

La culture du Pivot 1: Matrice d'un polytope

PATRICK TELLER

5 Janvier 2022

1 Prélude: le Pivot

Non, le pivot n'est pas une simple « trigonalisation » d'une matrice, outil de résolution des systèmes linéaires d'équations.

1.1 Les tableaux

Nous allons utiliser des tableaux de la forme suivante:

	u_1	u_2	\dots	u_n	u_{n+1}	u_{n+2}	\dots	u_{n+p}	u_{n+p+1}	w
u_{n+1}	$m11$	$m12$	\dots	$m1n$	1	0	\dots	0	0	$w1$
u_{n+2}	\dots	\dots	\dots	\dots	0	1	\dots	\dots	\dots	$w2$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
u_{n+p}	$mp1$	\dots	\dots	mpn	0	\dots	\dots	1	0	wp
s	$s1$	$s2$	\dots	sn	$sn+1=0$	\dots	\dots	$sn+p=0$	1	c

Un tableau est une représentation du système dans un état particulier:

on désigne par N l'ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$ et on dénomme ses éléments les variables hors-base et on désigne par B l'ensemble $\{u_{n+1}, \dots, u_{n+p+1}\}$, les variables de la base.

Les valeurs des variables de base se lisent (au bout de la ligne) dans la colonne w et les variables hors-base sont nulles.

Un tel tableau pourra représenter un système d'inéquations affines $\left\{ \begin{array}{l} MX \leq W \\ X \geq 0 \end{array} \right.$ ou plutôt le système équivalent d'équations affines $\left\{ \begin{array}{l} MX + Z = W \\ X \geq 0 \\ Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{p+1} \end{pmatrix} \geq 0 \end{array} \right.$, des opérations de pivot le transformant en système équivalent; il pourra aussi représenter le système d'équations linéaires $\left\{ \begin{array}{l} MX + Z = W \\ X \geq 0 \\ Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} \geq 0 \end{array} \right.$ et

la fonction affine $f: \rightarrow \sum_{j=1}^n s_j x_j + c$ dont on pourrait rechercher le maximum sous les contraintes du système.

Dans ce cas le tableau est plutôt détaillé comme suit

	u_1	u_2	\dots	u_n	u_{n+1}	u_{n+2}	\dots	u_{n+p}	f	w
u_{n+1}	$m11$	$m12$	\dots	$m1n$	1	0	\dots	0	0	$w1$
u_{n+2}	\dots	\dots	\dots	\dots	0	1	\dots	\dots	\dots	$w2$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
u_{n+p}	$mp1$	\dots	\dots	mpn	0	\dots	\dots	1	0	wp
s	$s1$	$s2$	\dots	sn	$sn+1=0$	\dots	\dots	$sn+p=0$	1	c

Ce dernier point de vue est celui d'origine de la méthode dite du simplexe.

En bref le simplexe c'est: la gestion d'une suite de pivots régis par une règle spécifique pour atteindre le maximum de la fonction.

1.2 Le Criss-Cross [1], [2]

Le Criss-Cross est une méthode plus évoluée, de type primal-dual, qui transforme un tableau comme suit (pas de fonction)

	u_1	u_2	...	u_n	u_{n+1}	u_{n+2}	...	u_{n+p}	u_{n+p+1}	w
u_{n+1}	$m11$	$m12$...	$m1n$	1	0	...	0	0	$w1$
u_{n+2}	0	1	$w2$
...
...
u_{n+p}	$mp1$	mpn	0	1	0	wp
s	$s1$	$s2$...	sn	$sn + 1 = 0$	$sn + p = 0$	1	c

On considère les variables comme ordonnées par leurs indices.

L'algorithme va transformer ce tableau en une suite de tableaux, associés à des systèmes équivalents, suivant une règle qui va être décrite ci-dessous:

Il est possible de montrer qu'en un temps fini le tableau se retrouvera dans l'un des états suivants

1) tableau représentant une inconsistance

$un + 1$	
$un + 2$	
...	
....	+ + + + + + + + -
$un + p$	

En effet la ligne rouge signifie que l'une des variables de base vérifie la relation $\sum_{j=1}^n m_{ij} u_j + u_{n+i} = w_i$, or les m_{ij} et les u_j sont positifs et $w_i < 0$.

2) l'ensemble des solutions du système est non borné

$un + 1$	-
$un + 2$	-
...	-
....	-
$un + p$	-
s	*

(et si * est aussi strictement négatif, f n'est pas bornée non plus)

En effet si on traduit cet état du tableau sous forme matricielle on voit que, puisque la colonne j_0 de M est Me_{j_0} est à termes négatifs donc s'il existe une solution X au système alors $M(X + \lambda e_{j_0}) \leq W$ pour tout $\lambda \geq 0$; c'est à dire: s'il y a des solutions leur ensemble n'est pas borné.

3) tableau représentant une solution admissible

	w
$un + 1$	+
$un + 2$	+
...	+
....	+
$un + p$	+
s	

Il suffit de poser $u_i = w_i$ pour chaque variable de la base (et les autres égales à 0).

On peut montrer que l'algorithme est fini et donc ne peut aboutir qu'à l'un de ces trois états.

Description de l'algorithme du Criss-Cross (en fait il existe des variantes):

Etape 1:

Soit $I = \{i \leq p, w_i < 0\}$ et $J = \{j \leq n + p, s_j < 0\}$

Si $I \cup J = \emptyset$, lire sur le tableau **une solution fin**.

sinon, soit $k = \min(I \cup J)$, si $k \in I$, aller en 2., si $k \in J$, aller en 3.

Etape 2:

Soit $S = \{j, m_{kj} < 0\}$
 Si $S = \emptyset$, le système est **inconsistant**, fin.
 Sinon soit $j_0 = \min(S)$, $B: B \cup j_0 \setminus k$. (et donc pivoter)
 Etape 3:
 Soit $T = \{i, m_{ik} > 0\}$
 Si $T = \emptyset$, l'ensemble des solutions n'est **pas borné**, fin.
 Sinon soit $i_0 = \min(S \cup T)$, $B: B \cup i_0 \setminus k$. (et donc pivoter)
 Retourner en 1.
 On désignera les divers cas comme suit
 1) tableau représentant une solution admissible

$un + 1$	w
$un + 2$	$+$
\dots	$+$
\dots	$+$
$un + p$	$+$
s	

2) tableau représentant une inconsistance

$un + 1$	
$un + 2$	
\dots	
\dots	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $-$
$un + p$	

c'est à dire qu'il n'y a pas de point admissible

3) l'ensemble des points admissibles est non borné

$un + 1$	$-$
$un + 2$	$-$
\dots	$-$
\dots	$-$
$un + p$	$-$
s	\star

(et si \star est aussi strictement négatif, f n'est pas bornée non plus)

1.3 Le Pivot « classique »

Nous ne détaillerons pas: il permet de rechercher le maximum de f ou d'établir que f n'est pas majorée.

1.4 Le Pivot à la recherche des sommets

sera détaillé ailleurs

2 Définitions

Dans ce qui suit on considérera l'espace affine de dimension n, les points seront représentés par des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$ (les réels $x_1, \dots, x_n, 1$ seront appelés coordonnées étendues).

Les hyperplans sont représentés par des équations de la forme $\sum a_j x_j + c_j = 0$; l'ensemble des solutions d'une inéquation de la forme $\sum a_j x_j + c_j \geq 0$ ou $\sum a_j x_j + c_j \leq 0$ est un demi-espace et l'intersection de demi-espaces est un polyèdre.

On supposera que les hyperplans sont en « position générale ».

Dans le cas de $n+1$ tels hyperplans l'une (et une seule) de ces intersections de demi-espaces est bornée, ce sera un simplexe [1], dans le cas de $p > n+1$ demi-espaces il pourra y avoir plusieurs polyèdres convexes bornés, comme on peut déjà le voir en dimension 2.

S'il existe un moyen d'identifier l'intersection de demi-espaces qui sera le simplexe dans le cas $p=n+1$, il n'existe pas de moyen d'identifier a priori les polyèdres convexes bornés et les non bornés, qui seront appelés polytopes. Retenons pour l'instant qu'un polyèdre convexe sera l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations de la forme $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1} = 0$, pour $i=1, \dots, n+1$, que l'on pourra aussi écrire

$$H \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0.$$

H sera appelée « matrice indicatrice » du polyèdre convexe, ce sera un élément de $\mathcal{M}_{p,n+1}(\mathbb{R})$, où $p \geq n+1$.

3 Reconnaître une matrice indicatrice de polytope

Soit une famille de p hyperplans en position générale dans \mathbb{R}^n , d'équations respectives $H_i \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, il est clair que, quelle que soit la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in \{-1, +1\}^p$, l'ensemble des solutions du

$$\text{système } \begin{cases} \varepsilon_1 H_1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \\ \dots \\ \varepsilon_p H_p \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \end{cases} \text{ est un polyèdre convexe, mais suivant les cas ce polyèdre sera borné ou}$$

pas (il suffit de dessiner la situation pour $n=2$).

Lemme 1.

Le polyèdre défini par le système $H \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$ est borné si et seulement si il ne contient aucun rayon, c'est à dire aucun sous-ensemble de la forme $v + \mathbb{R}^+ u$. [2]

Soit H une matrice indicatrice du polyèdre (P) si on pose $H = (L \ b)$ alors $H \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \iff \exists (z_1, \dots, z_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$, $LX + \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_p \end{pmatrix} + b = 0$, que nous écrirons $(L \ I) \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = -b$, ou $M \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = -b$; par suite un vecteur u (non nul!) dirigera un rayon inclus dans le polyèdre si et seulement si $\iff \exists (z_1, \dots, z_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$, $Lu + \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_p \end{pmatrix} = 0$, c'est à dire $\iff \exists (z_1, \dots, z_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$, $\exists u \neq 0$, $(L \ I) \begin{pmatrix} u \\ Z \end{pmatrix} = 0$, ou $\exists u \neq 0$, $Lu \leq 0$.

En résumé

Proposition 2.

Soient H et L comme au-dessus le système $\begin{cases} \varepsilon_1 H_1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \\ \dots \\ \varepsilon_p H_p \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \end{cases}$ définit un polytope si et seulement si il n'existe pas de vecteur non nul u tel que $\forall i, \varepsilon_i L_i(u) \leq 0$

Nous disposons donc de deux caractérisations des matrices indicatrices de polytopes:

Soit application du Criss-Cross adapté à la matrice $(L \ I \ -b)$, soit recherche de solutions u non nulles au système $Lu \leq 0$.

3.1 Criss-Cross

Soit H une matrice indicatrice du polyèdre (P) posons $H = \begin{pmatrix} L & b \end{pmatrix}$ alors $H \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \iff \exists (z_1, \dots, z_p) \in (\mathbb{R}^+)^p, LX + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} + b = 0$, que nous écrirons $\begin{pmatrix} L & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = -b$, ou $M \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = -b$.

Si on considère un polyèdre convexe (P) l'application de l'algorithme du Criss-Cross ne peut donc mener qu'à l'une des deux réponses: l'ensemble des points de (P) est non borné (le tableau présente une colonne de termes négatifs) ou c'est un polytope (la colonne W et la ligne s sont à termes positifs).

Exemple 3.

Soit le polyèdre de matrice indicatrice

On remarquera que j'ai ajouté une ligne et une colonne; ceci permet de suivre les noms des sommets, ceux des variables hors et in-base.

```
(%i1) m:matrix([0,x1,x2,z1,z2,z3,z4,w],[z1,1,4,1,0,0,0,19],[z2,0,1,0,1,0,0,4],[z3,3,-1,0,0,1,0,5],[z4,2,-5,0,0,0,1,-1]);
```

```
(%o1) 
$$\begin{pmatrix} 0 & x1 & x2 & z1 & z2 & z3 & z4 & w \\ z1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 19 \\ z2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ z3 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ z4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i2) for j:2 thru 8 do m[2,j]:m[2,j]/4;for i:3 thru 5 do (coeff:m[i,3],for j:2 thru 8 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[2,j]);m[2,1]:x2/m;
```

```
(%o2) done
```

```
(%o3) done
```

```
(%o4) x2
```

```
(%o5) 
$$\begin{pmatrix} 0 & x1 & x2 & z1 & z2 & z3 & z4 & w \\ x2 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{4} \\ z2 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ z3 & \frac{13}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 & \frac{39}{4} \\ z4 & \frac{13}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{91}{4} \end{pmatrix}$$

```

```
(%i6) for j:2 thru 8 do m[3,j]:-4*m[3,j];for j:2 thru 8 do m[2,j]:m[2,j]-m[3,j]/4;for i:4 thru 5 do (coeff:m[i,2],for j:2 thru 8 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[3,j]);m[3,1]:x1/m;
```

```
(%o6) done
```

```
(%o7) done
```

```
(%o8) done
```

```
(%o9) x1
```

```
(%o10) 
$$\begin{pmatrix} 0 & x1 & x2 & z1 & z2 & z3 & z4 & w \\ x2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ x1 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ z3 & 0 & 0 & -3 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ z4 & 0 & 0 & -2 & 13 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i11)
```

C'est fini le polygone est borné.

Exemple 4.

```
(%i36) n:matrix([0,x1,x2,z1,z2,z3,w],[z1,-1,-4,1,0,0,-19],[z2,-3,1,0,1,0,-5],[z3,
0,-1,0,0,1,-4]);
```

```
(%o36) 
$$\begin{pmatrix} 0 & x1 & x2 & z1 & z2 & z3 & w \\ z1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & -19 \\ z2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ z3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i37) for j:2 thru 7 do n[2,j]:-n[2,j];for i:3 thru 4 do (coeff:n[i,2],for j:2
thru 7 do n[i,j]:n[i,j]-coeff*n[2,j]);n[2,1]:x2;n;
```

```
(%o37) done
```

```
(%o38) done
```

```
(%o39) x2
```

```
(%o40) 
$$\begin{pmatrix} 0 & x1 & x2 & z1 & z2 & z3 & w \\ x2 & 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 19 \\ z2 & 0 & 13 & -3 & 1 & 0 & 52 \\ z3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i41)
```

voir la colonne de z1; le polygone n'est pas borné.

Nous disposons désormais d'une caractérisation assez simple des matrices indicatrices de polytopes.

Définition 5. *Matrices de type $\Gamma_{p,n}$*

Soit n un entier naturel et $p > n$ une matrice $H=(L,b)$ de $\mathcal{M}_{p,n+1}(\mathbb{R})$ sera dite de type $\Gamma_{p,n}$ si l'application du Criss-Cross au tableau $(L,I,-b)$ conduit à un état borné; ou, ce qui est équivalent, il n'existe pas de vecteur u non nul tel que $Lu \leq 0$.

Dans ce cas l'ensemble $V(\Gamma_{p,n}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, H \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0 \right\}$ est un polytope (et réciproquement).

4 Inclusion de Polytopes

Rappelons le

Théorème 6. *Lemme de Farkas*

Soient f_1, \dots, f_k des formes affines sur l'espace \mathbb{R}^n , et une forme affine g . Alors :

$$\{y \in E \mid f_1(y) \leq 0, \dots, f_k(y) \leq 0\} \subset \{y \in E \mid g(y) \leq 0\}$$

si et seulement si g est une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de f_1, \dots, f_k .

(voir [1])

Théorème 7.

Soient dans \mathbb{R}^n deux polytopes (P) et (P') , définis respectivement par les systèmes $H \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$ et $H' \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$, où (H,H') appartient à $\Gamma_{p,n+1}(\mathbb{R}) \times \Gamma_{q,n+1}(\mathbb{R})$, avec $p > n$ et $q > n$, $(P') \subset (P) \iff \exists W \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}^+), H = WH'$.

Démonstration.

$$,Posons H' \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a'_{1j}x_j + a'_{1n+1} \\ \dots \\ \sum a'_{qj}x_j + a'_{qn+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'1(x) \\ h'2(x) \\ \dots \\ h'q(x) \end{pmatrix} \text{ et } H \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j}x_j + a_{1n+1} \\ \dots \\ \sum a_{pj}x_j + a_{pn+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h1(x) \\ h2(x) \\ \dots \\ hp(x) \end{pmatrix};$$

il suffit d'appliquer le résultat précédent à la famille formée par les formes affines $(h'1, \dots, h'q)$ et chacune des formes affines h_i ; ce qui assure l'existence pour chaque i de coefficients positifs (w_{i1}, \dots, w_{iq}) tels que $h_i = \sum w_{ij}h'_j$ et par suite de la matrice W à termes positifs telle que $H = WH'$.

La réciproque est immédiate. □

Proposition 8. *Les matrices positives inversibles*

$M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$ si et seulement si M est une matrice de permutation généralisée; c'est à dire M possède un élément non nul et un seul par ligne et par colonne et celui-ci est strictement positif. [3]

Définition 9. *La relation de domination sur $C_{n+1}(\mathbb{R}) = \cup_{p \geq n+1} \Gamma_{p,n+1}(\mathbb{R})$*

Soient $H1$ et $H2$ deux matrices de $C_{n+1}(\mathbb{R})$ on dira que $H1$ domine $H2$ lorsqu'il existe W à termes positifs telle que $H1 = WH2$.

Proposition 10.

La relation de domination est une relation de préordre sur $C_{n+1}(\mathbb{R})$.

Le Théorème 2 montre que $H1$ domine $H2$ si et seulement si le convexe défini par $H2 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$ est inclus dans le convexe $H1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$ (on écrira $H1 \rightarrow H2$).

La relation de domination n'est qu'un préordre sur les matrices mais elle correspond à l'inclusion qui est un ordre sur les polytopes convexes.

C'est l'enveloppe convexe qui permettra de déterminer l'existence de la borne supérieure (modulo une matrice de permutation généralisée) de deux matrices de type Γ .

Théorème 11.

Soient $H1$ et $H2$ deux matrices à $n+1$ colonnes.

- i) $\begin{pmatrix} H1 \\ H2 \end{pmatrix} \rightarrow H1$ et $\begin{pmatrix} H1 \\ H2 \end{pmatrix} \rightarrow H2$ et on a l'implication $\forall M \in C_{n+1}(\mathbb{R}), \left\{ \begin{matrix} M \rightarrow H1 \\ M \rightarrow H2 \end{matrix} \Rightarrow M \rightarrow \begin{pmatrix} H1 \\ H2 \end{pmatrix} \right.$
- ii) Il existe une matrice N telle que $\left\{ \begin{matrix} H1 \rightarrow N \\ H2 \rightarrow N \end{matrix} \right.$ et $\forall M \in C_{n+1}(\mathbb{R}), \left\{ \begin{matrix} H1 \rightarrow M \\ H2 \rightarrow M \end{matrix} \Rightarrow N \rightarrow M$

Démonstration. □

i) $\begin{pmatrix} H1 \\ H2 \end{pmatrix}$ est une matrice indicatrice de l'intersection des deux polytopes définis par $H1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$ et $H2 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$ c'est à dire le polytope défini par la concaténation des contraintes.

ii) N est la matrice indicatrice de l'enveloppe convexe de la réunion des sommets des convexes définis par $H1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$ et $H2 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$

4.1 Le cas particulier du simplexe

Soient $n+1$ hyperplans (H_1, \dots, H_{n+1}) , en position générale, d'équations respectives $\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1} = 0$, ils déterminent $2^{n+1} - 1$ régions déterminées par les systèmes d'inéquations

$$\left\{ \begin{matrix} \sum a_{1,j}x_j + a_{1,n+1} \text{ du } \text{signe}(\varepsilon_1) \\ \dots\dots\dots \\ \sum a_{n+1,j}x_j + a_{n+1,n+1} \text{ du } \text{signe}(\varepsilon_{n+1}) \end{matrix} \right., \text{ où } \varepsilon_i = +/ -1.$$

On désignera aussi par H_i la forme affine $\sum a_{i,j}x_j + a_{i,n+1}$ et par L_i la forme linéaire $\sum a_{i,j}x_j$; on désignera par H la matrice $(a_{i,j})_{(i,j) \in \{1, \dots, n+1\}^2}$

Les hyperplans étant en position générale H appartient à $\mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Chaque franchissement d'un des hyperplans inverse le signe de l'inéquation correspondante; à chaque région non bornée correspond une région non bornée « opposée » définie par l'inversion des $n+1$ inéquations qui traduit le franchissement des $n+1$ hyperplans.

Parmi les $2^{n+1}-1$ régions ainsi décrites il en existe une et une seule qui est bornée, on la désignera sous le nom de simplexe déterminé par les hyperplans cités; ce qui caractérise parmi ces régions le simplexe c'est qu'il n'a pas de région opposée, d'où le résultat de [3] entraîne que le simplexe est

défini par le système
$$\begin{cases} \sum a_{1,j}x_j + a_{1,n+1} > 0 \\ \dots\dots\dots \\ \sum a_{n+1,j}x_j + a_{n+1,n+1} > 0 \end{cases} \quad \text{où}$$

i) $\sum_{i=1, \dots, n+1} \lambda_i L_i = 0$

ii) $\sum_{i=1, \dots, n+1} \lambda_i a_{i,n+1} > 0$.

Quitte à multiplier par une constante strictement positive on peut supposer que $\sum_{i=1, \dots, n+1} \lambda_i c_i = 1$; que l'on peut écrire sous la forme $(\lambda_1 \dots \dots \lambda_{n+1})H = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)$,

ce qui est équivalent à ${}^t H \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$ et par suite à $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = {}^t H^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si on désigne par $\gamma_{i,j}$ le cofacteur de a_{ij} la dernière relation s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(H)} \begin{pmatrix} \gamma_{1,n+1} & \dots & \dots & \gamma_{1,n+1} \\ \gamma_{2,n+1} & \dots & \dots & \gamma_{2,n+1} \\ \dots & & & \\ \gamma_{n+1,n+1} & & & \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(H)} \begin{pmatrix} \gamma_{1n+1} \\ \gamma_{2n+1} \\ \dots \\ \gamma_{n+1n+1} \end{pmatrix}$.

En conclusion le point $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ appartient au simplexe si et seulement si $H \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ est du signe de $\frac{1}{\det(H)} \begin{pmatrix} \gamma_{1,n+1} \\ \gamma_{2,n+1} \\ \dots \\ \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$.

Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})$ à valeurs dans $\{0, 1\}^{n+1}$ si pour on multiplie chaque forme affine H_i par ε_i alors chaque $\gamma_{i,n+1}$ est multiplié par $\prod_{j \neq i} \varepsilon_j$ et le déterminant de H est multiplié par $\prod_j \varepsilon_j$ d'où

$\frac{1}{\det(H)} \begin{pmatrix} \gamma_{1,n+1} \\ \gamma_{2,n+1} \\ \dots \\ \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$ est multiplié par ε_j .

Donc si on remplace H par la matrice $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & \\ 0 & \varepsilon_2 & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon_{n+1} \end{pmatrix} H$, où $\varepsilon_i = -1$ si $\lambda_i \geq 0$ et $\varepsilon_i = 1$ sinon, alors $\frac{1}{\det(H)} \begin{pmatrix} \gamma_{1,n+1} \\ \gamma_{2,n+1} \\ \dots \\ \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$ aura les bons signes, par suite le simplexe est défini par le système $H \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$.

Enfin, quitte à échanger deux lignes de H on peut supposer que $\det(H) > 0$; on verra plus loin l'intérêt que l'on peut avoir à diviser chaque ligne H_i par la norme euclidienne $\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$, de telle sorte que les gradients des formes affines H_i soient unitaires; dans un tel cas on dira

Théorème 12.

Soit dans \mathbb{R}^n $n+1$ hyperplans en position générale, (H_1, \dots, H_{n+1}) , on peut écrire leurs équations respectives sous la forme $\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1} = 0$, $j=1..n$, de telle sorte que le simplexe qu'ils déterminent soit défini par un système de la forme $H \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0$, où $\det(H) > 0$ et pour tout i , $\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} = 1$.

Définition 13. *Matrice indicatrice d'un simplexe*

La matrice H sera appelée (une) matrice indicatrice du simplexe; même avec la règle $\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}=1$ elle n'est pas unique et est définie modulo une permutation paire des lignes.

Exemple 14.

On considère le triangle déterminé par les trois droites d'équations $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 40 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - 20 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 - 28 = 0 \end{cases}$.

D'abord on détermine un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$: $\left(\begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right)$

```
(%i3) linsolve([5*lambda1+5*lambda2+7*lambda3,8*lambda1-4*lambda2-4*lambda3
,-40*lambda1-20*lambda2-28*lambda3=1],[lambda1,lambda2,lambda3]);
```

```
(%o3) [lambda1 = -1/20, lambda2 = -19/40, lambda3 = 3/8]
```

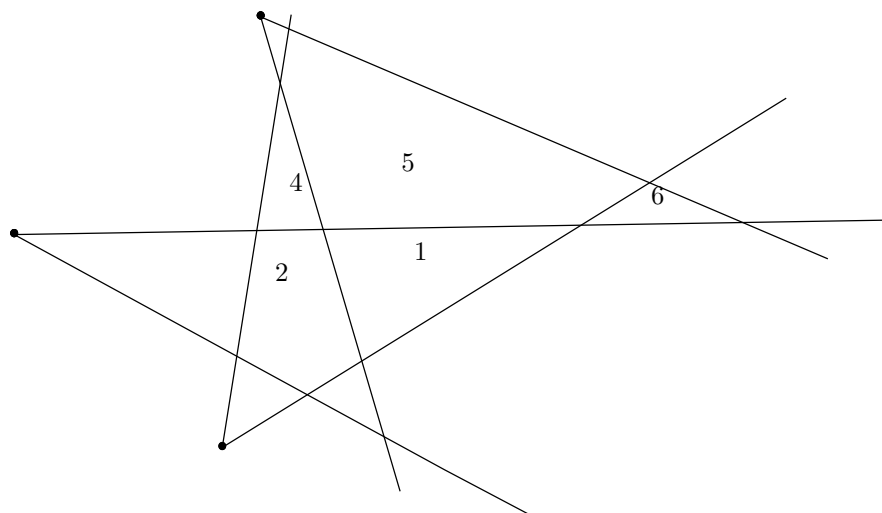
```
(%i2) gamma1: -20+28, gamma2: 76, gamma3: -60
```

donc on multiplie la matrice H d'origine $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -40 \\ 5 & -4 & -20 \\ 7 & -4 & -28 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 & -40 \\ 5 & -4 & -20 \\ 7 & -4 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -40 \\ 5 & -4 & -20 \\ -7 & 4 & 28 \end{pmatrix}$.

Le déterminant est positif.

Le point de coordonnées (3,2) n'y appartient pas car $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -40 \\ 5 & -4 & -20 \\ -7 & 4 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$, qui n'est pas négatif.

Le schéma qui suit montre la situation de l'intersection de p demi-espaces lorsque $p > n+1$.

**5 Déterminer si deux polytopes sont disjoints**

On considère deux polytopes (S) et (S') définis respectivement par les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} H\left(\begin{array}{c} X \\ 1 \end{array}\right) \leq 0 \\ X \geq 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} H'\left(\begin{array}{c} X \\ 1 \end{array}\right) \leq 0 \\ X \geq 0 \end{array} \right. ; \text{ ils auront une intersection non vide si et seulement si le système d'inéquations suivant possède des solutions: } \left\{ \begin{array}{l} H\left(\begin{array}{c} X \\ 1 \end{array}\right) \leq 0 \\ H'\left(\begin{array}{c} X \\ 1 \end{array}\right) \leq 0 \\ X \geq 0 \end{array} \right. . \text{ Nous allons pour cela appliquer}$$

la technique du Criss-Cross.

Plutôt que d'introduire des notations lourdes nous allons considérer le cas de deux polytopes inclus dans le premier orthant (afin de ne rechercher que des valeurs positives pour les variables (voir en annexe le cas de variables évoluant dans \mathbb{R})).

Le point de départ est à nouveau la simple remarque suivante:

L'inégalité $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1} \geq 0$ est équivalente à $\exists z \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1} = z \iff \exists z \geq 0, -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + z = a_{in+1}$.

Exemple 15.

On considère les triangles $\left\{ \begin{array}{l} x + y - 10 \geq 0 \\ -3x + 2y + 20 \geq 0 \\ x - 4y + 20 \geq 0 \\ (x, y, z) \geq 0 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} x + 6y - 22 \geq 0 \\ 3x - 8y + 12 \geq 0 \\ -2x + y + 18 \geq 0 \\ (x, y, z) \geq 0 \end{array} \right.$.

Nous cherchons donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} -x - y + z = -10 \\ 3x - 2y + z = 20 \\ -x + 4y + z = 20 \\ -x - 6y + z = -22 \\ -3x + 8y + z = 12 \\ 2x - y + z = 18 \\ (x, y, z) \geq 0 \end{array} \right.$

, que l'on peut considérer comme la recherche du maximum de la restriction de $18-2x+y$ au

polyèdre (ici polygone) défini par $\left\{ \begin{array}{l} -x - y + z = -10 \\ 3x - 2y + z = 20 \\ -x + 4y + z = 20 \\ -x - 6y + z = -22 \\ -3x + 8y + z = 12 \\ (x, y, z) \geq 0 \end{array} \right.$

```
(%i11) m:matrix([0,t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,b],[t3,-1,-1,1,0,0,0,0,-10],
               [t4,3,-2,0,1,0,0,0,20],[t5,-1,4,0,0,1,0,0,20],
               [t6,-3,8,0,0,0,1,0,12],[t7,-1,-6,0,0,0,0,1,0,-22],
               [t8,2,-1,0,0,0,0,0,1,18]);
```

```
(%o11) ( 0 t1 t2 t3 t4 t5 t6 t7 t8 b
        t3 -1 -1 1 0 0 0 0 0 -10
        t4 3 -2 0 1 0 0 0 0 20
        t5 -1 4 0 0 1 0 0 0 20
        t6 -3 8 0 0 0 1 0 0 12
        t7 -1 -6 0 0 0 0 1 0 -22
        t8 2 -1 0 0 0 0 0 1 18 )
```

```
(%i12) for j:2 thru 10 do m[4,j]:m[4,j]/4;for i:2 thru 3 do (coeff:m[i,3],for j:2
thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[4,j]); for i:5 thru 7 do (coeff:m[i,3],for
j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[4,j]);m[4,1]:t2;m;
```

```
(%o12) done
```

```
(%o13) done
```

```
(%o14) done
```

```
(%o15) t2
```

$$\begin{array}{l}
 (\%o16) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\
 t3 & -\frac{5}{4} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -5 \\
 t4 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 30 \\
 t2 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 t6 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -28 \\
 t7 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & 8 \\
 t8 & \frac{7}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 23
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

(%i17) for j:2 thru 10 do m[2,j]:-4*m[2,j]/5; for i:3 thru 7 do (coeff:m[i,2],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[2,j]);m[2,1]:t1;m;

(%o17) done

(%o18) done

(%o19) t1

$$\begin{array}{l}
 (\%o20) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\
 t1 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 t4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
 t2 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 6 \\
 t6 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{11}{5} & 1 & 0 & 0 & -24 \\
 t7 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 18 \\
 t8 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 & 16
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

(%i21) for j:2 thru 10 do m[5,j]:-5*m[5,j]/4;for i:2 thru 4 do (coeff:m[i,4],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[5,j]);for i:6 thru 7 do (coeff:m[i,4],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[5,j]);m[5,1]:t3;m;

(%o21) done

(%o22) done

(%o23) done

(%o24) t3

$$\begin{array}{l}
 (\%o25) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\
 t1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 28 \\
 t4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & -40 \\
 t2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 12 \\
 t3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 30 \\
 t7 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 78 \\
 t8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{7}{4} & 0 & 1 & -26
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

(%i26) for j:2 thru 10 do m[3,j]:-2*m[3,j]/9;for j:2 thru 10 do m[2,j]:m[2,j]-2*m[3,j]; for i:4 thru 7 do (coeff:m[i,6],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[3,j]);m[3,1]:t5;m;

(%o26) done

(%o27) done

(%o28) done

(%o29) t5

$$\begin{array}{l}
 (\%o30) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\
 t1 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{92}{9} \\
 t5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & 1 & -\frac{5}{9} & 0 & 0 & \frac{80}{9} \\
 t2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\
 t3 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{18} & 0 & \frac{5}{18} & 0 & 0 & \frac{50}{9} \\
 t7 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{9} & 0 & \frac{10}{9} & 1 & 0 & \frac{182}{9} \\
 t8 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{18} & 0 & -\frac{1}{18} & 0 & 1 & \frac{26}{9}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

(%i31) for j:2 thru 10 do m[2,j]:9*m[2,j]/4;for i:3 thru 7 do (coeff:m[i,5],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[2,j]);m[2,1]:t4;m;

(%o31) done

(%o32) done

(%o33) t4

$$\begin{array}{l}
 (\%o34) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\
 t4 & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 23 \\
 t5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 14 \\
 t2 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\
 t3 & -\frac{11}{8} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{17}{2} \\
 t7 & -\frac{13}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & -13 \\
 t8 & \frac{13}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 & \frac{39}{2}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

(%i35) for j:2 thru 10 do m[5,j]:-8*m[5,j]/11;for i:2 thru 4 do (coeff:m[i,2],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[5,j]);for i:6 thru 7 do (coeff:m[i,2],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[5,j]);m[5,1]:t1;m;

(%o35) done

(%o36) done

(%o37) done

(%o38) t1

$$\begin{array}{l}
 (\%o39) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\
 t4 & 0 & 0 & \frac{18}{11} & 1 & 0 & \frac{5}{11} & 0 & 0 & \frac{100}{11} \\
 t5 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & 0 & 1 & -\frac{5}{11} & 0 & 0 & \frac{120}{11} \\
 t2 & 0 & 1 & -\frac{3}{11} & 0 & 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 & \frac{42}{11} \\
 t1 & 1 & 0 & -\frac{8}{11} & 0 & 0 & -\frac{1}{11} & 0 & 0 & \frac{68}{11} \\
 t7 & 0 & 0 & -\frac{26}{11} & 0 & 0 & \frac{5}{11} & 1 & 0 & \frac{78}{11} \\
 t8 & 0 & 0 & \frac{13}{11} & 0 & 0 & \frac{3}{11} & 0 & 1 & \frac{104}{11}
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

(%i40)

Ce qui établit que l'intersection des deux triangles n'est pas vide.
Etudions un deuxième cas:

```
(%i213) q:matrix([0,x,y,z1,z2,z3,z4,z5,z6,b],[z1,-2,1,1,0,0,0,0,0],[z2,3,1,0,1,0,0,0,30],[z3,1,-3,0,0,1,0,0,-10],[z4,-1,1,0,0,0,1,0,0],[z5,2,1,0,0,0,1,0,34],[z6,-1,-3,0,0,0,0,1,-32]);
```

$$\begin{array}{l}
 (%o213) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & z6 & b \\
 z1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 z2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\
 z3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\
 z4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 z5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 34 \\
 z6 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -32
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

```
(%i213) for j:2 thru 10 do q[3,j]:q[3,j]/3;for j:2 thru 10 do q[2,j]:q[2,j]+2*q[3,j];for i:4 thru 7 do (coeff:q[i,2],for j:2 thru 10 do q[i,j]:q[i,j]-coeff*q[3,j]);q[3,1]:x;q;
```

```
(%o214) done
```

```
(%o215) done
```

```
(%o216) done
```

```
(%o217) x
```

$$\begin{array}{l}
 (%o218) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & z6 & b \\
 z1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
 x & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
 z3 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & -20 \\
 z4 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\
 z5 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 14 \\
 z6 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & -22
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

```
(%i219) for j:2 thru 10 do q[2,j]:3*q[2,j]/5;for i:3 thru 7 do (coeff:q[i,3],for j:2 thru 10 do q[i,j]:q[i,j]-coeff*q[2,j]);q[2,1]:y;q;
```

```
(%o219) done
```

```
(%o220) done
```

```
(%o221) y
```

$$\begin{array}{l}
 (%o222) \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & z6 & b \\
 y & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\
 x & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
 z3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
 z4 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\
 z5 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\
 z6 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 10
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

```
i223) for j:2 thru 10 do q[5,j]:-5*q[5,j]/4;for i:2 thru 4 do (coeff:q[i,4],for j:2 thru 10 do q[i,j]:q[i,j]-coeff*q[5,j]);for i:6 thru 7 do (coeff:q[i,4],for j:2 thru 10 do q[i,j]:q[i,j]-coeff*q[5,j]);q[5,1]:z1;q;
```

```
(%o223) done
```

(%o224) done

(%o225) done

(%o226) z1

$$\begin{array}{l}
 (%o227) \\
 \left(\begin{array}{cccccccccc}
 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & z6 & b \\
 y & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{15}{2} \\
 x & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{15}{2} \\
 z3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 5 \\
 z1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & \frac{15}{2} \\
 z5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{23}{2} \\
 z6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

(%i189)

ce qui établit que le système n'est pas compatible, c'est à dire les triangles sont disjoints.

BIBLIOGRAPHIE:

- [1] T. Terlaky (1985) A convergent criss-cross method, Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, 16:5, 683-690, DOI: 10.1080/02331938508843067
- [2] K.Fukuda, T.Terlaky, Criss-Cross: a freshview on pivot algorithms, Mathematical Programming, 79,1997.