Théorème 9.

La famille $(I, M, \dots, M^{z_1-1}, W, \mathrm{WM}, \dots, \mathrm{WM}^{z_2-1}, \dots, W^{t-1}, W^{t-1}M, \dots, W^{t-1}M^{z_t-1})$ *engendre l'algèbre* $\mathbb{C}[W,M]$ *(Barria et Halmos dans le cadre Jordan, O'Meara etc… dans le cadre de Weyr)*

Lemme 10. *Soit l'application linéaire* φ: $T \in F \longmapsto {}^tWTW$ *son noyau est l'annulateur de W, c'est-à-dire* $\{W^{t-1}(x_0I + x_1M + \cdots + x_{z_t-1}M^{z_t-1})\}$

Démonstration. □

On trouvera la première assertion dans [2].

Quant à la seconde:

d'abord W est un élément d'ordre t, ceci explique le W^{t-1}*; ensuite, si on considère une matrice fractale N appartenant à* $\mathbb{C}[W, M]$*, le produit* NW^{t-1} *est égal à* $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & N_{t,t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *et* $M_{t,t}$ *est une matrice carrée, de polynôme annulateur de degré* z_t *donc* $N_{t,t}$ *s'écrit* $x_0I + x_1M + \cdots + x_{z_t-1}M^{z_t-1}$ *, le sous-espace* $W^{t-1}\mathbb{C}[W, M]$ *est donc l'ensemble des polynômes de la forme* $W^{t-1}\{x_0I + x_1M + \cdots + x_{z_t-1}M^{z_t-1}\}$

Théorème 11. *Avec les notations plus haut*

$\chi_{M_{1,1}(M)} = \sum_{i=1}^{t} W^{i-1}P(i, M)$ *où P(i,X) appartient à* $\mathbb{C}_{z_i-1}[X]$

Démonstration.

Elle se fera par récurrence portera sur la longueur t de la composition.

Si t=1 la matrice fractale ne possède qu'un bloc, W n'existe pas, alors $M=M_{1,1}$ *la formule à établir se réduit à* $\chi_{M_{i,i}(M_{i,i})=0}$*, c'est à dire le Théorème de Cayley-Hamilton.*

Soit une composition $(z1, z2, \dots, \mathrm{zt})$ *de longueur t une matrice de Weyr* $W=(W_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,t\}^2}$ *et une matrice fractale* $(M_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,t\}^2}$ *associées à la composition: alors pour tout p<t on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la composition* $(z_p, \dots, \mathrm{zt})$*, à la matrice de Weyr* $W'=(W_{i,j})_{(i,j)\in\{p,\dots,t\}^2}$ *et à la matrice fractale* $M' = (M_{i,j})_{(i,j)\in\{p,\dots,t\}^2}$ *et grâce à l' isomorphisme naturel entre* $\mathbb{C}[W', M']$ *et* $(\varphi \circ \dots \circ \varphi)(\mathbb{C}[W, M])$ *que nous noterons* $(\varphi^{p-1})(\mathbb{C}[W, M])$ *nous pouvons écrire* $\chi_{\mathrm{Mp},p}(\varphi^{p-1}(M)) = \sum_{i=2}^{t-1} \varphi^{p-1}(W^{i-1}) \sum_{j=0}^{z_{i-1}-1} \lambda_{i,j}\varphi^{p-1}(M)^j$.

En particulier on voit que $\chi_{\mathrm{Mp},p(\varphi^{p-1}(M))}$ *appartient à* $\varphi^{p-1}(W)\mathbb{C}[W, \varphi^{p-1}(M)]$ *(*) , ce que nous utiliserons un peu plus loin.*

Par hypothèse de récurrence $\chi_{M_{2,2}(M_2')} = \sum_{i=2}^{t-1} W_2^{i-1} \sum_{j=0}^{z_{i-1}-1} \lambda_{i,j} M_2'^j$*, ou si on préfère* $\varphi(\chi_{M_{2,2}(M)}) = \varphi(\sum_{i=2}^{t-1} W^{i-} \sum_{j=0}^{z_{i-1}-1} \lambda_{i,j}M^j)$ *, donc d'après le lemme il existe* $(\mu_0, .., \mu_{z_{i-1}-1})$ *tels que* $\chi_{M_{2,2}(M)} = \sum_{i=2}^{t-1} W^{i-1} \sum_{j=0}^{z_{i-1}-1} \lambda_{i,j}M^j + W^{t-1}(\sum_{j=0}^{z_t-1} \mu_j M^j)$*; et si on pose* $P(X) = \dfrac{\chi_{M_{1,1}(X)}}{\chi_{M_{2,2}(X)}}$ *on obtient* $\chi_{M_{1,1}(M)} = \sum_{i=2}^{t-1} W^{i-1} \sum_{j=0}^{z_{i-1}-1} \lambda_{i,j}M^jP(M) + W^{t-1}(\sum_{j=0}^{z_t-1} \mu_j M^j)P(M)$.

Nous écrirons ce dernier résultat $\chi_{M_{1,1}(M)} = \sum_{i=1}^{t-2} W^iP_i(M) + W^{t-1}P_{t-1}(M)$ *(**), où les* P_u *sont des polynômes.*

Pour chaque i de {1,...,t-1} nous allons opérer comme suit:

Soit $P_i(X) = \sum_{k=1}^{r} Q_k(X)(\chi_{\mathrm{Mi}_{1,1}}(X))^k + R_i(X)$*, où le degré de* $R_i(X)$ *est strictement inférieur à celui de* $(\chi_{\mathrm{Mi}_{1,1}}(X))$*, c'est à dire* z_i*; puis appliquant la remarque au-dessus (*) nous remplacerons dans (**)* $W^iP_i(M)$ *par* $W^iR_i(M)+\sum_{k=i+1}^{t} W^kQ_k(M)=W^iR_i(M)+\sum_{k=i+1}^{t-1} W^kQ_k(M)$ *+(0), car* $W^t=0$.

puis nous passerons à i+1.

Ce procédé sera dénommé règle de réécriture.

D'où finalement on résumera

$\chi_{M_{1,1}(M)}=\sum_{i=0}^{t-1} W^iT_i(M)$, $\forall i \in \{0,\dots,t-1\}, T_i\in\mathbb{C}_{z_{i+1}-1}[X]$

$X^{z_1}-T_1(X)=\chi_{M_{1,1}(X)}$

avec la règle de réécriture. □

Ces éléments permettront d'exprimer ainsi, de proche en proche, tout M^k *et tout produit* M^k*, d'où toute matrice appartenant à* $\mathbb{C}[M,W]$.

Théorème 12. *Dans le cas où M est à « diagonale cyclique » la famille (*W^iM^j*, où* $0 \leqslant i < t, 0 \leqslant j < z_i + 1$*) est une base de* $\mathbb{C}[M,W]$.

Démonstration.

D'une part le cardinal de cette famille est égal à n et elle est génératrice de $\mathbb{C}[M,W]$*, d'autre part il a été prouvé dans [3] que sous nos hypothèses la dimension de* $\mathbb{C}[M,W]$ *est égale à n.* □

Références

[1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, Linear Multilinear Algebra 27 (1990), 147-157

[2] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Using Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998

[3] P.Teller, Le Problème de Gestenhaber dans le cas à « diagonale cyclique », http://lalgebrisant.fr, février 2022.