

Et si on définissait le déterminant autrement

PAR PATRICK TELLER

Peut-on définir le déterminant et établir ses propriétés nécessaires en évitant le recours aux formes multilinéaires antisymétriques ?

L'objectif de ce travail est de définir le déterminant d'une matrice carrée au moyen d'une factorisation adaptée de la décomposition de Bruhat $M=UPV$.

On décrira un algorithme qui détermine la matrice P en un maximum de $\frac{n^3-n}{3}$ multiplications.

1 Le cahier des charges

Nous cherchons une fonction $d: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow K$ telle que

- i) $d(I)=1$
- ii) $\forall M, j, k, d((M_1, \dots, M_{j-1}, kM_j, M_{j+1}, \dots, M_n)) = kd(M)$
- iii) $\forall M, k, i, j, d(M(I + kE_{ij})) = d(M)$
- iv) $\forall M, S(\text{matrice de permutation}), d(MS) = \text{sgn}(S)d(M)$

2 Factorisation d'une matrice carrée « à la Bruhat »

Définition 1. *Matrices principales*

Une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(K)$ sera dite matrice principale lorsqu'elle possède un terme non nul et un seul par ligne et par colonne; leur ensemble sera noté $\mathcal{P}_n(K)$.

Exemple 2.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 3. *Le poids d'une matrice principale*

Soit une matrice principale P et la permutation φ telle que $\forall j, p_{ij} \neq 0 \iff i = \varphi(j)$; on appellera poids de P le réel $\text{sgn}(\varphi) \times \prod_{j=1}^n p_{\varphi(j)j}$.

Définition 4. On désignera par \mathcal{U}_n , (resp \mathcal{L}_n), les ensembles de matrices triangulaires supérieures (resp triangulaires inférieures) dont la diagonale ne comporte que des « 1 » (on dira « unipotentes »).

Théorème 5. *D'après la Décomposition de Bruhat*

Quelle que soit la matrice inversible M il existe un triplet $(P, U, V) \in \mathcal{P}_n \times \mathcal{U}_n^2$ telles que $M=UPV$ et P est unique

Démonstration.

Existence:

On désignera par (E_1, \dots, E_n) la base canonique de K^n

Soit $M_1 = \sum \lambda_{k1} E_k$ on pose $\varphi(1) = \max \{k, \lambda_{k1} \neq 0\}$, $E'_1 = \sum \lambda_{k1} E_k$ et $a_{\varphi(1)1} = \lambda_{\varphi(1)1}$.

La famille $(E_1, \dots, E_{\varphi(1)-1}, E'_1, E_{\varphi(1)+1}, \dots, E_n)$ est une base (« lemme de Steinitz »), donc

$M_2 \in \sum_{k \neq \varphi(1)} \lambda_{k2} E_k + \text{Vect}(E'_1)$ on pose $\varphi(2) = \max \{k, \lambda_{k2} \neq 0\}$, $E'_2 = \sum \lambda_{k2} E_k$ et $a_{\varphi(2)2} = \lambda_{\varphi(2)2}$

.... de manière générale pour chaque j $M_j \in \sum_{k \notin \varphi(\llbracket 1, \dots, j-1 \rrbracket)} \lambda_{kj} E_k + \text{Vect}(E'_1, \dots, E'_{j-1})$ et $\varphi(j) = \max \{k, \lambda_{kj} \neq 0\}$, $E'_j = \sum_{k \notin \varphi(\llbracket 1, \dots, j-1 \rrbracket)} \lambda_{kj} E_k$ et $a_{\varphi(j)j} = \lambda_{\varphi(j)j}$

On résumera cela ainsi : pour chaque j on pose $\varphi(j) = \min \{i, M_j = a_{ij} E_i \text{ mod Vect}(M_1, \dots, M_{j-1}, E_1, \dots, E_{i-1})\}$.

Ceci définit une matrice principale $P = (p_{ij})$, où $p_{ij} = \delta_{i\varphi(j)} a_{ij}$ et deux matrices triangulaires supérieures U et V unipotentes telles que $M = UPV$.

Unicité de P:

$$M = UPV \iff MV^{-1} = UP$$

Supposons $UPV = U'P'V'$, φ et φ' associées à P et P' , d'où $U^{-1}U'P' = P'VV'^{-1}$, posons $W = U^{-1}U'$ et $Z = VV'^{-1}$, W et Z appartiennent à \mathcal{U}_n .

Supposons donc que $WP' = PZ$, dans WP' les termes qui vérifient $i > \varphi'(j)$ sont nuls et dans PZ les termes qui vérifient $i = \varphi(j)$ ne le sont pas, donc $\forall j, \varphi(j) \leq \varphi'(j)$ et comme il s'agit de permutations elles sont égales et, en utilisant le caractère unipotent de W et Z , on en déduit $P = P'$ \square

Exemple 6. $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a. $M_1 = E_3 - 2E_2 + E_1$

b. $M_2 = 2E_1 + M_1$

c. $M_3 = 2M_1 - M_2 + 3E_2$; d'où $(M_1 \ M_2 \ M_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est

à dire $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ici $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 7. le couple (U, V) n'est pas forcément unique

le c. pourrait tout aussi bien s'écrire $M_3 = M_1 + 3E_2 - 2E_1$; d'où $(M_1 \ M_2 \ M_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire $M = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ici $U = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 8. *Le couple (U, V) est unique si et seulement $\varphi: t \mapsto n - t$.*

Démonstration.

$UPV = U'PV' \iff U'^{-1}UP = P'V'^{-1}$, nous allons donc rechercher les matrices triangulaires supérieures B et C telles que $BP = PC$.

Posons $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ et $P = (p_{ij})$

Le terme (i, j) de BP est $b_{i\varphi(j)}p_{\varphi(j)j}$ il est automatiquement nul lorsque $i > \varphi(j)$

Le terme (i, j) de PC est $p_{i\varphi^{-1}(i)}c_{\varphi^{-1}(i)j}$ il est automatiquement nul lorsque $\varphi^{-1}(i) > j$

i) Le cas $i = \varphi(j)$ se traduit par $b_{ii} = c_{jj} = 1$.

ii) Lorsque $i > \varphi(j)$ ou $\varphi^{-1}(i) > j$ $b_{i\varphi(j)}$ ou $c_{\varphi^{-1}(i)j}$ est nul, donc les deux le sont

iii) Lorsque $\begin{cases} i < \varphi(j) \\ \text{et} \\ \varphi^{-1}(i) < j \end{cases}$ la condition $b_{i\varphi(j)}p_{\varphi(j)j} = p_{i\varphi^{-1}(i)}c_{\varphi^{-1}(i)j}$ permet l'existence de $b_{i\varphi(j)}$ et

$c_{\varphi^{-1}(i)j}$ non nuls (mais liés par cette relation).

Donc $(B, C) \neq (I, I) \iff \begin{cases} \text{il existe } (i, j) \text{ tels que} \\ i < \varphi(j) \\ \text{et} \\ \varphi^{-1}(i) < j \end{cases}$ ce qui, en posant $k = \varphi^{-1}(i)$, équivaut à $\exists (j, k) \in [1, \dots, n], (j - k)(\varphi(j) - \varphi(k)) > 0$.

Il est immédiat que le seul cas où il n'existe pas de tel couple est celui où φ est la permutation $t \mapsto n - t$. \square

3 Le sens de P

La matrice P étant unique « elle doit bien avoir une signification ».

Nous écrirons $P = U^{-1}MV^{-1}$ et poser $Q = U$, $R = V^{-1}$, ainsi $P = Q^{-1}MR$, que nous considérerons comme une formule de changement de base: si B est la base canonique et f est représenté par M dans cette base et si B' et B'' sont deux autres bases: $P = \text{Mat}_{B''B}(\text{Id})\text{Mat}_B(f)\text{Mat}_{BB'}(\text{Id})$ signifie que P représente f relativement aux nouvelles bases B' (au départ) et B'' (à l'arrivée).

Rappelons la définition de drapeau:

Définition 9.

On appelle drapeau dans K^n une suite de sous-espaces $D_1 \subset \dots \subset D_n = K^n$ où $\forall k, \dim(D_k) = k$.

On appellera drapeau associé à une base (e_1, \dots, e_n) le drapeau $\text{Vect}(e_1) \subset \text{Vect}(e_1, e_2) \subset \dots \subset K^n$

Le fait que les matrices de passage $\text{Mat}_{BB''}(\text{Id})$, $\text{Mat}_{BB'}(\text{Id})$ soient inversibles et triangulaires supérieures signifie que les drapeaux associés aux bases B, B', B'' sont identiques; c'est ainsi qu'est classiquement traduite la décomposition de Bruhat: il existe deux bases $B' = (e'_i)_{i=1, \dots, n}$ et $B'' = (e''_j)_{j=1, \dots, n}$ qui engendrent le même drapeau que B et telles que $\forall i, f(e'_i) = e''_{\varphi(i)}$.

Cela ne suffit pas à donner un sens aux coefficients de la matrice P .

Définition 10.

On appelle drapeau affine dans K^n associé à une base (e_1, \dots, e_n) la suite des sous-espaces affines $D_1 = e_1 + \{0\} \subset e_2 + \text{Vect}(e_1) \subset e_3 + \text{Vect}(e_1, e_2) \dots \subset e_n + \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$.

Le fait que les matrices de passage $\text{Mat}_{\mathbb{B}\mathbb{B}''}(\text{Id})$, $\text{Mat}_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}(\text{Id})$ soient triangulaires supérieures et unipotentes signifie que les drapeaux affines associés aux bases $\mathbb{B}, \mathbb{B}', \mathbb{B}''$ sont identiques. L'égalité $P = \text{Mat}_{\mathbb{B}''\mathbb{B}}(\text{Id})\text{Mat}_{\mathbb{B}}(f)\text{Mat}_{\mathbb{B}\mathbb{B}'}(\text{Id})$ se traduit par : il existe deux bases $\mathbb{B}' = (e'_i)_{i=1, \dots, n}$ et $\mathbb{B}'' = (e''_j)_{j=1, \dots, n}$ qui engendrent le même drapeau affine que \mathbb{B} et telles que $\forall i, f(e'_i) = p_{\varphi(i)} e''_{\varphi(i)}$.

4 Pour définir le déterminant d'une matrice carrée

Définition 11. *Le poids d'une matrice*

Soient $M \in \mathcal{GL}_n(K)$ et U, P, V comme au-dessus alors on posera $\rho(M) = \rho(P)$

et si $\text{rang}(M) < n$ on posera $\rho(M) = 0$

Lemme 12. *L'effet de la transposition de deux colonnes consécutives de M*

Soient les colonnes M_j et M_{j+1} et M' la matrice obtenue à partir de M en échangeant les colonnes M_j et M_{j+1} ; on désignera par φ' et P' la permutation et la matrice principale associées à M' .

$$1^{\text{er}} \text{ cas } \varphi(j) < \varphi(j+1) \quad \text{les colonnes } M_j \text{ et } M_{j+1} \text{ sont comme suit } \begin{pmatrix} & & & \dots & & \dots \\ & & & & & \\ & 0 & \dots & 0 & m_{\varphi(j)j} & ? \\ & & & & 0 & ? \\ & 0 & \dots & 0 & \dots & m_{\varphi(j+1)j+1} \\ & & & & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $\varphi'(j) = j+1$ et $\varphi'(j+1) = j$ et $p'_{\varphi'(j)j} p'_{\varphi'(j+1)j+1} = p_{\varphi(j)j} p_{\varphi(j+1)j+1}$

$$2^{\text{nd}} \text{ cas } \varphi(j) > (j+1) \quad \text{les colonnes } M_j \text{ et } M_{j+1} \text{ sont comme suit } \begin{pmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & 0 & \dots & 0 & 0 & m_{\varphi(j+1)j+1} \\ & & & & ? & * \\ & & & & ? & * \\ & 0 & \dots & 0 & m_{\varphi(j)j} & m_{\varphi(j)j+1} \\ & & & & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le * dans une ligne d'indice $k \in \llbracket \varphi(j+1), \varphi(j) \rrbracket$ signifiant soit 0, soit un scalaire quelconque s'il existe un indice $p < j$ tel que $\varphi(p) = k$.

- si $m_{\varphi(j)j+1} = 0$ les choses sont simples: $\varphi'(j) = \varphi(j+1)$ et $\varphi'(j+1) = \varphi(j)$ et $p'_{\varphi'(j)j} p'_{\varphi'(j+1)j+1} = p_{\varphi(j)j} p_{\varphi(j+1)j+1}$

$$- \text{ si } m_{\varphi(j)j+1} \neq 0 \quad \varphi'(j) = j \text{ et } M'_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ ? \\ ? \\ m_{\varphi(j)j} \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m_{\varphi(j)j}}{m_{\varphi(j)j+1}} M'_j - \frac{m_{\varphi(j+1)j+1}}{m_{\varphi(j)j+1}} m_{\varphi(j)j} E_{\varphi(j+1)} [M_1, \dots,$$

$M_{j-1}, E_1, \dots, E_{\varphi(j+1)-1}]$ et donc $\varphi'(j) = \varphi(j)$ et $\varphi'(j+1) = \varphi(j+1)$, $p'_{\varphi'(j)j} = m_{\varphi(j)j+1}$, $p'_{\varphi'(j+1)j+1} = -\frac{m_{\varphi(j+1)j+1}}{m_{\varphi(j)j+1}} m_{\varphi(j)j}$ et donc $p'_{\varphi'(j)j} p'_{\varphi'(j+1)j+1} = p_{\varphi(j)j} p_{\varphi(j+1)j+1}$.

Dans tous les cas le poids de P a été multiplié par -1.

Théorème 13. *Propriétés du poids*

i) $\forall M, \rho(M) = 0 \iff \text{rang}(M) < n$

ii) $\rho(I) = 1$

$$iii) \forall M, j, k, \rho((M_1, \dots, M_{j-1}, kM_j, M_{j+1}, \dots, M_n)) = k\rho(M)$$

$$iv) \forall M, k, i, j, \rho(M(I + kE_{ij})) = \rho(M)$$

$$v) \forall M, S(\text{matrice de permutation}), \rho(MS) = \text{sgn}(S)\rho(M)$$

Démonstration.

□

i), ii), iii) immédiats.

iv) Soient M et $M' = M(I + kE_{ij})$

si $i < j$ la matrice $I + kE_{ij}$ est triangulaire supérieure, donc $M(I + kE_{ij}) = UPV(I + kE_{ij}) \Rightarrow \rho(M(I + kE_{ij})) = \rho(P) = \rho(M)$

si $i > j$ $M' = (M_1, \dots, M_j, \dots, M'_i = M_i + kM_j, M_{i+1}, \dots, M_n)$

$$\forall k < i, \varphi_{M'}(k) = \varphi_M(k)$$

$M'_i = M_i + kM_j = M_i \text{ mod } (\text{Vect}(M'_1, \dots, M'_{i-1}, E_1, \dots, E_{\varphi(i)-1})) = M_i \text{ mod } (\text{Vect}(M_1, \dots, M_{i-1}, E_1, \dots, E_{\varphi(i)-1}))$ donc $\varphi_{M'}(i) = \varphi_M(i)$

et alors $\forall k > i$ $\varphi_{M'}(k) = \varphi_M(k)$

v) si S est une matrice de permutation on la décompose en un produit de transpositions $(j, j+1)$ et on applique le résultat du lemme.

Conclusion: ρ c'est le déterminant

5 Les trois grandes propriétés

Théorème 14. $\forall A, \rho(A) = 0 \iff \text{rang}(A) < n$

découle de la définition de ρ .

Théorème 15. $\forall (A, B), \rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$

Démonstration.

découle du Théorème 7 (iii, iv, v) appliqué à $M \mapsto \frac{\rho(AM)}{\rho(A)}$

□

Remarque 16.

Si nous avons défini la matrice Q par les conditions

Pour chaque j on pose $\psi(j) = \max \{i, M_j = b_{ij}E_i \text{ mod } \text{Vect}(M_{j+1}, \dots, M_n, E_{i+1}, \dots, E_n)\}$, ce qui définit une matrice principale $Q = (q_{ij})$, où $q_{ij} = \delta_{i, \psi(j)} b_{ij}$ et deux matrices triangulaires supérieures L et L' unipotentes telles que $M = LQL'$.

On pourrait démontrer que la fonction $M \mapsto \rho(Q)$ possède les propriétés du Théorème 7.

Théorème 17.

Avec les notations au-dessus $\rho(P) = \rho(Q)$

Démonstration.

Soit $M=LQL'$, alors $JMJ=JLJ.JQJ.JL'J$, où JLJ et $JL'J$ appartiennent à \mathcal{U}_n et JQJ est principale, donc $\rho(JMJ) = \rho(JQJ) = \rho(Q)$ par définition mais aussi $\rho(JMJ) = \rho(J)\rho(M)\rho(J)$, d'après le Théorème précédent, ce qui donne $\rho(M)$; en fin de compte $\rho(P) = \rho(Q)$ \square

Théorème 18. *Le déterminant de la transposée*

Soit $A=UPV$, alors ${}^tA = \mathbb{V}{}^tP{}^tU$ d'où, d'après le Théorème précédent, $\rho({}^tA)=\rho({}^tP)=\rho(P) = \rho(A)$

6 Un algorithme de factorisation

Une fois établie l'unicité de P, tout algorithme qui fournit P dans une factorisation $M=UPV$ conviendra.

Pour cela il nous faut décrire trois procédures: une qui repère les positions des termes non nuls de P, deux qui « nettoient » les colonnes pas à pas.

Définition 19. *Procédure Pivot(j) appliquée à la matrice A*

si $j=1$ $\varphi(j):=\max\{i, a_{ij} \neq 0\}$

si $j>1$ $\varphi(j):=\max\{i \notin \varphi([1, \dots, j-1]), a_{ij} \neq 0\}$

Définition 20. *Procédure Nettoyage Vertical(j) appliquée à la matrice A*

$$A := \prod_{i < \varphi(j), a_{ij} \neq 0, i \notin \varphi([1, \dots, j-1])} \left(I - \frac{a_{ij}}{a_{\varphi(j)j}} E_{i\varphi(j)} \right) A$$

Définition 21. *Procédure Nettoyage Horizontal(j) appliquée à la matrice A*

$$A := A \prod_{k > j, a_{\varphi(j)k} \neq 0} \left(I - \frac{a_{\varphi(j)k}}{a_{\varphi(j)j}} E_{jk} \right)$$

L'algorithme:

Pivot(1)

j:2

tant que $j < n$

Pivot(j)

Nettoyage Vertical(j)

Nettoyage Horizontal(j)

j:j+1

fin.

Complexité de la recherche de P:

Les opérations évoquées au-dessus reviennent en principe à ajouter à une ligne ou une colonne un multiple d'une autre; en fait comme Nettoyage Horizontal(j) n'est appelée que lorsque la colonne C_j ne comporte plus qu'un terme nul il vaut mieux le considérer comme l'opération suivante

pour tout $k > j$, $a_{\varphi(j)k} := 0$

Quant à Nettoyage Vertical(j) il fait appel au plus à $\varphi(j) - 1$ multiplications par des matrices de transvection, comme dans les colonnes C_1, \dots, C_{j-1} les termes de la ligne $L_{\varphi(j)}$ sont nuls, Nettoyage Vertical(j) se traduit simplement par les affectations suivantes: $\forall i < \varphi(j), \forall k > j, a_{ik} := a_{ik} - \frac{a_{ij}}{a_{\varphi(j)j}} a_{\varphi(j)k}$ et $\forall i < \varphi(j), a_{ij} := 0$.

D'où Nettoyage Vertical(j) coûte 1 division et $2^*(n-j)*(\varphi(j) - 1)$ multiplications de scalaires, par suite la détermination de P exige n divisions et (au plus) $2\sum_{j=1}^{n-1} (n - j)^2 = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$ donc l'algorithme réclame n divisions et (au plus) $\frac{n^3 - n}{3}$ multiplications.

Conclusion : On peut définir le déterminant de manière plus économique aussi bien en termes d'outils mathématiques qu'en complexité: rien de ce qui a été employé ne déborde du programme de L1.

Paris, octobre 2017