La Culture du Pivot 3: Une distance plus simple que Hausdorf

PAR PATRICK TELLER

10 janvier 2022

1 Une distance facile et équivalente à Hausdorff

Rappelons la définition de la distance de Hausdorff:

Pour tout compact (A) de $\mathbb{R}^n$ et tout r>0 on note $V_r(A) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x, A) < r\}$.

Pour tout couple de compacts (A,B) D(A,B)=$\inf\{r > 0, A \subset V_r(B) \text{ et } B \subset V_r(A)\}$.

Soit E l'ensemble des polytopes de $\mathbb{R}^n$ et deux polytopes (C) et (C').

Soit les matrices H et H' telles que X$\in (C) \Longleftrightarrow H\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0$ et X$\in (C) \Longleftrightarrow H'\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0$, on notera H=$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots. & a1n & a1n+1 \\ a_{21} & \ldots & \ldots & a2n & a2n+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots. \\ a_{p1} & \ldots & \ldots & \ldots & \mathrm{apn}+1 \end{pmatrix}$ et H'=$\begin{pmatrix} a'11 & \ldots & \ldots. & a'1n & a'1n+1 \\ a'21 & \ldots & \ldots & a'2n & a'2n+1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots. \\ a'q+11 & \ldots & \ldots & \ldots & a'\mathrm{qn}+1 \end{pmatrix}$ et on posera pour toute face de F_i de (C)(respectivement F'$_i$ de (C')) son équation $f_i(x) = \sum_i a_{\mathrm{ij}} x_j + a_{\mathrm{in}+1}$ (respectivement f'$_i(x) = \sum_i a'_{\mathrm{ij}} x_j + a'_{\mathrm{in}+1}$); **on supposera que les gradients des f_i et des f'$_i$ sont tous unitaires (*)**.

On posera successivement

$d_i(C') = \max \{f_i(P), P \in (C')\}$,$d'_i(C) = \max \{f'_i(P), P \in (C)\}$ δ(C,C'))=max{d_i(C'),i=1..p},δ'(C,C'))=max{d'$_i$(C),i=1..q} et d((C),(C'))=max{$\delta(C, C')$,$\delta'(C,$ C')|}.

Proposition 1.

d définie comme au-dessus est une distance sur l'ensemble des polytopes de $\mathbb{R}^n$.

d_i et d'$_i$ sont très simples à calculer (simplexe, Criss-Cross).

Démonstration.

Pour chaque i $d_i(C')$ se calcule par la méthode de Dantzig ou par le Criss-Cross et il existe un sommet P'$_i$ de (C') tel que max(d_i(C')=f_i(P'$_i$); ceci allège les calculs et évite les radicaux etc…

Ainsi définie d(C,C') est positive et lorsque d(C,C')=0 cela signifie que pour tout i f_i(C')⩽0 et pour tout i f_i'(C)⩽0 donc $(C') \subset (C)$ et (C)⊂(C') donc (C)=(C').

en désignant par $\vec{g}_i$ le gradient de f_i et par $\vec{g}'_i$ le gradient de f_i'

f_i(P)=f_i(P_i)+<$\vec{g}_i$, $\overrightarrow{P_iP}$>=<$\vec{g}_i$, $\overrightarrow{P_iP}$> si P_i appartient à F_i, et f_i'(P)=f_i'(P'$_i$)+<$\vec{g}'_i$, $\overrightarrow{P'_iP'}$>=<$\vec{g}'_i$, $\overrightarrow{P'_iP'}$> si P'$_i$ appartient à F'_i.

Reste l'inégalité triangulaire: Soient (C),(C'),(C") des polytopes H,H',H",f_i,f'$_i$ et f_i'' définis comme au-dessus; quel que soit P' de (C') $f_i(P') \leqslant d_i(C, C')$ et quel que soit P" de (C") $f_j(P'') \leqslant d_j(C', C'')$, d'où

Proposition 2.

d définie comme au-dessus est une distance sur l'ensemble des polytopes de $\mathbb{R}^n$, on l'appellera « distance par lignes de niveaux ».

d_i et d'$_i$ sont très simples à calculer (simplexe, Criss-Cross).

Démonstration.

Pour chaque i $d_i(C')$ se calcule par la méthode de Dantzig ou par le Criss-Cross et il existe un sommet P'$_i$ de (C') tel que max(d_i(C')=f_i(P'$_i$); ceci allège les calculs et évite les radicaux etc...

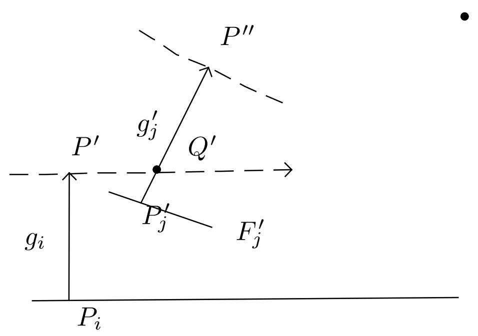
Ainsi définie d(C,C') est positive et lorsque d(C,C')=0 cela signifie que pour tout i f_i(C')$\leqslant$0 et pour tout i f_i'(C)$\leqslant$0 donc $(C')\subset(C)$ et (C)$\subset$$(C')$ donc (C)=(C').

en désignant par $\vec{g_i}$ le gradient de f_i et par $\vec{g_i'}$ le gradient de f_i'

f_i(P)=f_i(P_i)+<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P_iP}$>=<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P_iP}$> si P_i appartient à F_i, et f_i'(P)=f_i'(P'$_i$)+<$\vec{g_i'}$, $\overrightarrow{P_i'P'}$>=<$\vec{g_i'}$, $\overrightarrow{P_i'P'}$> si P'$_i$ appartient à F_i'.

Reste l'inégalité triangulaire: Soient (C),(C'),(C") des polytopes H,H',H",f_i,f'$_i$ et f_i'' définis comme au-dessus; quel que soit P' de (C') $f_i(P')\leqslant d_i(C,C')$ et quel que soit P" de (C") $f_j(P'')\leqslant d_j(C',C'')$, d'où

$\square$



f_i(P')=<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P_iP'}$ > ,f_j(P")=<$\vec{g_j'}$, $\overrightarrow{P_j'P''}$ > donc f_i(P")=<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P_iP''}$ > =<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P_iP'}$ > +<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P'P''}$ > =$f_i(P')$+<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P'P''}$ > , d'où f_i(P")-$f_i(P')$ = <$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P'P''}$ > .

f_i(P")-$f_i(P')-f_j(P'')$=<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{P'P''}$ > $-$<$\vec{g_j'}$, $\overrightarrow{P_j'P''}$ > =<$\vec{g_i}$, $\overrightarrow{Q'P''}$ > $-$<$\vec{g_j'}$, $\overrightarrow{P_j'P''}$ > =<$\vec{g_i}-\vec{g_j'}$, $\overrightarrow{Q'P''}$ > $-$<$\vec{g_j'}$, $\overrightarrow{P_j'Q'}$ > $\leqslant\|\overrightarrow{Q'P''}\|-\|\overrightarrow{P_j'P''}\|\leqslant-\|\overrightarrow{P_j'Q'}\|$, car $\vec{g_i}$ et $\vec{g_j'}$ sont unitaires et , respectivement, colinéaires à $\overrightarrow{Q'P''}$ et à $\overrightarrow{P_j'P''}$, donc f_i(P")-$f_i(P')-f_j(P'')\leqslant 0$; d'où l'inégalité triangulaire.

Proposition 3. *La distance par lignes de niveau n'est pas équivalente à celle de Hausdorff mais elle lui est topologiquement équivalente.*

Démonstration.

D'une certaine manière dire que la distance par lignes de niveaux tend vers 0 signifie que les hyperplans d'appui tendent vers des positions identiques et dire que la distance de Hausdorff tend vers0 signifie que les convexes « tendent » à se contenir l'un l'autre.

Supposons une suite de polytopes (Ck) qui tend vers (D) au sens de la distance par lignes de niveaux alors si pour tout i,k fi,k désigne l'application affine, de gradient unitaire qui est représentée par la ième ligne de Hk, son expression tend vers celle la ième ligne de (D); par suite pour tout point Mk de (Ck) et M de (D) la valeur du quotient $\frac{<\overrightarrow{M_k M}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f_{i,k})>}{\|\overrightarrow{M_k M}\|}$ *est bornée inférieurement et supérieurement, ce qui entraîne la convergence au sens de Hausdorff.*

La réciproque est plus géométrique, la coïncidence des polytopes entraîne celle des hyperplans d'appui. □ □

2 Union et intersection de polytopes

Il est immédiat que l'intersection de deux polytopes est un polytope et que l'ensemble des hyperplans d'appui de l'intersection est l'intersection des ensembles d'hyperplans d'appui.

Un petit schéma montre aisément que la réunion de deux polytopes n'est pas nécessairement un polytope.

Rappelons le

Théorème 4. *Un polytope est la réunion de simplexes dont les intérieurs sont disjoints.*

IL semblerait que la démonstration fait appel à des arguments plutôt topologiques fondés sur la convexité [3]; nous allons ébaucher une démonstration plus effective.

Nous allons tenter de décrire son application à travers la matrice

Soit un polytope (P) dans $\mathbb{R}^n$ défini par q$\geqslant n$ équations.

Si q=n (P) est un simplexe.

Supposons q>n.

Un sommet S est défini par n hyperplans en position générale et se traduit par l'annulation de n variables hors-base, par exemple z1,…,zn.

Un sommet relié directement à S est défini par l'annulation de n-1 de ces variables hors-base et une autre, par exemple: {z1, … , zn} −zk +zj; il y a donc au plus n sommets directement voisins de S; on appellera Voisinage de S l'ensemble de ces points.

Voici comment on les trouvera: la méthode de Dantzig s'exprime comme suit:

A partir de S, pour savoir quelle variable de la base va quitter la base : on choisit la variable

hors-base (disons la colonne k de la matrice) destinée à entrer et on cherche parmi les lignes Li, i=1,..,q, qui représentent les variables de la base, le maximum du quotient b_i/a_{ik} (pour aik>0)

Si on suppose que le polytope est « un polytope », c'est à dire un polyèdre convexe, borné, il y a dans chaque colonne au moins un terme strictement positif; donc dans chaque colonne correspondant à une variable hors-base on trouvera le maximum.

Si la dimension de l'espace affine engendré par le voisinage de S est égale à n- 1 il existe alorsun hyperplan affine unique H qui contient ce voisinage, S et H engendrent un simplexe $\sum$; P est la réunion de $\sum$ et d'un polytope P' qui possède moins de sommets, d'où la récurrence

Si la dimension de l'espace affine engendré par le voisinage de S est inférieure à n-1 on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On remarquera que les simplexes sont « recollés » suivant des faces communes.

BIBLIOGRAPHIE:

[1] Lazarus, Chapitre 6, Polytopes, https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~lazarusf/Enseignement/polytopes.pdf

[2] M.Manas,J.Nedoma, Finding All vertices of a Convex Polyedron, Numerische Mathematik, vol 12, pp.226-229.

[3] P.Teller, La cellule manquante, https://www.lalgebrisant.fr