(plaidoyer pour l') Alg*è*bre lin*é*aire d'un point de vue (vraiment) algorithmique

PAR PATRICK TELLER

J'ai longtemps cru qu'il y avait deux manières d'enseigner les premiers pas de l'Algèbre linéaire, la manière classique (espaces vectoriels,combinaisons linéaires, familles génératrices,bases,dimension, sous-espaces, sommes de sous-espaces,morphismes, et enfin matrices) et la manière « matricielle », que l'on trouvera dans les programmes de certaines filières CPGE, comme PCSI (systèmes linéaires,pivot,interprétation matricielle du pivot,calcul matriciel, matrices inverses,..).

En fait il y en a (au moins) trois car, si la manière « matricielle » permet de repousser à plus tard certains aspects abstraits (liés aux espaces vectoriels « formels ») elle introduit, par l'interprétation matricielle du pivot un aspect dynamique qui n'est pas nécessairement d'un accès facile, et ne permet pas une manipulation et compréhension suffisante des potentialités des systèmes linéaires et de la réduction (par lignes) des matrices.

On trouvera dans ce qui suit une description de ce qui me semble être une vraie introduction algorithmique de l'Algèbre linéaire.

0. Remarque pr*é*alable: mon exp*é*rience (et le bon sens) me dictent deux principes (qui n'en font qu'un); toute notion ou technique exige un emploi suffisant pour s'installer dans l'esprit, tout apprentissage doit s'achever par des situations (applications, synthèse, ..) qui prouvent *à* l'apprenant qu'il a acquis des capacit*és* nouvelles; il doit pouvoir sentir qu'il est mieux arm*é* grâce au nouveau chapitre, au nouveau module.

1. Soit une matrice $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{np}}(\mathbb{K})$ on peut, par opérations *élé*mentaires sur les lignes, la transformer en une matrice *é*chelonn*é*e r*é*duite

ceci correspond *à* une r*é*duction d'un système d'*é*quations lin*é*aires, relativement *à* un ordre sur les variables

cette r*é*duction est unique

Une fois pos*é*e la d*é*marche « par lignes », sa compr*é*hension, son acquisition exigent la r*épé*tition; tant mieux, parce qu'on peut en faire de nombreux usages.

2. Application aux systèmes d'*é*quations lin*é*aires Ax=b

i. Compatibilit*é* ou inconsistance

ii. Param*é*trisation de l'ensemble des solutions

3. Si on considère A comme la matrice d'une famille de vecteurs de K^n

i. Libert*é* ou pas

ii. Famille g*éné*ratrice ou pas

iii. De la comparaison du nombre de colonnes avec le nombre de pivots on peut d*é*duire qu'une famille libre dans K^n ne peut avoir plus de n vecteurs et qu'une famille g*éné*ratrice ne peut avoir moins de n vecteurs; d'o*ù* la dimension de K^n.

iv. Les colonnes $\mathrm{A}_{p(1)},\ldots,\mathrm{A}_{p(r)}$ des pivots sont libres car le système $\mathrm{x}_{p(1)}\mathrm{A}_{p(1)}+\ldots+\mathrm{x}_{p(r)}\mathrm{A}_{p(r)}=(0)$ n'a que la solution nulle

v. Si on considère le système $x_{p(1)}A_{p(1)}+...+x_{p(r)}A_{p(r)}+x_jA_j=(0)$ (avec $j\notin\{p(1),...,p(r)\}$) sa résolution conduit *à* des expressions de la forme $\begin{cases} x_{p(1)}-a_{p(1)}x_j=0 \\ .... \\ ... \\ x_{p(r)}-a_{p(r)}x_j=0 \end{cases}$ o*ù* x_j est arbitraire; ceci se traduit par une relation de la forme

$A_j= y_{p(1)}A_{p(1)}+...+y_{p(r)}A_{p(r)}$

Conclusion: Les colonnes $A_{p(1)},...,A_{p(r)}$ des pivots forment une base de l'espace vectoriel des colonnes de A.

On en déduira la notion de rang d'une matrice rectangulaire: dimension de l'espace de ses colonnes.

vi. Le Théorème de la base incomplète , qui est par essence algorithmique

3. Le Th*é*orème du rang

Avec les notations pr*é*c*é*dentes le rang de A est *é*gal au nombre de pivots; si A est la matrice d'une application lin*é*aire f, la dimension de Im(f) est donc r; tandis que le noyau, calcul*é* au moyen de la r*é*solution de Ax=(0) est de dimension *é*gale p-r; d'o*ù* le th*é*orème du rang.

4. Application au problème de l'inverse d'une matrice carr*é*e

(sans passer par l'interpr*é*tation matricielle du pivot, qui devient au niveau de l'inversion une magie pleine de calculs , sans la moindre acquisition de connaissances ou de comp*é*tences)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ de rang n, quel que soit le vecteur y il existe un vecteur x tel que Ax=y; ce vecteur x se calcule *à* partir de y par une suite d'op*é*rations sur les lignes, ce sont expressions lin*é*aires qui ne d*é*coulent que de A. Il existe donc une matrice A' de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que, $\forall$ y$\in K^n$, Ax=y <=>x=A'y donc $\forall$ y$\in K^n$ AA'y=y.

On en d*é*duit que AA'=I.

De l'égalité A'V=0 on déduit AA'V=A0=0, d'où V=0, donc le rang de A' aussi est maximal, et donc A' est inversible à droite, il existe A" tellle que A'A"=I.

D'où AA'A"=A d'une part et AA'A"=A " d'autre part, d'où A=A", et par suite A'A=I.

5. Le changement de base

Soit la base canonique $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ et une autre base $\mathcal{C}=(\gamma_1,....,\gamma_n)$, on d*é*signe par P=($p_{\mathrm{ij}}$) la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, ce qui signifie que $\forall j\in\{1,...,n\}$, $\gamma_j=\sum_{i=1}^n p_{\mathrm{ij}}\varepsilon_i$; soit un vecteur v=$\sum_{j=1}^n x'_j\gamma_j$, soit v=$\sum_{j=1}^n x'_j(\sum_{i=1}^n p_{\mathrm{ij}}\varepsilon_i)$=$\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n p_{\mathrm{ij}}x'_j)\varepsilon_i$.

Ce que l'on retient classiquement

si v=$\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$ en posant X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ .... \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}$ et v=$\sum_{j=1}^n x'_j\gamma_j$ en posant X'=$\begin{pmatrix} x'_1 \\ .... \\ .... \\ x'_n \end{pmatrix}$

alors

i) $\forall i\in\{1,...,n\}$, x_i=($\sum_{j=1}^n p_{\mathrm{ij}}x'_j$)

c'est à dire

ii) X=PX'.

5. Déterminant d'une matrice carrée

La définition classique des déterminants (à partir des endomorphismes, introduisant les permutationss) est trop lourde pour beaucoup d'étudiants; je propose de les introduire comme suit

i) multilinéarité

ii) antisymétrie

iii) convention que le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux

(ces trois points relevant de l'analogie avec une aire ou un volume orientés)

Ce que l'on peut mettre en pratique comme suit

i) on appelle matrices de transvection toute matrice de la forme I+aE_{ij} (où E_{ij} possède un seul terme égal à 1 et les autres sont nuls et matrice principale toute matrice qui possède un élément non nul et un seul par ligne et par colonne.

ii) on peut montrer que toute matrice inversible M s'écrit $\prod T_k D$, où les T_k sont des matrices de transvection et D est principale.

De plus si D est principale et T une matrice de transvection il existe une matrice de transvection S telle que TD=DS.

Ce qui permet d' établir la multiplicativité du déterminant et l'égalité det(A)=det(^{t}A).

6. Matrice diagonalisable

Une matrice carrée M sera dite diagonalisable lorsqu'il existe une matrice inversible P=$(P_1, ..., P_n)$ et une matrice diagonale D=(d_{ij}) telles que P^{-1}MP$= D$, ou ce qui revient au même MP=PD, ce que l'on lira comme suit M($P_1, ..., P_n$)=$(d_{11}P_1, ..., d_{nn}P_n)$.

Définition: on appelle vecteur-colonne propre pour M un vecteur -colonne V non nul pour lequel il existe un scalaire α (appelé valeur propre associée) tel que MV=αV.

Théorème 1.

Une matrice carrée M est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs-colonnes propres

Définition: polynôme caractéristique

Théorème 2. *Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique*

Définition 3. *multiplicité algébrique et multiplicité géométrique*

Théorème 4. *Soit une valeur propre α, sa multiplicité algébrique est supérieure ou égale à sa multiplicité géométrique*

Définition 5. *On appellera famille maximale de vecteurs-colonnes propres toute famille libre de vecteurs-colonnes propres pour une valeur propre donnée de cardinal maximal*

Théorème 6. *La concaténation de familles maximales de vecteurs-colonnes propres est une famille libre*

Le calcul du polynôme caractéristique, la recherche de ses racines et des familles maximales de vecteurs propres seront confiés à Maxima.

7. Sous-espaces, sommes, décomposition, projections.

Les deux descriptions des sous-espaces: par générateurs, par équations.

Intersection, somme, somme directe.

Tout cela peut se représenter et traiter de manière matricielle et se résoudre au moyen d'opérations élémentaires.

En suivant cette méthode

1) on assure l'essentiel des notions de base nécessaires de l'Algèbre linéaire

2) on développe une compétence de type algorithmique: la représentation et la résolution de questions au travers de la manipulation (bien comprise et bien gérée) de tableaux.

Paris Mars 2017