LE PROBLÈME DE GERSTENHABER POUR TROIS MATRICES: LE CAS FRACTAL ET « À DIAGONALE CYCLIQUE »

PATRICK TELLER 24 FÉVRIER 2022

Résumé.

Dans la résolution du Problème de Gerstenhaber concernant deux matrices commutantes le coeur [1] concerne les matrices cycliques qui satisfont au Théorème « évidemment » et , autour, les autres qui peuvent être approchées par des matrices cycliques et qui, dès lors, héritent de la propriété sur la dimension.

En nous appuyant sur le résultat de [2] nous allons établir que le Centralisateur d'une matrice fractale à diagonale cyclique C est de dimension n et donc que si A,B,W sont trois matrices commutantes, W nilpotente de Weyr et B à diagonale cyclique alors l'algèbre $\mathbb{C}[W, A, B]$ est de dimension n.

1. Le cas des matrices a diagonale cyclique

Comme dans le Problème de Gerstenhaber pour deux matrices la notion de matrice cyclique joue un rôle important dans l'étude du problème pour trois matrices.

Définition 1. *Matrice cyclique, Matrice fractale à « bloc directeur cyclique »*

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite cyclique lorsqu'elle possède l'une de ces propriétés équivalentes:

i) son polynôme minimal $\pi_M(X)$ est égal à son polynôme caractéristique $\chi_M(X)$

ii) pour chaque valeur propre le sous-espace propre est de dimension 1

iii) elle est semblable à une matrice « compagnon», c'est-à-dire une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -m_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -m_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -m_{n-1} \end{pmatrix}$$

Une matrice dont le polynôme caractéristique est simplement scindé est cyclique.

Une matrice fractale sera dite « à diagonale cyclique » lorsque le bloc directeur est cyclique.

Lemme 2. *Soit une matrice fractale $M=(M_{i,j})$, si le bloc directeur $M_{1,1}$ est cyclique alors pour tout j le bloc $M_{j,j}$ est cyclique.*

Démonstration.

découle immédiatement du ii) de la définition 1. □

Définition 3. *Matrice fractale à diagonale cyclique*

Une matrice fractale M=($M_{i,j}$) sera dite à diagonale cyclique lorsque les blocs diagonaux $M_{i,i}$ sont cycliques.

Nous aurons besoin du résultat suivant

Proposition 4. Les polynômes d' une matrice compagnon

Soit une matrice compagnon $A=\begin{pmatrix} 0 & \dots & & & & -a_0 \\ 1 & \dots & & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & & \dots \\ . & 0 & . & & & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & & -a_{n-2} \\ & & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ *et un polynôme* $P(X)=X^r+\sum_{i=0}^{r-1} p_iX^i$ *qui divise le polynôme minimal de A,* $\pi_A(X)$

i. La dimension de Ker(P(A)) est égale au degré de $P(X)$.

ii. Si on désigne par $Q(X)=X^{n-r}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_jX^j$ *le quotient de* $\pi_A(X)$ *par* $P(X)$ *et si on écrit* $P(A)=(C_1,\dots,C_n)$*, alors*

$\forall j \in \{1,\dots,n-r\}, C_j=\sum_{i=j}^{j+r-1} p_{i-j}e_i+e_{j+r}$

Démonstration.

Comme A est une matrice compagnon, si on note P(A)$=(C_1,\dots,C_n)$ alors $\forall k \in \{0,\dots,n-1\} \quad C_{k+1}=AC_k$.

Il est immédiat que $C_1=\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_{r-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2=\text{AC}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_{r-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots 0 \end{pmatrix}$,...., jusqu'à $C_{n-r}=\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_{r-1} \\ 1 \end{pmatrix}$, par suite les colonnes $C_1,\dots,C_{n-r}$ sont linéairement indépendantes. (*)

Nous allons montrer par récurrence que les colonnes $C_{n-r+1},\dots,C_n$ sont des combinaisons linéaires des colonnes $C_1,\dots,C_{n-r}$.

Si on suppose que P(X) divise $\pi_A(X)$ il existe Q(X)=X^{n-r}+$\sum_{j=0}^{n-r-1} q_jX^j$ tel que P(X)Q(X)=$\pi_A(X)$ et, par suite P(A)Q(A)=0, c'est à dire $\forall k \in \{1,\dots,n\}$ Q(A)P(A)(e$_k$)=0.

Or P(A)(e$_1$)=C$_1$ donc $(A^{n-r}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_jA^j)C_1$=0, d'où $C_{n-r+1}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_jC_{j+1}=0$, d'où C$_{n-r+1}$∈Vect$(C_1,\dots,\text{Cn}-r)$.

Si on suppose que C$_{n-r+1}$,...,C_{n-r+k} appartiennent à Vect(C_1,...,Cn$-r$) alors, comme Q(A)P(A)(e$_{k+1}$)=0 et P(A)(e$_{k+1}$)=C$_{k+1}$, (A^{n-r}+$\sum_{j=0}^{n-r-1} q_jA^j$)C$_{k+1}$=0, d'où C$_{n-r+k+1}$+$\sum_{j=0}^{n-r-1} q_jC_{j+k+1}=0$, c'est à dire C$_{n-r+k+1}$∈Vect$(C_1,\dots,C_{n-r+k})$, qui est égal par hypothèse à Vect$(C_1,\dots,C_{n-r})$.

Ce qui établit les résultats annoncés. □

Proposition 5. L'équation CX-XD=U

Soit $n \geqslant r$ *deux entiers naturels, (C,D)*$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}[x])\times\mathcal{M}_r(\mathbb{C}[x])$ *deux matrices cycliques telles que* $\pi_D(X)|\pi_C(X)$*et* $U\in\mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{C}[x])$*;*

Alors
Si l'équation CX-XD=U possède des solutions celles-ci constituent un espace affine de dimension r

Démonstration.
Le caractère affine de l'ensemble des solutions découle du fait que l'application $X \longmapsto \mathrm{CX} - \mathrm{XD}$ *est linéaire; lorsque l'équation possède des solutions la dimension de l'ensemble des solutions est égal à la dimension du noyau.*
On écrira $\pi_D(X) = \sum_{i=0}^{r} d_i X^i$
Supposons d'abord que C et D sont des matrices compagnons.
En vectorisant selon les colonnes, c'est à dire en représentant X et U par leurs colonnes (X_1,…,X_n) et (C_1,..,C_n) l'application $X \longmapsto \mathrm{CX} - \mathrm{XD}$ devient$\mathrm{Vec}(X) =$ $(\ X_1, X_2, ., \mathrm{Xr}\ ) \longmapsto (I_r \otimes C - {}^tD \otimes I_n)(\ X_1, X_2, ., \mathrm{Xr}\ )$; or $(I_r \otimes C - {}^tD \otimes I_n) =$

$$\begin{pmatrix} C & -I & & & \\ 0 & C & -I & & \\ & 0 & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -I \\ d_0 I & \dots & \dots & d_{r-1}I & C + d_r I \end{pmatrix}$$

.

Par suite CX-XD=(0) $<=>$ $\begin{cases} X_2 = \mathrm{CX}_1 \\ X_3 = \mathrm{CX}_2 \\ \dots. \\ X_r = \mathrm{CX}_{r-1} \\ \pi_D(C) X_1 = (0) \end{cases}$.

La proposition précédente entraîne que la dimension du noyau de $\pi_D(C)$ est égale à r, donc la dimension de l'ensemble des solutions est, s'il n'est pas vide, égale à r.
Dans le cas où ces matrices ne sont pas sous la forme compagnon il considérera C'=P^{-1}*CP et D'=*$Q^{-1}\mathrm{DQ}$ *des matrices compagnons respectivement semblables à C et D, l'équation CX-XD=U est équivalente à PC'*P^{-1}*X-XQD'*Q^{-1}*U, qui est équivalente à C'Y-YD'=* $P^{-1}\mathrm{UQ}$*, où Y=*$P^{-1}\mathrm{XQ}$ *et on applique à Y ce qui a été fait au-dessus.*

□

Théorème 6. *L'Algèbre commutative* $\mathbb{C}[W, M, B]$ *où B est à diagonale cyclique*

Si (W,M,B), où B est à diagonale cyclique, est un triplet de matrices fractales commutantes, la dimension de l'Algèbre $\mathbb{C}[W, M, B]$ *est égale à n.*

Démonstration. ()
Rappelons les résultats suivants [2]
i) la dimension de $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, B)$ *est supérieure ou égale à n ([1], lemme 1.3)*
ii) les deux égalités suivantes sont équivalentes:
Dimension de $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, B)$*=n*
Dimension de $\mathbb{C}[W, B]$*=n ([2], Théorème 1.1),*
auquel cas $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, B)$*=*$\mathbb{C}[W, B]$*.*

B étant choisie dans F, une matrice M commute avec W et B si et seulement si elle appartient à F et commute avec B, c'est à dire si elle est fractale et commute avec B.

Si on pose M=($M_{i,j}$) une matrice fractale, qui sera déterminée par sa première ligne de blocs, M commute avec B si et seulement si la première ligne de blocs du produit MB est égale à la première ligne de blocs du produit BM, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $j\in\{1,\ldots,t\}$, $\sum_{k=1\ldots j}(M_{1,k}B_{k,j}-B_{1,k}M_{k,j})=0$

Ce qui s'écrit:

eq1: $B_{1,1}.M_{1,1}\text{-}M_{1,1}B_{1,1}=0$

eq2: $B_{1,1}M_{1,2}-M_{1,2}B_{2,2}=-B_{1,2}M_{2,2}+M_{1,1}B_{1,2}$

eq3: $B_{1,1}M_{1,3}-M_{1,3}B_{3,3}=-B_{1,2}M_{2,3}+M_{1,2}B_{2,3}-B_{1,3}M_{3,3}+M_{1,1}B_{1,3}$

.....

eqj: $B_{1,1}M_{1,j}-M_{1,j}B_{j,j}=-B_{1,j}M_{j,j}+M_{1,1}B_{1,j}-\sum_{k=2\ldots j-1}(M_{1,k}B_{k,j}-B_{1,k}M_{k,j})$

...

eqt: $B_{1,1}M_{1,t}-M_{1,t}B_{t,t}=-B_{1,t}M_{t,t}+M_{1,1}B_{1,t}-\sum_{k=2\ldots t_1-1}(M_{1,k}B_{k,t}-B_{1,k}M_{k,t})$.

M étant censée être fractale on remarquera que, pour chaque couple (i,j), la connaissance de $M_{i,j}$ *entraîne celle de* $M_{i+1,j+1}$.

M commutera avec B si et seulement si ($M_{1,1},\ldots M_{1,t}$) *satisfont aux équations eq1,..,eqt et, si nous résolvons ces équations pas à pas:*

$E_0=\varnothing$

$E_1=\{M_{1,1}\in\mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{C}),\text{eq1}\}$

$E_2=\{(M_{1,1},M_{1,2})\in E_1\times\mathcal{M}_{z_1,z_2}(\mathbb{C}),\text{eq2}\}$

.....

$\mathrm{E}_j=\{(M_{1,1},M_{1,2},\ldots,M_{1,j})\in E_{j-1}\times\mathcal{M}_{z_1,z_j}(\mathbb{C}),\text{eqj}\}$

.....

$\mathrm{E}_t=\{(M_{1,1},M_{1,2},\ldots,M_{1,t})\in E_{t-1}\times\mathcal{M}_{z_1,z_t}(\mathbb{C}),\text{eqt}\}$

Les équations eq1,..,eqt sont de la forme $B_{1,1}T-TB_{j,j}=U$, *où* $B_{1,1}=\begin{pmatrix} B_{j,j} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$ *et les matrices* $B_{j,j}$ *étant cycliques, la proposition 5 appliquée pour chaque j appartenant à {1,..,t} entraîne que* $dim(E_j)=\dim(E_{j-1})+z_j$, *par suite la dimension de l'espace affine* E_t *est égale à* $\sum_{i=1}^t z_i=n$.

Il en découle que la dimension de $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W,B)$ *est égale à n et* $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W,B)=\mathbb{C}[W,B]=n$.

Soit alors une matrice fractale M qui commute avec B elle appartient donc à $\mathbb{C}[W,B]$ *qui est de dimension n, par suite* $\mathbb{C}[W,M,B]$ *est inclus dans* $\mathbb{C}[W,B]$ *qui est de dimension n.*

Ce qui établit le Théorème de Gerstenhaber dans le cas de trois matrices commutantes, lorsque l'une est nilpotente et l'une est à diagonale cyclique.

[1] R.M. Guralnick, A note on Commuting Pairs of Matrices, Linear and Multilinear Algebra, vol.31, p 71-75,1992.

[2] M.G. Neubauer, D.J.Saltman, Two-Generated Commutative Subalgebras of $M_n(F)$, *Journal of Algebra, 164, p.545-562, 1994.*

□