Outils algébriques et algorithmiques pour l'étude des polytopes

par Patrick Teller

1 Décembre 2021

Il y a quelques années Georges Charpak, prix Nobel de physique, a popularisé l'idée qu'à l'école les élèves ne devaient pas se satisfaire d'enseignements abstraits et formels et « mettre la main à la pâte ». C'est un peu le but de ces pages qui ne sont pas exhaustives et se proposent, à l'occasion d'une introduction, très orientée, à la notion de polyèdres convexes, de « mettre la main à la pâte », c'est à dire de « toucher », de manipuler, soit par le raisonnement , soit par une démarche algorithmique, pour laquelle on utilisera Maxima comme calculette.

Pourquoi les convexes ? Parce qu'on en trouve dans le plan qui sont « trop concrets » et dans $\mathbb{R}^n$ qui sont « trop abstraits » ! C'est donc un excellent terrain pour aller de l'intuition à la théorie et vice-versa.

Résumé

On trouvera, en particulier, la caractérisation du simplexe déterminé comme intersection de n+1 demi-espaces en position générale.

Pour l'essentiel « la » matrice indicatrice, représentant les demi-espaces considérés, sera l'outil, algébrique ou algorithmique, privilégié.

On trouvera une caractérisation de l'inclusion d'un simplexe dans un autre, une démarche algorithmique pour déterminer si deux simplexes sont disjoints.

La question de la détermination des sommets d'un simplexe ou d'un polytope en général se traduira par un algorithme.

Enfin une distance nouvelle sera présentée pour l'ensemble des polytopes, la distance par lignes de niveaux, qui n'est pas la distance de Hausdorff, qui ne lui est pas équivalente, mais seulement topologiquement équivalente; de surcroit elle est extrèmement facile à calculer.

On ébauchera une méthode effective pour décomposer un polytope en réunion de simplexes.

1 Définitions

Dans ce qui suit on considérera l'espace affine de dimension n (orienté éventuellement) par le choix d'un repère) que l'on désignera par P, les points seront représentés par des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$ (les réels x1,…,xn,1 seront appelés coordonnées étendues), les applications affines seront représentées par des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, où $\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$ représente une translation et A représente une application linéaire. Les hyperplans sont représentés par des équations de la forme $\sum a_j x_j + c_j = 0$.

On dira qu'une liste de points ($\begin{pmatrix} X0 \\ 1 \end{pmatrix}$,..,$\begin{pmatrix} \mathrm{Xn} \\ 1 \end{pmatrix}$) est directe lorsque le déterminant $\begin{vmatrix} X1 & \dots. & \mathrm{Xn} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$ est strictement positif; dans ce cas on appellera polyèdre de sommets ($\begin{pmatrix} X1 \\ 1 \end{pmatrix}$,..,$\begin{pmatrix} \mathrm{Xn} \\ 1 \end{pmatrix}$) l'enveloppe convexe de $\{\begin{pmatrix} X1 \\ 1 \end{pmatrix}$,..,$\begin{pmatrix} \mathrm{Xn} \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

On sait qu'un polyèdre est une intersection de demi-espaces que l'on appellera demi-espaces actifs et on appellera hyperplans d'appui les hyperplans qui sont les frontières de ces demi-plans actifs

L'objet de ce travail est l'étude de systèmes d'inéquations linéaires et de propriétés de polyèdres convexes bornés, appelés polytopes.

En particulier on s'intéressera au simplexe, polytope d'intérieur non vide ayant un nombre minimal de sommets: triangle en dimension 2, tétraèdre en dimension 3, …

Au sujet du mot « simplexe » nous rencontrerons à la fois les simplexes comme convexes minimaux et la « méthode du simplexe » , issue de la programmation linéaire; pour éviter les confusions on réservera le mot au polytope et on parlera de « méthode de Dantzig » lorsqu'il sera question de la « méthode ».

2 Définition d'un simplexe par un système d'inéquations

On sait qu'un polytope dans $\mathbb{R}^n$ est défini comme l'enveloppe convexe d'une famille finie de points et comme l'intersection de m>n demi-espaces.

(la terminologie ne semble pas toujours fixée et il y a , d'un auteur à un autre, des sauts entre polyèdres et polytopes).

La première définition nous donne un outil susceptible de « produire » des points du polytope, tandis que la seconde nous fournit une caractérisation des points du polytope, c'est à dire la possibilité de « tester » si un point y appartient.

Un simplexe est un polytope de dimension n dans $\mathbb{R}^n$, il sera donc l'enveloppe convexe d'une famille de n+1 points « en position générale » ou l'ensemble des solutions d'un système de n+1 inéquations affines à n inconnues, linéairement indépendantes.

Si on part de n+1 équations d'hyperplans qui sont de la forme $\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_j + a_{1n+1} = 0$, on obtient un simplexe; nous allons établir dans le cas d'un simplexe comment le système d'inéquations se déduit du système d'équations de la famille des hyperplans.

2.1 Détermination du système d'inéquations d'un simplexe

Soient n+1 hyperplans $(H_1, \ldots, H_{n+1})$, en position générale, d'équations respectives $\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1} = 0$, ils déterminent 2^{n+1} -1 régions déterminées par les systèmes d' inéquations $\left\{\begin{array}{l} \sum a_{1,j}x_j + a_{1,n+1} \text{du} \quad \text{signe}(\varepsilon_1) \\ \ldots\ldots. \\ \sum a_{n+1,j}x_j + a_{n+1,n+1}\text{dusigne}(\varepsilon_{n+1}) \end{array}\right.$, où $\varepsilon_i = +/-1$.

On désignera aussi par H_i la forme affine $\sum a_{i,j}x_j + a_{i,n+1}$ et par L_i la forme linéaire $\sum a_{i,j}$xj; on désignera par H la matrice $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n+1\}^2}$

Les hyperplans étant en position générale H appartient à $\mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Chaque franchissement d'un des hyperplans inverse le signe de l'inéquation correspondante; à chaque région non bornée correspond une région non bornée « opposée » définie par l'inversion des n+1 inéquations qui traduit le franchissement des n+1 hyperplans.

Parmi les 2^{n+1}-1 régions ainsi décrites il en existe une et une seule qui est bornée, on la désignera sous le nom de simplexe déterminé par les hyperplans cités; ce qui caractérise le simplexe c'est qu'il n'a pas de région opposée, d'où le résultat de [3] entraîne que le simplexe est défini par le système $\left\{\begin{array}{l} \sum \mathrm{a_{1,j}x_j{+}a_{1,n+1}} \text{ du} \quad \text{signe}(\lambda_1) \\ \ldots\ldots. \\ \sum \mathrm{a_{n+1,j}x_j{+}a_{n+1,n+1}}\text{dusigne}(\lambda_{n+1}) \end{array}\right.$ où

i) $\sum_{i=1,\ldots,n+1} \lambda_i L_i = 0$

ii) $\sum_{i=1,\ldots,n+1} \lambda_i a_{i,n+1} > 0$.

Quitte à multiplier par une constante strictement positive on peut supposer que $\sum_{i=1,\ldots,n+1} \lambda_i c_i = 1$; que l'on peut écrire sous la forme $(\,\lambda_1 \;\ldots\; \ldots\; \lambda_{n+1}\,)H = (\,0\;0\;\ldots\;0\;1\,)$, ce qui est équivalent à ${}^tH\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \cdots\\ \cdots\\ \lambda_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}$ et par suite à $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \cdots\\ \cdots\\ \lambda_{n+1}\end{pmatrix} = {}^tH^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ \cdots\\ 1\end{pmatrix}$.

Si on désigne par $\gamma_{i,j}$ le cofacteur de a_{ij} la dernière relation s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(H)}\begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \cdots & \gamma_{1,n+1} \\ \gamma_{2,1} & \cdots & \cdots & \gamma_{2,n+1} \\ \cdots & & & \\ \cdots & & & \\ \gamma_{n+1,1} & & & \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(H)}\begin{pmatrix} \gamma_{1n+1} \\ \gamma_{2n+1} \\ \cdots \\ \gamma_{n+1n+1} \end{pmatrix}$.

En conclusion le point $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ appartient au simplexe si seulement si H$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ est du signe de $\frac{1}{\det(H)}\begin{pmatrix} \gamma_{1,n+1} \\ \gamma_{2,n+1} \\ \cdots \\ \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$.

Soit (ε_1,..,ε_{n+1}) à valeurs dans $\{0,1\}^{n+1}$ si pour on multiplie chaque forme affine H_i par ε_i alors chaque $\gamma_{i,n+1}$ est multiplié par $\prod_{j\neq i} \varepsilon_j$ et le déterminant de H est multiplié par $\prod_j \varepsilon_j$ d'où $\frac{1}{\det(H)}\begin{pmatrix} \gamma_{1,n+1} \\ \gamma_{2,n+1} \\ \cdots \\ \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$ est multiplié par ε_j .

Donc si on remplace H par la matrice $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \\ 0 & \varepsilon_2 & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \varepsilon_{n+1} \end{pmatrix}$H, où $\varepsilon_i = -1$ si $\lambda_i \geqslant 0$ et $\varepsilon_i = 1$ sinon, alors $\frac{1}{\det(H)}\begin{pmatrix} \gamma_{1,n+1} \\ \gamma_{2,n+1} \\ \cdots \\ \gamma_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$ aura les bons signes, par suite le simplexe est défini par le système H $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0$.

Enfin, quitte à échanger deux lignes de H on peut supposer que det(H)>0; on verra plus loin l'intérêt que l'on peut avoir à diviser chaque ligne H_i par la norme euclidienne $\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$.

Théorème 1.
Soit dans $\mathbb{R}^n$ n+1 hyperplans en position générale, (H_1,..., H_{n+1}), on peut écrire leurs équations respectives sous la forme $\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1} = 0$, j=1..n, de telle sorte que le simplexe qu'ils déterminent soit défini par un système de la forme H $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0$, où det(H)>0 et pour tout i, $\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$=1.

Définition 2. *Matrice indicatrice d'un simplexe*

La matrice H sera appelée (une) matrice indicatrice du simplexe; même avec la règle $\sqrt{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$=1 elle n'est pas unique et est définie modulo une permutation paire des lignes.

Exemple 3.

On considère le triangle déterminé par les trois droites d'équations $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 40 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 - 20 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 - 28 = 0 \end{cases}$.

D'abord on détermine un triplet (λ_1, λ_2, λ_3):

```
(%i3) linsolve([5*lambda1+5*lambda2+7*lambda3,8*lambda1-4*lambda2-4*lambda3
      ,-40*lambda1-20*lambda2-28*lambda3=1],[lambda1,lambda2,lambda3]);
```

(%o3) $\left[\text{lambda1} = -\frac{1}{20}, \text{lambda2} = -\frac{19}{40}, \text{lambda3} = \frac{3}{8}\right]$

```
(%i2) gamma1:-20+28,gamma2:76,gamma3:-60
```

donc on multiplie la matrice H d'origine $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -40 \\ 5 & -4 & -20 \\ 7 & -4 & -28 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 & -40 \\ 5 & -4 & -20 \\ 7 & -4 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -40 \\ 5 & -4 & -20 \\ -7 & 4 & 28 \end{pmatrix}$.

Le déterminant est positif.

Le point de coordonnées (3,2) n'y appartient pas car $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -40 \\ 5 & -4 & -20 \\ -7 & 4 & 28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -13 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$, qui n'est pas négatif.

Il est suggéré de prendre une feuille quadrillée, d'y représenter les droites d'appui et de vérifier.

2.2 Détermination des sommets du simplexe

L'autre définition du simplexe comme enveloppe convexe de n+1 points en position générale demande la détermination des sommets.

Nous appellerons S_k le sommet qui n'appartient pas à l'hyperplan d'équation H_k (donc il appartient à tous les autres hyperplans d'appui).

$H(S_k)=\begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ \ldots \\ H_k(S_k) \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$; plus précisément $H_k(S_k)=\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j + a_{k,n+1}$, $\forall i \neq k$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1}=0$ et $\forall j=1,\ldots,n \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_{i,j}=0$ d'où

$0=\sum_{j=1}^n(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i a_{i,j})x_j=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i(\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j)=\sum_{i\neq k}\lambda_i(-a_{i,n+1})+\lambda_k\big(\sum_{j=1}^n a_{k,j}x_j\big)=\sum_{i\neq k}\lambda_i(-a_{i,n+1})+\lambda_k(H_k(S_k)$ $a_{\mathrm{kn}+1})$d'où $\lambda_k H_k(S_k))= \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i(a_{i,n+1})$.

Par ailleurs

$H=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & \ldots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & \ldots & \ldots & a_{2,n+1} \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ a_{n+1,1} & & & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$, $\lambda_k\det(H)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & \ldots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & \ldots & \ldots & a_{2,n+1} \\ \ldots & . & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \sum \lambda_i a_{i,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & \ldots & \ldots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}=\lambda_k H_k(S_k)\gamma k$, d'où

$\det(H)=\gamma_k H_k(S_k)$.

Donc $H(\ S_1\ \ S_2\ \ \ldots\ \ \ldots\ \ S_n\ )=\det(H)\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{\gamma_{n+1}} \end{pmatrix}$ ou $H(S_k)=\frac{\gamma_k}{\det(H)}$.

2.3 Simplexes et Demi-espaces

On peut aussi interpréter la matrice H autrement, si on désigne comme plus haut, par H_i la forme affine $\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + a_{i,n+1}$, l'ensemble $\left\{x\in\mathbb{R}^n, H_i\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}\leqslant 0\right\}$ est un demi-espace et le simplexe est l'intersection de ces demi-espaces.

3 Inclusion de simplexes

Soient dans $\mathbb{R}^n$ deux simplexes (S) et (S'), de sommets $(S_1,..,S_{n+1})$ et $(S'_1,\ldots,S'_{n+1})$ définis respectivement par les systèmes $H\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}\leqslant 0$ et $H'\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}\leqslant 0$.

Théorème 4. *(S) contient (S') si et seulement si* $HH'^{-1}\geqslant 0$

Démonstration.

Comme il s'agit de convexes (S) contient (S') si et seulement si il contient ses sommets $S'_1,\ldots,S'_{n+1}$*; il est donc nécessaire de connaître les coordonnées de ces sommets, en reprenant les calculs du paragraphe précédents les coordonnées étendues des sommets de (S') sont* $H'^{-1}\left(\frac{\det(H')}{\gamma'_i}E_{\mathrm{ii}}\right)$*, pour i=1,...,n+1, en désignant par* E_{ii} *la matrice qui possède un 1 en ligne i et colonne i, et dont les autres termes sont nuls.*

Le point de coordonnées étendues $H'^{-1}\left(\frac{\det(H')}{\gamma_i'}E_{\text{ii}}\right)$ *appartient à (S) si et seulement si* $HH'^{-1}\left(\frac{\det(H')}{\gamma_i'}E_{\text{ii}}\right)\leqslant 0$ *c'est à dire* $\frac{\det(H')}{\gamma_i'}HH'^{-1}E_{\text{ii}}\leqslant 0$*; or les quotients* $\frac{\det(H')}{\gamma_i'}$ *sont négatifs donc*

les points $S'_1,\ldots,S'_{n+1}$ *appartiennent à (S) si et seulement si* $HH'^{-1}(\sum_{i=1}^{n+1}E_{\text{ii}})\geqslant 0$ *, c'est à dire* $HH'^{-1}\geqslant 0$.

□

Exemple 5.

(S') a comme matrice directrice $H'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 27 \\ 1 & 3 & -21 \end{pmatrix}$, (S) a comme matrice directrice $H=\begin{pmatrix} 8 & -11 & 50 \\ -14 & -1 & 196 \\ 6 & 12 & -84 \end{pmatrix}$, $HH'^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{113}{15} & \frac{8}{15} & \frac{23}{15} \\ \frac{5}{3} & \frac{148}{15} & \frac{61}{15} \\ \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{26}{5} \end{pmatrix}\geqslant 0$; on pourra vérifier sur un dessin que (S') est inclus dans (S).

4 Matrice indicatrice d'un polytope

Définition 6. *Matrice indicatrice d'un polytope*

Comme on l'a remarqué dans le cas d'un polytope quelconque il existe aussi une matrice H telle que $H\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}\leqslant 0$ caractérise l'appartenance au polytope; la différence avec le cas du simplexe c'est que la matrice H n'est pas inversible.

Proposition 7. *Inclusion d'un simplexe dans un polytope*

Comme dans le cas de deux simplexes le simplexe de matrice indicatrice H' sera inclus dans le simplexe de matrice indicatrice H si et seulement si $HH'^{-1}\geqslant 0$.

5 Élimination d'inéquations

Une chose est claire on ne peut manipuler des équations comme des inéquations, « on peut additionner et soustraire des égalités on ne peut pas soustraire des inégalités de même sens de même qu'on ne peut pas additionner des inégalités de sens opposé ».

Pourtant les polytopes étant définis au moyen de systèmes d'inéquations il est utile de savoir réduire un tel système à sa version la plus simple de la même manière que la détermination de la dimension d'un espace vectoriel dépend d'un système minimal d'équations ou l'étude d'une variété algébrique repose sur la connaissance de l'idéal associé.

La possiblité de « retirer » une inéquation, superfétatoire, repose sur un cas particulier du lemme de Farkas dans la formulation suivante:

Théorème 8. *Lemme de Farkas*

Soient f_1, ... , f_{k+1} des formes affines sur un espace affine réel E de dimension k, linéairement indépendantes et une forme affine g. Alors :

$$\{y\in E|\ f_1(y)\geq 0,\ldots,f_k(y)\geq 0\}\subset\{y\in E|\ g(y)\geq 0\}$$

si et seulement si g est une combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls de f_1, ... , f_k.

Démonstration.

Il suffit de démontrer l'implication du haut vers le bas, ce qui se fera en étudiant la contraposée.

Les formes f1,...,fk forment une base de l'espace vectoriel des formes affines sur E donc il existe une famille unique $(\lambda 1, \ldots, \lambda k)$ telle que g=$\sum$ λifi; supposons que $\lambda 1 < 0$ et soit {M1}= le point défini par f2(x)=f3(x)=..=fk(x)=0 alors f1(x)>0 et g(x)<0 ce qui contredit l'inclusion $\{y \in E |\, f_1(y) \geq 0, \ldots, f_k(y) \geq 0\} \subset \{y \in E |\, g(y) \geq 0\}$. □

Par suite le système $\begin{cases} f1(x) \geqslant 0 \\ \ldots \\ \mathrm{fk}(x) \geqslant 0 \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$ sera équivalent au système $\begin{cases} f1(x) \geqslant 0 \\ \ldots \\ \mathrm{fk}(x) \geqslant 0 \end{cases}$

6 Pour passer à l'usage des matrices

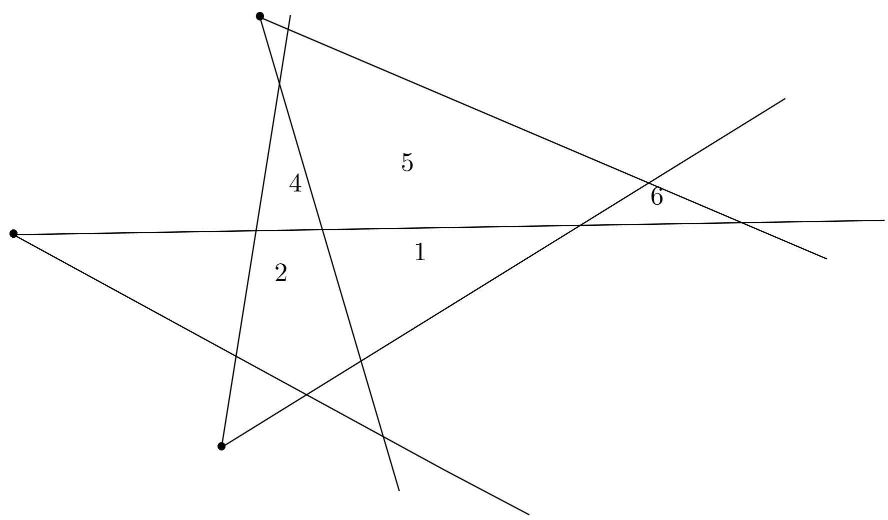
Dans le cas d'un polytope quelconque une famille d'hyperplans détermine plusieurs convexes « possibles » (voir dessin page suivante).

Un polytope étant donné, on peut former une matrice H dont les lignes sont les équations des hyperplans d'appui, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j + a_{i,n+1} = 0$, on peut préciser pour chaque hyperplan dans lequel des demi-espaces se trouve le polytope, ce qui détermine un système d'inéquations et, quitte à multiplier par -1, celles-ci sont de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j + a_{i,n+1} \leqslant 0$; on peut aussi, et ce sera très important plus loin,, supposer que le gradient de l'application $x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j + a_{i,n+1}$ est unitaire.

Sous ces conditions (les signes des inégalités et la norme du gradient) on obtiendra une matrice H unique (à l'ordre de ses lignes près):

x appartient au polytope si et seulement si H$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0$, et si on note H=$(A, -b)$ où A$\in \mathcal{M}_{\mathrm{mn}}(\mathbb{R})$ et b$\in \mathbb{R}^m$ on aura $(A, -b) \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0$, ce qui peut s'écrire aussi, $\exists Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_m \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^+)^m$, $(A, I_m, -b) \begin{pmatrix} X \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

La donnée de H sera l'analogue de la donnée de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.



7 Criss-Cross

7.1 Le criss-cross et l'optimisation linéaire

On considérera comme connue la méthode du Criss-Cross que l'on appliquera à la matrice M=$(A, I_m, -b)$ ou à la matrice M'=$\begin{pmatrix} A & \mathrm{Im} & -b \\ {}^tC & 0 & c_0 \end{pmatrix}$, où $X \longrightarrow {}^tC$+c$_0$ représente une fonction à « maximiser » sur le polytope; dans ce dernier cas la ligne $({}^tC \ \ 0 \ \ c_0)$ sera appelée « la ligne de service ».

Comme dans la méthode classique de Dantzig les opérations de pivot qui seront effectuées sur la matrice transforment le système en un système équivalent (changement de repère affine) et expriment f dans le nouveau repère.

Dans le cas de l'optimisation le fait que l'algorithme est fini se traduira par trois cas: soit le polyèdre est vide, soit il n'est pas borné (donc ce cas est impossible dans le cas d'un polytope), soit on obtient un sommet où la fonction à optimiser atteint son maximum.

Dans le cas d'un polytope avéré, on considérera l'une des équations comme la fonction à optimiser (on dira que l'équation à optimiser , comme les cas d'exception (vide ou non borné) sont exclus l'algorithme aboutit en un temps fini à une dernière ligne et une dernière colonne (terme du bas à droite exclu) positives.

7.2 Le criss-cross et les sommets d'un polytope

Soit un polytope défini par le système d'inéquations $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{AX} - b \leqslant 0 \\ X \geqslant 0 \end{array} \right.$, on sait le représenter par un système d'équations $\left\{ \begin{array}{l} (A \ \ I \ \ -b) \begin{pmatrix} X \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ X \geqslant 0 \\ Z \geqslant 0 \end{array} \right.$. La matrice (A,I,-b) sera appelée la matrice étendue (du système ou de H…). Les variables Z sont appelées variables d'écart, un point appartient à une face du polytope lorsque la variable d'écart correspondante est nulle; les sommets sont représentés par les tableaux où

i) le second membre est positif (points admissibles)

ii) les variables hors-base sont des variables d'écart (intersection d'un nombre maximal d'hyperplans d'appui)

Comme on travaille sur un polytope (donc borné) les différents états de la matrice représentent des systèmes équivalents, qui ne pourront être que celui du cas vide (système incompatible), un état transitoire (l'algorithme continue) ou un état optimal pour la ligne de service, ce qui assure la compatibilité du système.

Le cas d'un simplexe est alors immédiat en utilisant la bijection naturelle entre sommets et faces:

Au sommet S, intersection de n-1 hyperplans, correspond le « n-ième » hyperplan.

Proposition 9.

Les sommets et les extrema des variables d'écart dans le cas d'un simplexe.

Dans le cas d'un simplexe chaque sommet est le lieu de l'extremum d'une face (et réciproquement)

Exemple 10.

On considère le simplexe défini par les droites -3x+2y=-2, 5x+4y=62,x-8y=-14.

recherchons le maximum de z3=-14-x+8y au cône défini par $\begin{cases} -3x+2y \leqslant -2 \\ 5x+4y \leqslant 62 \end{cases}$, puis le maximum de z2=62-5x-4y restreint au cône $\begin{cases} -3x+2y \leqslant -2 \\ x-8y \leqslant -14 \end{cases}$ et enfin le maximum de z1=-2+3x-2y restreint au cône $\begin{cases} -3x+2y \leqslant -2 \\ x-8y \leqslant -14 \end{cases}$.

```
(%i16) a:matrix([0,x,y,z1,z2,z3,b],[z1,-3,2,1,0,0,-2],[z2,5,4,0,1,0,62],[z3,1,-8,
0,0,1,-14]);
```

(%o16) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & b \\ z1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ z2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 62 \\ z3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 & -14 \end{pmatrix}$$

```
(%i17) for j:2 thru 7 do a[2,j]:a[2,j]/2;for i:3 thru 4 do ( coeff:a[i,3],for j:2
thru 7 do a[i,j]:a[i,j]-coeff*a[2,j]);a[2,1]:y;a;
```

(%o17) **done**
(%o18) **done**

(%o19) y

(%o20) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & b \\ y & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ z2 & 11 & 0 & -2 & 1 & 0 & 66 \\ z3 & -11 & 0 & 4 & 0 & 1 & -22 \end{pmatrix}$$

```
(%i21) for j:2 thru 7 do a[3,j]:a[3,j]/11; for j:2 thru 7 do a[2,j]:a[2,j]+3*a[3,
j]/2;for j:2 thru 7 do a[4,j]:a[4,j]+11*a[3,j];a[3,1]:x;a;
```

(%o21) **done**

(%o22) **done**
(%o23) **done**

(%o24) x

(%o25) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & b \\ y & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 0 & 8 \\ x & 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 44 \end{pmatrix}$$. Le maximum de z3 est atteint en (6,8)

```
(%i44) c:matrix([0,x,y,z1,z2,z3,bb],[z1,-3,2,1,0,0,-2],[z3,1,-8,0,0,1,-14],[z2,5,
4,0,1,0,62]);
```

(%o44) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & \mathrm{bb} \\ z1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ z3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 & -14 \\ z2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 62 \end{pmatrix}$$

```
(%i45) for j:2 thru 7 do c[2,j]:-c[2,j]/3; for i:3 thru 4 do (coeff:c[i,2],for j:2
thru 7 do c[i,j]:c[i,j]-coeff*c[2,j]);c[2,1]:y;c;
```

(%o45) **done**
(%o46) **done**

(%o47) y

(%o48) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & \mathrm{bb} \\ y & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ z3 & 0 & -\frac{22}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{44}{3} \\ z2 & 0 & \frac{22}{3} & \frac{5}{3} & 1 & 0 & \frac{176}{3} \end{pmatrix}$$

(%i49) `for j:2 thru 7 do c[3,j]:-3*c[3,j]/22;for j:2 thru 7 do c[2,j]:c[2,j]+2*c[3,j]/3;for j:2 thru 7 do c[4,j]:c[4,j]-22*c[3,j]/3;c[3,1]:y;c;`

(%o49) **done**
(%o50) **done**

(%o51) **done**
(%o52) y

(%o53) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & \mathrm{bb} \\ y & 1 & 0 & -\frac{4}{11} & 0 & -\frac{1}{11} & 2 \\ y & 0 & 1 & -\frac{1}{22} & 0 & -\frac{3}{22} & 2 \\ z2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 44 \end{pmatrix}$$ `. Le maximum de z2 est atteint au point (2, 2)`

(%i74) `d:matrix([0,x,y,z1,z2,z3,bbb],[z2,5,4,0,1,0,62],[z3,1,-8,0,0,1,-14],[z1,-3,2,1,0,0,-2]);`

(%o74) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & \mathrm{bbb} \\ z2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 62 \\ z3 & 1 & -8 & 0 & 0 & 1 & -14 \\ z1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(%i75) `for j:2 thru 7 do d[2,j]:d[2,j]/5;for i:3 thru 4 do (coeff:d[i,2],for j:2 thru 7 do d[i,j]:d[i,j]-coeff*d[2,j]);d[2,1]:x;d;`

(%o75) **done**
(%o76) **done**

(%o77) x

(%o78) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & \mathrm{bbb} \\ x & 1 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{62}{5} \\ z3 & 0 & -\frac{44}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{132}{5} \\ z1 & 0 & \frac{22}{5} & 1 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{176}{5} \end{pmatrix}$$

(%i79) `for j:2 thru 7 do d[3,j]:-5*d[3,j]/44;for j:2 thru 7 do d[2,j]:d[2,j]-4*d[3,j]/5;for j:2 thru 7 do d[4,j]:d[4,j]-22*d[3,j]/5;d[3,1]:y;d;`

(%o79) **done**
(%o80) **done**

(%o81) **done**
(%o82) y

(%o83) $\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & \mathrm{bbb} \\ x & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 10 \\ y & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{44} & -\frac{5}{44} & 3 \\ z1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 22 \end{pmatrix}$`. le maximum de z1 est atteint en (10,3).`

(%i84)

8 Déterminer si deux polytopes sont disjoints

On considère deux polytopes (S) et (S') définis respectivement par les systèmes $\begin{cases} H\left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \leqslant 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} H'\left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \leqslant 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$; ils auront une intersection non vide si et seulement si le système d'inéquations suivant possède des solutions: $\begin{cases} H\left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \leqslant 0 \\ H'\left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \leqslant 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$. Nous allons pour cela appliquer la technique du Criss-Cross.

Plutôt que d'introduire des notations lourdes nous allons considérer le cas de deux polytopes inclus dans le premier orthant (afin de ne rechercher que des valeurs positives pour les variables (voir en annexe le cas de variables évoluant dans $\mathbb{R}$).

Le point de départ est à nouveau la simple remarque suivante:

L'inégalité $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{i,j}\mathrm{x}_j + \mathrm{a}_{i,n+1} \geqslant 0$ est équivalente à $\exists z \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{i,j}\mathrm{x}_j + \mathrm{a}_{i,n+1} = z \Longleftrightarrow \exists z \geqslant 0, -\sum_{j=1}^{n} \mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\mathrm{x}_j + \mathrm{z} = \mathrm{a}_{\mathrm{in}+1}$.

Exemple 11.

On considère les triangles $\begin{cases} x + y - 10 \geqslant 0 \\ -3x + 2y + 20 \geqslant 0 \\ x - 4y + 20 \geqslant 0 \\ (x, y, z) \geqslant 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x + 6y - 22 \geqslant 0 \\ 3x - 8y + 12 \geqslant 0 \\ -2x + y + 18 \geqslant 0 \\ (x, y, z) \geqslant 0 \end{cases}$.

Nous cherchons donc (x,y,z1,z2,z3,z4,z5,z6)$\in\mathbb{R}^{+6}$ tels que $\begin{cases} -x - y + z1 = -10 \\ 3x - 2y + z2 = 20 \\ -x + 4y + z3 = 20 \\ -x - 6y + z4 = -22 \\ -3x + 8y + z5 = 12 \\ 2x - y + z6 = 18 \\ (x, y, z) \geqslant 0 \end{cases}$

, que l'on peut considérer comme la recherche du maximum de la restriction de 18-2x+y au polyèdre (ici polygone) défini par $\begin{cases} -x - y + z1 = -10 \\ 3x - 2y + z2 = 20 \\ -x + 4y + z3 = 20 \\ -x - 6y + z4 = -22 \\ -3x + 8y + z5 = 12 \\ (x, y, z) \geqslant 0 \end{cases}$.

(%i11) `m:matrix([0,t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,b],[t3,-1,-1,1,0,0,0,0,0,-10],`
`[t4,3,-2,0,1,0,0,0,0,20],[t5,-1,4,0,0,1,0,0,0,20]`
`,[t6,-3,8,0,0,0,1,0,0,12],[t7,-1,-6,0,0,0,0,1,0,-22],`
`[t8,2,-1,0,0,0,0,0,1,18]);`

(%o11)
$$\begin{pmatrix} 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\ t3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ t4 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ t5 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ t6 & -3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ t7 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -22 \\ t8 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

(%i12) `for j:2 thru 10 do m[4,j]:m[4,j]/4;for i:2 thru 3 do (coeff:m[i,3],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[4,j]); for i:5 thru 7 do (coeff:m[i,3],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[4,j]);m[4,1]:t2;m;`

(%o12) **done**
(%o13) **done**

(%o14) **done**
(%o15) $t2$

(%o16)
$$\begin{pmatrix} 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\ t3 & -\frac{5}{4} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -5 \\ t4 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 30 \\ t2 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 5 \\ t6 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -28 \\ t7 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & 8 \\ t8 & \frac{7}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

(%i17) `for j:2 thru 10 do m[2,j]:-4*m[2,j]/5; for i:3 thru 7 do (coeff:m[i,2],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[2,j]);m[2,1]:t1;m;`

(%o17) **done**

(%o18) **done**
(%o19) $t1$

(%o20)
$$\begin{pmatrix} 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\ t1 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ t4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ t2 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 6 \\ t6 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{11}{5} & 1 & 0 & 0 & -24 \\ t7 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ t8 & 0 & 0 & \frac{7}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

(%i21) `for j:2 thru 10 do m[5,j]:-5*m[5,j]/4;for i:2 thru 4 do (coeff:m[i,4],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[5,j]);for i:6 thru 7 do (coeff:m[i,4], for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[5,j]);m[5,1]:t3;m;`

(%o21) **done**

(%o22) **done**
(%o23) **done**

(%o24) $t3$

(%o25) $$\begin{pmatrix} 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\ t1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 28 \\ t4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & -40 \\ t2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 12 \\ t3 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{11}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 30 \\ t7 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 78 \\ t8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{4} & \frac{7}{4} & 0 & 1 & -26 \end{pmatrix}$$

(%i26)
```
for j:2 thru 10 do m[3,j]:-2*m[3,j]/9;for j:2 thru 10 do m[2,j]:m[2,j]-
2*m[3,j]; for i:4 thru 7 do (coeff:m[i,6],for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-
coeff*m[3,j]);m[3,1]:t5;m;
```

(%o26) **done**
(%o27) **done**

(%o28) **done**
(%o29) $t5$

(%o30) $$\begin{pmatrix} 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\ t1 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{92}{9} \\ t5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & 1 & -\frac{5}{9} & 0 & 0 & \frac{80}{9} \\ t2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ t3 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{18} & 0 & \frac{5}{18} & 0 & 0 & \frac{50}{9} \\ t7 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{9} & 0 & \frac{10}{9} & 1 & 0 & \frac{182}{9} \\ t8 & 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{18} & 0 & -\frac{1}{18} & 0 & 1 & \frac{26}{9} \end{pmatrix}$$

(%i31)
```
for j:2 thru 10 do m[2,j]:9*m[2,j]/4;for i:3 thru 7 do (coeff:m[i,5],for
j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[2,j]);m[2,1]:t4;m;
```

(%o31) **done**

(%o32) **done**
(%o33) $t4$

(%o34) $$\begin{pmatrix} 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\ t4 & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 23 \\ t5 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 14 \\ t2 & -\frac{3}{8} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ t3 & -\frac{11}{8} & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{17}{2} \\ t7 & -\frac{13}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & -13 \\ t8 & \frac{13}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 & \frac{39}{2} \end{pmatrix}$$

(%i35)
```
for j:2 thru 10 do m[5,j]:-8*m[5,j]/11;for i:2 thru 4 do (coeff:m[i,2],for
j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[5,j]);for i:6 thru 7 do (coeff:m[i,2],
for j:2 thru 10 do m[i,j]:m[i,j]-coeff*m[5,j]);m[5,1]:t1;m;
```

(%o35) **done**

(%o36) **done**
(%o37) **done**

(%o38) $t1$

$$(\%o39)\quad \begin{pmatrix} 0 & t1 & t2 & t3 & t4 & t5 & t6 & t7 & t8 & b \\ t4 & 0 & 0 & \frac{18}{11} & 1 & 0 & \frac{5}{11} & 0 & 0 & \frac{100}{11} \\ t5 & 0 & 0 & \frac{4}{11} & 0 & 1 & -\frac{5}{11} & 0 & 0 & \frac{120}{11} \\ t2 & 0 & 1 & -\frac{3}{11} & 0 & 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 & \frac{42}{11} \\ t1 & 1 & 0 & -\frac{8}{11} & 0 & 0 & -\frac{1}{11} & 0 & 0 & \frac{68}{11} \\ t7 & 0 & 0 & -\frac{26}{11} & 0 & 0 & \frac{5}{11} & 1 & 0 & \frac{78}{11} \\ t8 & 0 & 0 & \frac{13}{11} & 0 & 0 & \frac{3}{11} & 0 & 1 & \frac{104}{11} \end{pmatrix}$$

(%i40)

Ce qui établit que l'intersection des deux triangles n'est pas vide.
Etudions un deuxième cas:

(%i213)
```
q:matrix([0,x,y,z1,z2,z3,z4,z5,z6,b],[z1,-2,1,1,0,0,0,0,0,0],[z2,3,1,0,1,
0,0,0,0,30],[z3,1,-3,0,0,1,0,0,0,-10],[z4,-1,1,0,0,0,1,0,0,0],[z5,2,1,0,0,
0,0,1,0,34],[z6,-1,-3,0,0,0,0,0,1,-32]);
```

$$(\%o213)\quad \begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & z6 & b \\ z1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ z3 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ z4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 34 \\ z6 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -32 \end{pmatrix}$$

(%i213)
```
for j:2 thru 10 do q[3,j]:q[3,j]/3;for j:2 thru 10 do q[2,j]:q[2,j]+2*q[3,
j];for i:4 thru 7 do (coeff:q[i,2],for j:2 thru 10 do q[i,j]:q[i,j]-
coeff*q[3,j]);q[3,1]:x;q;
```

(%o214) **done**

(%o215) **done**
(%o216) **done**

(%o217) x

$$(\%o218)\quad \begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & z6 & b \\ z1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ x & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ z3 & 0 & -\frac{10}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & -20 \\ z4 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ z5 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 14 \\ z6 & 0 & -\frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & -22 \end{pmatrix}$$

```
(%i219) for j:2 thru 10 do q[2,j]:3*q[2,j]/5;for i:3 thru 7 do (coeff:q[i,3],for
        j:2 thru 10 do q[i,j]:q[i,j]-coeff*q[2,j]);q[2,1]:y;q;
```

(%o219) **done**
(%o220) **done**

(%o221) y

(%o222) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & z6 & b \\ y & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ x & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ z4 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ z5 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ z6 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

```
(%i223) for j:2 thru 10 do q[5,j]:-5*q[5,j]/4;for i:2 thru 4 do (coeff:q[i,4],for
        j:2 thru 10 do q[i,j]:q[i,j]-coeff*q[5,j]);for i:6 thru 7 do (coeff:q[i,
        4],for j:2 thru 10 do q[i,j]:q[i,j]-coeff*q[5,j]);q[5,1]:z1;q;
```

(%o223) **done**
(%o224) **done**

(%o225) **done**
(%o226) $z1$

(%o227) $$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & z6 & b \\ y & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{15}{2} \\ x & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{15}{2} \\ z3 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & 5 \\ z1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & \frac{15}{2} \\ z5 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{23}{2} \\ z6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(%i189)

ce qui établit que le système n'est pas compatible, c'est à dire les triangles sont disjoints.

9 A la recherche des sommets d'un convexe

Dans le cas du simplexe nous avons vu une méthode pour déterminer les sommets; elle ne conviendra pas dans le cas d'un polytope quelconque car il n'y a pas en général de bijection entre l'ensemble des sommets et celui des faces, nous ne connaissons même pas le nombre de ces sommets.

On considère un polytope (C) défini par un système d'inéquations $H\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \leqslant 0$, on désire en déterminer la liste des sommets; parmi les nombreux algorithmes qui sont proposés, et qui sont tous confrontés à des problèmes de complexité, je vais décrire le plus élémentaire. [2]

Soit un convexe (E) dans l'espace affine $\mathbb{R}^p$ on sait que les sommets sont les intersections de p hyperplans d'appui (les sommets dégénérés étant intersection de d>p hyperplans d'appui, notre démarche se traduira par le fait qu'un même sommet risque d'être dénombré plusieurs fois; il faudra nettoyer).

Nous allons employer le tableau du simplexe, ce que nous avons appelé « matrice étendue » afin de ne pas créer de confusion par l'usage du mot simplexe.

Nous supposerons que la dernière colonne est positive, par l'application du Criss-Cross ou de la méthode de Dantzig à deux phases.

Un sommet est donc d'abord un point de base (c'est à dire un tableau) où p variables d'écart sont hors-base, qui est admissible, c'est à dire que les variables de la base sont positives.

De plus nous savons que le passage d'un point de base à un point voisin sur la frontière de (E) se fait par pivotage: deux points de base sont donc voisins si et seulement si il est possible de passer de l'un à l'autre par un pivotage, a fortiori deux sommets.

Enfin, on travaille avec deux ensembles de sommets: R et W.

On initialise ,à l'aide du Criss-Cross, en déterminant un premier sommet S1

R reçoit l'élément S1, W reçoit l'ensemble des sommets voisins de S1.

On recherche parmi les éléments de W un sommet S2, on l'ajoute alors à R, on ajoute à W l'ensemble des sommets voisins de S2 et on en retranche R.

On recherche parmi les éléments de W un sommet S voisin du dernier sommet ajouté à R, si oui on ajoute S à R et on ajoute à W l'ensemble des sommets voisins de S, on en retranche R; sinon on recherche dans W un sommet situé à une distance de 2 de S ..... sinon une distance de 3 de S, ..., jusqu'à une distance d$\leqslant p$ de S; si on en trouve on le désigne par S' on opère comme avant on ajoute ce sommet à R, on ajoute à W l'ensemble des sommets voisins de S' et on en retranche R.

Comme la distance entre deux sommets est bornée et que l'ensemble des sommets de (E) est connexe cet algorithme sera fini.

En conclusion, nous savons déterminer les sommets d'un convexe.

Les sommets potentiels correspondent aux paires de variables; la distance entre deux sommets s'exprimera comme le nombre de variables différentes.

(%i126)
```
e:matrix([0,x,y,z1,z2,z3,z4,z5,w],[z1,-3,2,1,0,0,0,0,-2],[z2,5,4,0,1,0,0,0,62],[z3,0,-1,0,0,1,0,0,-1],[z4,-1,-2,0,0,0,1,0,-6],[z5,1,-1,0,0,0,0,1,7]);
```

(%o126)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ z1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ z2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 62 \\ z3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ z4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ z5 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i127)
```
for j:2 thru 9 do e[2,j]:e[2,j]/2;for i:3 thru 6 do (coeff:e[i,3],for j:2 thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[2,j]);e[2,1]:y;e;
```

(%o127) **done**

(%o128) **done**

(%o129) y

(%o130)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ y & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ z2 & 11 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 66 \\ z3 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ z4 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ z5 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

(%i131)
```
for j:2 thru 9 do e[3,j]:e[3,j]/11;for i:2 thru 2 do (coeff:e[i,2],for j:2 thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[3,j]);for i:4 thru 6 do (coeff:e[i,2],for j:2 thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[3,j]);e[3,1]:x;e;
```

(%o131) **done**

(%o132) **done**
(%o133) **done**

(%o134) x

(%o135)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 0 & 0 & 0 & 8 \\ x & 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 1 & 0 & 0 & 7 \\ z4 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 1 & 0 & 16 \\ z5 & 0 & 0 & \frac{9}{22} & \frac{1}{22} & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

(%i136)
(%i27)

R:{(z1,z2)},W:{(z1,z3),(z1,z4),(z1,z5),(z2,z3),(z2,z4),(z2,z5)}
On tente (z1,z3):

(%i94) `e;`

(%o94)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 0 & 0 & 0 & 8 \\ x & 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 1 & 0 & 0 & 7 \\ z4 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 1 & 0 & 16 \\ z5 & 0 & 0 & \frac{9}{22} & \frac{1}{22} & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

(%i111)
```
for j:2 thru 9 do e[4,j]:22*e[4,j]/3; for i:2 thru 3 do (coeff:e[i,5],for
j:2 thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[4,j]);for i:5 thru 6 do (coeff:e[i,5],
for j:2 thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[4,j]);e[4,1]:z2;e;
```

(%o111) **done**

(%o112) **done**
(%o113) **done**

(%o114) $z2$

(%o115)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ y & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ z2 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & \frac{22}{3} & 0 & 0 & \frac{154}{3} \\ z4 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{8}{3} & 1 & 0 & -\frac{8}{3} \\ z5 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

(%i116)
(%i100)
(%i100)

le point recherché n'est pas admissible, donc ce n'est pas un sommet.
On tente (z1,z4)

(%i136) e;

(%o136)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 0 & 0 & 0 & 8 \\ x & 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 & 6 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{5}{22} & \frac{3}{22} & 1 & 0 & 0 & 7 \\ z4 & 0 & 0 & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 1 & 0 & 16 \\ z5 & 0 & 0 & \frac{9}{22} & \frac{1}{22} & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

(%i137)
```
for j:2 thru 9 do e[5,j]:11*e[5,j]/4; for i:2 thru 4 do (coeff:e[i,5],for
j:2 thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[5,j]);for i:6 thru 6 do (coeff:e[i,5],
for j:2 thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[5,j]);e[5,1]:z2;e;
```

(%o137) **done**
(%o138) **done**

(%o139) **done**
(%o140) $z2$

(%o141)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & 2 \\ x & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 2 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \\ z2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{11}{4} & 0 & 44 \\ z5 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i142)

(z1,z4) convient.
R:{(z1,z2),(z1,z4)},W:{(z1,z3),(z1,z4),(z1,z5),(z2,z3),(z2,z4),(z2,z5),(z3,z4),(z5,z4)}-R
c'est à dire R:{(z1,z2),(z1,z4)}, W:{(z1,z3),(z1,z5),(z2,z3),(z2,z4),(z2,z5),(z3,z4),(z5,z4)}
Essayons (z3,z4)

(%i142) e;

(%o142)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ y & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & 2 \\ x & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 2 \\ z3 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & 0 & 1 \\ z2 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{11}{4} & 0 & 44 \\ z5 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(%i143)
```
for j:2 thru 9 do e[4,j]:8*e[4,j]; for i:2 thru 3 do (coeff:e[i,4],for j:2
thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[4,j]);for i:5 thru 6 do (coeff:e[i,4],for
j:2 thru 9 do e[i,j]:e[i,j]-coeff*e[4,j]);e[4,1]:z1;e;
```

(%o143) **done**
(%o144) **done**

(%o145) **done**
(%o146) $z1$

(%o147)
$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & z1 & z2 & z3 & z4 & z5 & w \\ y & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ z1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -3 & 0 & 8 \\ z2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 5 & 0 & 38 \\ z5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(%i148)

(z3,z4) convient
.R:{(z1,z2),(z1,z4),(z3,z4)}, W:{(z1,z3),(z1,z5),(z2,z3),(z2,z4),(z2,z5),(z5,z4),(z3,z5)}

De même on réussira à trouver (z2,z5) puis (z3,z5).
Alors W sera saturée et la recherche des sommets terminée.

10 Une distance facile et équivalente à Hausdorff

Rappelons la définition de la distance de Hausdorff:

Pour tout compact (A) de $\mathbb{R}^n$ et tout r>0 on note V$_r(A)=\{x\in\mathbb{R}^n, d(x,A)<r\}$.

Pour tout couple de compacts (A,B) D(A,B)=inf$\{r>0, A\subset V_r(B)$ et $B\subset V_r(A)\}$.

Soit E l'ensemble des polytopes de $\mathbb{R}^n$ et deux polytopes (C) et (C').

Soit les matrices H et H' telles que X$\in(C)\Longleftrightarrow H\left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\leqslant 0$ et X$\in(C)\Longleftrightarrow H'\left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\leqslant 0$, on notera

H=$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots. & a1n & a1n+1 \\ a_{21} & \dots & \dots & a2n & a2n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots. \\ a_{p1} & \dots & \dots & \dots & \mathrm{apn}+1 \end{pmatrix}$ et H'=$\begin{pmatrix} a'11 & \dots & \dots. & a'1n & a'1n+1 \\ a'21 & \dots & \dots & a'2n & a'2n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots. \\ a'q+11 & \dots & \dots & \dots & a'\mathrm{qn}+1 \end{pmatrix}$ et on

posera pour toute face de F$_i$ de (C)(respectivement F'$_i$ de (C')) son équation f$_i(x)=\sum_i a_{\mathrm{ij}}x_j+a_{\mathrm{in}+1}$ (respectivement f'$_i(x)=\sum_i a'_{\mathrm{ij}}x_j+a'_{\mathrm{in}+1}$); **on supposera que les gradients des f$_i$ et des f'$_i$ sont tous unitaires (*)**.

On posera successivement

$d_i(C')=\max\ \{f_i(P),\ P\in(C')\}$,$d'_i(C)=\max\ \{f'_i(P),\ P\in(C)\}$ δ(C,C'))=max{d$_i$(C'),i=1..p},δ'(C,C'))=max{d'$_i$(C),i=1..q} et d((C),(C'))=max{$\delta(C,C')$,$\delta'(C,C')$|}.

Proposition 12.

d définie comme au-dessus est une distance sur l'ensemble des polytopes de $\mathbb{R}^n$.

d_i et d'$_i$ sont très simples à calculer (simplexe, Criss-Cross).

Démonstration.

Pour chaque i $d_i(C')$ se calcule par la méthode de Dantzig ou par le Criss-Cross et il existe un sommet P'$_i$ de (C') tel que max(d$_i$(C')=f$_i$(P'$_i$); ceci allège les calculs et évite les radicaux etc...

Ainsi définie d(C,C') est positive et lorsque d(C,C')=0 cela signifie que pour tout i f$_i$(C')$\leqslant$0 et pour tout i f'_i(C)$\leqslant$0 donc $(C')\subset(C)$ et (C)$\subset$(C') donc (C)=(C').

en désignant par $\vec{g}_i$ le gradient de f_i et par $\vec{g'_i}$ le gradient de f'_i

$f_i(P)=f_i(P_i)+<\vec{g}_i,\overrightarrow{P_iP}>=<\vec{g}_i,\overrightarrow{P_iP}>$ si P_i appartient à F_i, et $f'_i(P)=f_i{}'(P'_i)+<\vec{g'_i},\overrightarrow{P'_iP'}>=<\vec{g'_i},\overrightarrow{P'_iP'}>$ si P'$_i$ appartient à F'_i.

Reste l'inégalité triangulaire: Soient (C),(C'),(C") des polytopes H,H',H",f$_i$,f'$_i$ et f''_i définis comme au-dessus; quel que soit P' de (C') $f_i(P')\leqslant d_i(C,C')$ et quel que soit P" de (C") $f_j(P'')\leqslant d_j(C',C'')$, d'où

Proposition 13.

d définie comme au-dessus est une distance sur l'ensemble des polytopes de $\mathbb{R}^n$, on l'appellera « distance par lignes de niveaux ».

d_i et d'$_i$ sont très simples à calculer (simplexe, Criss-Cross).

Démonstration.

Pour chaque i $d_i(C')$ *se calcule par la méthode de Dantzig ou par le Criss-Cross et il existe un sommet P'*$_i$ *de (C') tel que max(*d_i*(C')=*f_i*(P'*$_i$*); ceci allège les calculs et évite les radicaux etc…*

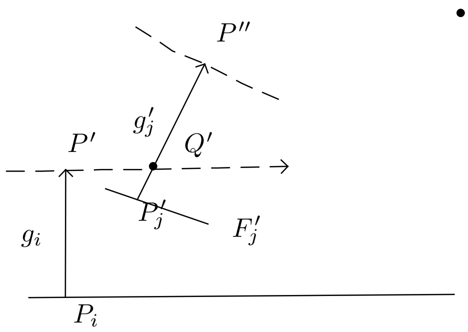
Ainsi définie d(C,C') est positive et lorsque d(C,C')=0 cela signifie que pour tout i f_i*(C')*$\leqslant 0$ *et pour tout i* f_i'*(C)*$\leqslant 0$ *donc* $(C') \subset (C)$ *et (C)*$\subset$$(C')$ *donc (C)=(C').*

en désignant par $\vec{g}_i$ *le gradient de* f_i *et par* $\vec{g_i'}$ *le gradient de* f_i'

f_i*(P)=*f_i*(*P_i*)+<*$\vec{g}_i, \overrightarrow{P_iP}$*>=<*$\vec{g}_i, \overrightarrow{P_iP}$*> si* P_i *appartient à* F_i*, et* f_i' *(P)=*f_i*'(P'*$_i$*)+<*$\vec{g_i'}, \overrightarrow{P_i'P}$*'>=<*$\vec{g_i'}$*,* $\overrightarrow{P_i'P}$*'> si P'*$_i$ *appartient à* F_i'*.*

Reste l'inégalité triangulaire: Soient (C),(C'),(C") des polytopes H,H',H",f_i*,f'*$_i$ *et* f_i'' *définis comme au-dessus; quel que soit P' de (C')* $f_i(P') \leqslant d_i(C,C')$ *et quel que soit P" de (C")* $f_j(P'') \leqslant d_j(C',C'')$*, d'où*

□



f_i*(P')=<*$\vec{g}_i, \overrightarrow{P_iP'}>$ *,*f_j*(P")=<*$\vec{g_j'}, \overrightarrow{P_j'P''}>$ *donc* f_i*(P")=<*$\vec{g}_i, \overrightarrow{P_iP''}> = <\vec{g}_i, \overrightarrow{P_iP'}> + <\vec{g}_i, \overrightarrow{P'P''}>$ *=*$f_i(P') + <\vec{g}_i, \overrightarrow{P'P''}>$*, d'où* f_i*(P")-*$f_i(P') = <\vec{g}_i, \overrightarrow{P'P''}>$*.*

f_i*(P")-*$f_i(P') - f_j(P'') = <\vec{g}_i, \overrightarrow{P'P''}> - <\vec{g_j'}, \overrightarrow{P_j'P''}> = <\vec{g}_i, \overrightarrow{Q'P''}> - <\vec{g_j'}, \overrightarrow{P_j'P''}> = <\vec{g}_i - \vec{g_j'},$ $\overrightarrow{Q'P''}> - <\vec{g_j'}, \overrightarrow{P_j'Q'}> \leqslant \|\overrightarrow{Q'P''}\| - \|\overrightarrow{P_j'P''}\| \leqslant -\|\overrightarrow{P_j'Q'}\|$*, car* $\vec{g}_i$ *et* $\vec{g_j'}$ *sont unitaires et , respectivement, colinéaires à* $\overrightarrow{Q'P''}$ *et à* $\overrightarrow{P_j'P''}$*, donc* f_i*(P")-*$f_i(P') - f_j(P'') \leqslant 0$*; d'où l'inégalité triangulaire.*

Proposition 14. *La distance par lignes de niveau n'est pas équivalente à celle de Hausdorff mais elle lui est topologiquement équivalente.*

Démonstration.

D'une certaine manière dire que la distance par lignes de niveaux tend vers 0 signifie que les hyperplans d'appui tendent vers des positions identiques et dire que la distance de Hausdorff tend vers0 signifie que les convexes « tendent » à se contenir l'un l'autre.

Supposons une suite de polytopes (Ck) qui tend vers (D) au sens de la distance par lignes de niveaux alors si pour tout i,k fi,k désigne l'application affine, de gradient unitaire qui est représentée par la ième ligne de Hk, son expression tend vers celle la ième ligne de (D); par suite pour tout point Mk de (Ck) et M de (D) la valeur du quotient $\frac{<\overrightarrow{M_kM}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f_{i,k})>}{\|\overrightarrow{M_kM}\|}$ *est bornée inférieurement et supérieurement, ce qui entraîne la convergence au sens de Hausdorff.*

La réciproque est plus géométrique, la coïncidence des polytopes entraîne celle des hyperplans d'appui. □ □

11 Union et intersection de polytopes

Il est immédiat que l'intersection de deux polytopes est un polytope et que l'ensemble des hyperplans d'appui de l'intersection est l'intersection des ensembles d'hyperplans d'appui.

Un petit schéma montre aisément que la réunion de deux polytopes n'est pas nécessairement un polytope.

Rappelons le

Théorème 15. *Un polytope est la réunion de simplexes dont les intérieurs sont disjoints.*

IL semblerait que la démonstration fait appel à des arguments plutôt topologiques fondés sur la convexité [3]; nous allons ébaucher une démonstration plus effective.

Nous allons tenter de décrire son application à travers la matrice

Soit un polytope (P) dans $\mathbb{R}^n$ défini par q$\geqslant n$ équations.

Si q=n (P) est un simplexe.

Supposons q>n.

Un sommet S est défini par n hyperplans en position générale et se traduit par l'annulation de n variables hors-base, par exemple z1,…,zn.

Un sommet relié directement à S est défini par l'annulation de n-1 de ces variables hors-base et une autre, par exemple: $\{$z1, …, zn$\}$ −zk +zj; il y a donc au plus n sommets directement voisins de S; on appellera Voisinage de S l'ensemble de ces points.

Voici comment on les trouvera: la méthode de Dantzig s'exprime comme suit:

A partir de S, pour savoir quelle variable de la base va quitter la base : on choisit la variable

hors-base (disons la colonne k de la matrice) destinée à entrer et on cherche parmi les lignes Li, i=1,..,q, qui représentent les variables de la base, le maximum du quotient b_i / a_{ik} (pour aik>0)

Si on suppose que le polytope est « un polytope », c'est à dire un polyèdre convexe, borné, il y a dans chaque colonne au moins un terme strictement positif; donc dans chaque colonne correspondant à une variable hors-base on trouvera le maximum.

Si la dimension de l'espace affine engendré par le voisinage de S est égale à n- 1 il existe alorsun hyperplan affine unique H qui contient ce voisinage, S et H engendrent un simplexe $\sum$; P est la réunion de $\sum$ et d'un polytope P' qui possède moins de sommets, d'où la récurrence

Si la dimension de l'espace affine engendré par le voisinage de S est inférieure à n-1 on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On remarquera que les simplexes sont « recollés » suivant des faces communes.

BIBLIOGRAPHIE:

[1] Lazarus, Chapitre 6, Polytopes, https://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~lazarusf/Enseignement/polytopes.pdf

[2] M.Manas,J.Nedoma, Finding All vertices of a Convex Polyedron, Numerische Mathematik, vol 12, pp.226-229.

[3] P.Teller, La cellule manquante, https://www.lalgebrisant.fr