

(plaidoyer pour l') Algèbre linéaire d'un point de vue (vraiment) algorithmique

PAR PATRICK TELLER

J'ai longtemps cru qu'il y avait deux manières d'enseigner les premiers pas de l'Algèbre linéaire, la manière classique (espaces vectoriels, combinaisons linéaires, familles génératrices, bases, dimension, sous-espaces, sommes de sous-espaces, morphismes, et enfin matrices) et la manière « matricielle », que l'on trouvera dans les programmes de certaines filières CPGE, comme PCSI (systèmes linéaires, pivot, interprétation matricielle du pivot, calcul matriciel, matrices inverses, ..).

En fait il y en a (au moins) trois car, si la manière « matricielle » permet de repousser à plus tard certains aspects abstraits (liés aux espaces vectoriels « formels ») elle introduit, par l'interprétation matricielle du pivot un aspect dynamique qui n'est pas nécessairement d'un accès facile, et ne permet pas une manipulation et compréhension suffisante des potentialités des systèmes linéaires et de la réduction (par lignes) des matrices.

On trouvera dans ce qui suit une description de ce qui me semble être une vraie introduction algorithmique de l'Algèbre linéaire.

0. Remarque préalable: mon expérience (et le bon sens) me dictent deux principes (qui n'en font qu'un); toute notion ou technique exige un emploi suffisant pour s'installer dans l'esprit, tout apprentissage doit s'achever par des situations (applications, synthèse, ..) qui prouvent à l'apprenant qu'il a acquis des capacités nouvelles; il doit pouvoir sentir qu'il est mieux armé grâce au nouveau chapitre, au nouveau module.

1. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ on peut, par opérations *élémentaires* sur les lignes, la transformer en une matrice *échelonnée réduite*

ceci correspond à une réduction d'un système d'équations linéaires, relativement à un ordre sur les variables

cette réduction est unique

Une fois posée la démarche « par lignes », sa compréhension, son acquisition exigent la *répétition*; tant mieux, parce qu'on peut en faire de nombreux usages.

2. Application aux systèmes d'équations linéaires $Ax=b$

i. Compatibilité ou inconsistance

ii. Paramétrisation de l'ensemble des solutions

3. Si on considère A comme la matrice d'une famille de vecteurs de K^n

i. Liberté ou pas

ii. Famille *génératrice* ou pas

iii. De la comparaison du nombre de colonnes avec le nombre de pivots on peut déduire qu'une famille libre dans K^n ne peut avoir plus de n vecteurs et qu'une famille *génératrice* ne peut avoir moins de n vecteurs; d'où la dimension de K^n .

iv. Les colonnes $A_{p(1)}, \dots, A_{p(r)}$ des pivots sont libres car le système $x_{p(1)}A_{p(1)} + \dots + x_{p(r)}A_{p(r)} = (0)$ n'a que la solution nulle

v. Si on considère le système $x_{p(1)}A_{p(1)} + \dots + x_{p(r)}A_{p(r)} + x_j A_j = 0$ (avec $j \notin \{p(1), \dots, p(r)\}$) sa résolution conduit à des expressions de la forme

$$\begin{cases} x_{p(1)} - a_{p(1)}x_j = 0 \\ \dots \\ \dots \\ x_{p(r)} - a_{p(r)}x_j = 0 \end{cases} \quad \text{où } x_j \text{ est arbitraire; ceci se}$$

traduit par une relation de la forme

$$A_j = y_{p(1)}A_{p(1)} + \dots + y_{p(r)}A_{p(r)}$$

Conclusion: Les colonnes $A_{p(1)}, \dots, A_{p(r)}$ des pivots forment une base de l'espace vectoriel des colonnes de A.

On en déduira la notion de rang d'une matrice rectangulaire: dimension de l'espace de ses colonnes.

vi. Le Théorème de la base incomplète, qui est par essence algorithmique

3. Le Théorème du rang

Avec les notations précédentes le rang de A est égal au nombre de pivots; si A est la matrice d'une application linéaire f, la dimension de Im(f) est donc r; tandis que le noyau, calculé au moyen de la résolution de $Ax=0$ est de dimension égale $p-r$; d'où le théorème du rang.

4. Application au problème de l'inverse d'une matrice carrée

(sans passer par l'interprétation matricielle du pivot, qui devient au niveau de l'inversion une magie pleine de calculs, sans la moindre acquisition de connaissances ou de compétences)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ de rang n, quel que soit le vecteur y il existe un vecteur x tel que $Ax=y$; ce vecteur x se calcule à partir de y par une suite d'opérations sur les lignes, ce sont des expressions linéaires qui ne découlent que de A. Il existe donc une matrice A' de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que, $\forall y \in K^n, Ax=y \iff x=A'y$ donc $\forall y \in K^n AA'y=y$.

On en déduit que $AA'=I$.

De l'égalité $A'V=0$ on déduit $AA'V=AV=0$, d'où $V=0$, donc le rang de A' aussi est maximal, et donc A' est inversible à droite, il existe A'' telle que $A'A''=I$.

D'où $AA'A''=A$ d'une part et $AA'A''=A''$ d'autre part, d'où $A=A''$, et par suite $A'A=I$.

5. Le changement de base

Soit la base canonique $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et une autre base $\mathcal{C} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, on désigne par $P = (p_{ij})$ la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} , ce qui signifie que $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \gamma_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}\varepsilon_i$; soit un vecteur $v = \sum_{j=1}^n x'_j \gamma_j$, soit $v = \sum_{j=1}^n x'_j (\sum_{i=1}^n p_{ij}\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n p_{ij}x'_j)\varepsilon_i$.

Ce que l'on retient classiquement

$$\text{si } v = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i \text{ en posant } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } v = \sum_{j=1}^n x'_j \gamma_j \text{ en posant } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \dots \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

alors

i) $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i = (\sum_{j=1}^n p_{ij}x'_j)$

c'est à dire

ii) $X = PX'$.

5. Déterminant d'une matrice carrée

La définition classique des déterminants (à partir des endomorphismes, introduisant les permutations) est trop lourde pour beaucoup d'étudiants; je propose de les introduire comme suit

i) multilinéarité

ii) antisymétrie

iii) convention que le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux (ces trois points relevant de l'analogie avec une aire ou un volume orientés)

Ce que l'on peut mettre en pratique comme suit

i) on appelle matrices de transvection toute matrice de la forme $I + aE_{ij}$ (où E_{ij} possède un seul terme égal à 1 et les autres sont nuls) et matrice principale toute matrice qui possède un élément non nul et un seul par ligne et par colonne.

ii) on peut montrer que toute matrice inversible M s'écrit $\prod T_k D$, où les T_k sont des matrices de transvection et D est principale.

De plus si D est principale et T une matrice de transvection il existe une matrice de transvection S telle que $TD = DS$.

Ce qui permet d'établir la multiplicativité du déterminant et l'égalité $\det(A) = \det({}^t A)$.

6. Matrice diagonalisable

Une matrice carrée M sera dite diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible $P = (P_1, \dots, P_n)$ et une matrice diagonale $D = (d_{ij})$ telles que $P^{-1}MP = D$, ou ce qui revient au même $MP = PD$, ce que l'on lira comme suit $M(P_1, \dots, P_n) = (d_{11}P_1, \dots, d_{nn}P_n)$.

Définition: on appelle vecteur-colonne propre pour M un vecteur -colonne V non nul pour lequel il existe un scalaire α (appelé valeur propre associée) tel que $MV = \alpha V$.

Théorème 1.

Une matrice carrée M est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs-colonnes propres

Définition: polynôme caractéristique

Théorème 2. *Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique*

Définition 3. *multiplicité algébrique et multiplicité géométrique*

Théorème 4. *Soit une valeur propre α , sa multiplicité algébrique est supérieure ou égale à sa multiplicité géométrique*

Définition 5. *On appellera famille maximale de vecteurs-colonnes propres toute famille libre de vecteurs-colonnes propres pour une valeur propre donnée de cardinal maximal*

Théorème 6. *La concaténation de familles maximales de vecteurs-colonnes propres est une famille libre*

Le calcul du polynôme caractéristique, la recherche de ses racines et des familles maximales de vecteurs propres seront confiés à Maxima.

7. Sous-espaces, sommes, décomposition, projections.

Les deux descriptions des sous-espaces: par générateurs, par équations.

Intersection, somme, somme directe.

Tout cela peut se représenter et traiter de manière matricielle et se résoudre au moyen d'opérations élémentaires.

En suivant cette méthode

1) on assure l'essentiel des notions de base nécessaires de l'Algèbre linéaire

2) on développe une compétence de type algorithmique: la représentation et la résolution de questions au travers de la manipulation (bien comprise et bien gérée) de tableaux.

Paris Mars 2017