Matrices réductibles et zéros permanents

par Patrick Teller

11 Décembre 2023

1 Définitions:

Définition 1. *case « i,j » d'une matrice A, élément « $a_{i,j}$ » de la matrice A*

Pour bien comprendre ce qui va suivre il faut concevoir avant tout une feuille vierge comprenant n$\times n$ « cases » vides, que nous appellerons « le tableau », où vont s'inscrire les éléments des matrices considérées; nous allons nous intéresser aux valeurs prises par ces cases et à leur évolution.

De manière plus formelle définir une matrice A$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ signifiera déterminer une application qui à chaque couple (i,j)$\in[\![1,\ldots,n]\!]^2$ associe un réel positif.

Nous conviendrons une fois pour toutes que n est supérieur ou égal à 2 et nous entendrons par « positif » supérieur ou égal à zéro.

Définition 2. *Matrice réductible*

Une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ sera dite réductible s'il existe une matrice de Permutation P telle que

$^tPAP = P^{-1}\mathrm{AP} = \left(\begin{smallmatrix} B, C \\ 0, D \end{smallmatrix}\right)$, *où (B,D)$\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^+)\times\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R}^+)$, avec $0<p<n$.*

On notera que les matrices A et ^{t}PAP ont les mêmes termes mais répartis autrement entre les

« cases ».

Définition 3. *zéro, zéro permanent*

Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ on appellera « zéro » de A, une case qui porte la valeur zéro et « zéro permanent » une case qui portera la valeur « zéro » dans A^t pour tout t de $\mathbb{N}$; on comprend qu'il ne peut s'agir de cases de la diagonale.

Notation 4. *Soit une matrice A   nous désignerons (de manière classique) par $a_{i,j}$ l'élément de la ième ligne, jième colonne de A et par $a^t_{i,j}$ l'élément de la ième ligne, jième colonne de A^t, où t est un entier positif.*

Un zéro permanent ne vient pas tout seul, pour que la case « i,j » porte un zéro permanent ,il faut que $a_{i,j}=0$ mais aussi que $a^2_{i,j}=\sum_k a_{i,k}a_{\mathrm{kj}}=0$, ce qui, compte tenu du signe des éléments de A, exige que pour chaque k l'un au moins des deux facteurs $a_{i,k}, a_{\mathrm{kj}}$ soit nul et que cela se répète pour le calcul de la valeur de la case « i,j » dans A^3 etc…

Exemple 5. Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 & \star \end{pmatrix}$ où les valeurs données aux cases qui ne sont pas bleues sont indifférentes; l'ensemble des cases bleues forme une matrice extraite A[{1,2,4,5,8,9},{3,6,7,10}] permanente de zéros; en effet si on calcule A^2 on retrouve les mêmes cases nulles, quelles que soient les valeurs des cases « non bleues », ce qui permet de conclure que chacune des cases bleues est un zéro permanent.

Nous avons adopté la convention d'écriture suivant laquelle A[{1,2,4,5,8,9},{3,6,7,10}] représente la sous-matrice obtenue en supprimant dans A les lignes 1,2,4,5,8,9 et les colonnes 3,6,7,10.

2 Configuration de Zéros Permanents

Définition 6. *Configuration de zéros permanents, configuration minimale*

Un sous-ensemble E de cases de A sera appelé « configuration de zéros permanents » si

$\forall\,(i,j) \in E, \forall t \in \mathbb{N}, a_{i,j}^t = 0.$

Une configuration de zéros permanents E sera dit minimale si quel que soit z∈E l'ensemble $E\backslash z$ n'est pas vide et n'est pas une configuration de zéros permanents.

Exemple 7.

Soit n>1 et une matrice triangulaire supérieure A=$(a_{i,j})$ l'ensemble des cases « i,j » où i>j représente une configuration de zéros permanents.

Proposition 8.

Quel que soit le couple (i,j) où i≠j il existe une matrice A où la case « i,j » est un zéro permanent.

Démonstration.

Il suffit de prendre pour A la matrice I_n. □

Théorème 9. *Si A∈$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ possède un zéro permanent en case « i,j » il existe une sous-matrice de zéros permanents comprenant la case « i,j ».*

Démonstration. *Pour tout couple (u,v), $a_{u,v}^2$=$\sum_k a_{u,k}a_{k,v}$; en particulier, comme les termes de la diagonale sont exclus, $a_{u,v}^2$=0$\Rightarrow a_{u,v}=0$ et même $a_{u,v}^t$=0$\Rightarrow a_{u,v}=0$*

Supposons que pour tout t∈$\mathbb{N}$, $a_{i,j}^t$=0 alors,si on désigne par Cj la jème colonne et par Li la ième ligne, l'égalité $a_{i,j}^2$=0 entraîne l'égalité <Li,Cj>=0, comme $\star\ \times\star = \star$ si la tième coordonnée de Cj est strictement positive alors la tième coordonnée de Li est nulle: d'où si on désigne par I_1 l'ensemble des indices y pour lesquels $a_{y,j}$≠0 et par I_2=$\mathcal{C}_{[1,\dots,n]}^{I_1}$, alors pour chaque z de I_2 on aura $a_{i,z}$=0. Nous retiendrons que $\|I_2\|$ zéros apparaissent dans la colonne Cj et $\|I_1\|$ zéros apparaissent dans la ième ligne.

de même si la tième coordonnée de Cj est strictement positive et si <Li,Cj>=<Li',Cj> alors la tième coordonnée de Li est égale à celle de Li' (nous ne pouvons pas en dire plus quant aux autres coordonnées); donc pour chaque z $a_{i',z}$=0.

En résumé nous avons déterminé une matrice extraite de n-p lignes et p colonnes dont les éléments sont tous des zéros et comme nous avons vu plus haut que $a^t_{u,v}$*=*$0 \Rightarrow a_{u,v} = 0$*, les zéros obtenus sont permanents.*

La réciproque est immédiate.

***Exemple* 10.**

On considère un zéro en case (5,2) $\begin{pmatrix} \star & 0 & & & & & & \\ & \star & & & & & & \\ & \star & \star & & & & & \\ & 0 & & \star & & & & \\ & 0 & & & \star & & & \\ & \star & & & & \star & & \\ & 0 & & & & & \star & \\ & \star & & & & & & \star \end{pmatrix}$*, pour que* $a^2_{5,2}$*=0 il faut* $\begin{pmatrix} \star & 0 & & & & & & \\ & \star & & & & & & \\ & \star & \star & & & & & \\ & 0 & & \star & & & & \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ & \star & & & & \star & & \\ & 0 & & & & & \star & \\ & \star & & & & & & \star \end{pmatrix}$

puis $\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ & \star & & & & & & \\ & \star & \star & & & & & \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ & \star & & & & \star & & \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ & \star & & & & & & \star \end{pmatrix}$*; aucune contrainte sur les autres cases:* $\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$

Les zéros permanents forment la sous-matrice A[{2,3,6,8},{1,4,5,7}].

$\square$

On remarque aussi que chaque zéro est nécessaire pour les autres, l'ensemble des zéros construit ainsi est une configuration minimale de zéros permanents.

Remarque 11.

Tout ensemble de zéros permanents n'est pas nécesssairement une configuration minimale comme le montre l'exemple ci-dessous:

$\begin{pmatrix} * & 0 & \star & 0 \\ 0 & \star & 0 & \star \\ \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & \star & 0 & \star \end{pmatrix}$ est un ensemble de zéros permanents mais il n'est pas minimal:

$\begin{pmatrix} \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & * & \star \\ \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & 0 & \star \\ \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & 0 & \star \end{pmatrix}$ sont quant à eux minimaux.

Proposition 12.

La réunion de sous-ensembles de zéros permanents d'une matrice, à valeurs positives (ou nul) est un ensemble de zéros permanents

Démonstration.

Découle de la définition de zéro permanent $\square$

Exemple 13.

$\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$ est la réunion de $\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & 0 & \star & \star & 0 & \star & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix}$; symboliquement on effectuera le produit d'Hadamard des matrices concernées, en utilisant la relation min(0,$\star$)=0.

Proposition 14. $|L|+|C|=n$

Soit dans $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R}^+)$ une configuration minimale de zéros permanents et on désigne par L et C les ensembles de numéros des lignes et des colonnes de la configuration, alors L et C sont deux parties complémentaires dans {1,..,n} et $|L|+|C|=n$.

Démonstration. *Si on suppose que la coalition est minimale le raisonnement du Théorème 9 montre que L et C sont complémentaires dans {1,..,n}.*

□

Exemple 15. Soit n=6 voici des exemples de configuration minimale

1. L=5,C=1 $\begin{pmatrix} a11 & & & & & \\ & a22 & & & & \\ & & a33 & & & \\ & & & a44 & & \\ & & & & a55 & \\ & & & & & a66 \end{pmatrix}$

2. L=4,C=2 $\begin{pmatrix} a11 & & & & & \\ & a22 & & & & \\ & & a33 & & & \\ & & & a44 & & \\ & & & & a55 & \\ & & & & & a66 \end{pmatrix}$

3.L=3,C=3 $\begin{pmatrix} a11 & & & & & \\ & a22 & & & & \\ & & a33 & & & \\ & & & a44 & & \\ & & & & a55 & \\ & & & & & a66 \end{pmatrix}$

4. L=2,C=4 $\begin{pmatrix} a11 & & & & & \\ & a22 & & & & \\ & & a33 & & & \\ & & & a44 & & \\ & & & & a55 & \\ & & & & & a66 \end{pmatrix}$

5. L=1,C=5 $\begin{pmatrix} a11 & & & & & \\ & a22 & & & & \\ & & a33 & & & \\ & & & a44 & & \\ & & & & a55 & \\ & & & & & a66 \end{pmatrix}$

(les schémas proposés ne sont pas uniques)

Exemple 16.

De même voici des exemples de configuration de zéros permanents non minimale

$\begin{pmatrix} a11 & & & & & \\ & a22 & & & & \\ & & a33 & & & \\ & & & a44 & & \\ & & & & a55 & \\ & & & & & a66 \end{pmatrix}$ est une coalition car $\begin{pmatrix} a11 & & & & & \\ & a22 & & & & \\ & & a33 & & & \\ & & & a44 & & \\ & & & & a55 & \\ & & & & & a66 \end{pmatrix}$ est une coaliton et

$\begin{pmatrix} a11 & & & & & \\ & a22 & & & & \\ & & a33 & & & \\ & & & a44 & & \\ & & & & a55 & \\ & & & & & a66 \end{pmatrix}$ aussi.

3 Coalition de zéros et matrice réductible

Nous allons établir une caractérisation des matrices irréductibles, qui fait intervenir des configurations minimales de zéros permanents

Proposition 17. *A la recherche d'une permutation utile*

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ qui contient une configuration minimale de zéros permanents, et on désigne par L et C les ensembles de numéros des lignes et des colonnes de la configuration , il existe une permutation p telle que ${}^tPAP$ est de la forme $\begin{pmatrix} * & ** \\ 0 & *** \end{pmatrix}$, où $*$ et $***$ sont des matrices carrées.

Démonstration.

Pour ne pas alourdir les notations, nous allons traiter le cas de la matrice A de l'exemple au-dessus.

D'abord nous allons « compresser » la configuration sur les premières colonnes, pour cela nous appliquer une suite de transpositions:

la transposition (9,3) envoie la colonne bleue numéro 9 en position numéro 3, puis la transposition (8,6) envoie la colonne bleue numéro 8 en position numéro 6; ainsi les colonnes bleues se retrouvent en positions numéro jusqu'à numéro 6.

Maintenant nous allons « compresser » la configuration vers le bas au moyen d'une suite de transpositions:

la tranposition (3,9) envoie la ligne bleue numéro 3 en position numéro 9, puis la transposition (6,8) envoie la ligne bleue numéro 6 en position numéro 8.

En fait, ce que nous avons déplacé, ce sont des case s portant des zéros.

En résumé $P_{(6,8)\ominus(3,9)}AP_{(6,8)\ominus(3,9)}$ est de la forme $\begin{pmatrix} * & ** \\ 0 & *** \end{pmatrix}$, de plus le bloc nul en bas à gauche compte $|L|$ lignes et $|C|$ colonnes, donc $*$ compte $|C|$ colonnes et $***$ compte $|L|$ lignes, et comme A possède n lignes et colonnes, il découle que $*$ compte n-$|L|=|C|$ lignes donc est carrée et de même $***$ compte n-$|C|=|L|$ colonnes donc est carrée.

Enfin les transpositions considérées sont des involutions et commutent entre elles donc $P_{(6,8)\ominus(3,9)} = {}^tP_{(6,8)\ominus(3,9)}$.

Ce qui établit la Proposition. □

Par suite

Théorème 18.

Si une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ contient une configuration de zéros permanents elle est réductible.

Réciproquement.

Soit d'abord la matrice $\begin{pmatrix} B, C \\ 0, D \end{pmatrix}$ où B$\in\mathcal{M}_q(\mathbb{R}^+)$,C$\in\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}^+)$,D$\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^+)$ le bloc inférieur gauche est une configuration minimale de zéros permanents et, comme $\left(\mathrm{P}_{i,j}\begin{pmatrix} B, C \\ 0, D \end{pmatrix}\mathrm{P}_{i,j}\right)^2 = \mathrm{P}_{i,j}\begin{pmatrix} B^2, \mathrm{BC}+\mathrm{CD} \\ 0, D^2 \end{pmatrix}\mathrm{P}_{i,j}$ les cases images par la conjugaison par $\mathrm{P}_{i,j}$ sont aussi des zéros permanents; par ailleurs la conjugaison conservant l'alignement et les nombres de lignes et de colonnes de la coalition.

on retrouve dans $\mathrm{P}_{i,j}\begin{pmatrix} B, C \\ 0, D \end{pmatrix}\mathrm{P}_{i,j}$ une configuration de zéros permanents.

Par suite

Théorème 19. *Caractérisation des matrices réductibles*

Une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ est réductible si et seulement si elle contient une configuration minimale de zéros permanents.

Patrick Teller

Décembre 2023