Suites entières finies et conjugaison

PAR PATRICK TELLER

Résumé

On appelle partition d'un entier strictement positif n toute suite t=(t_1, ..., t_p) d'entiers strictement positifs telle que $\sum_{i=1\ldots p} t_i = n$; à une telle suite t on associe la partition conjuguée (z_1, ..., $z_{\max(t)}$) définie par la relation $\forall k \in [\![1, ..., \max(t)]\!]$, $z_k = |i, t_i \geqslant k|$; il est immédiat que $\sum_{k=1\ldots\max(t)} z_k = \sum_{i=1\ldots p} \mathrm{t}_i$.

Le calcul, sous deux formes différentes, de la dimension du commutant d'une matrice nilpotente conduit à penser que $\sum_{k=1\ldots\max(t)} z_k^2 = \sum_{(i,j)\in[\![1,\ldots,p]\!]^2} \min(t_i, t_j)$. [1], [2]

De même le site Mathstackexchange a publié une question relative à l'égalité $\sum_k z_k w_k = \sum_{(i,j)} \min(t_i, s_j)$, où t et s sont deux partitions, et z et w les partitions conjuguées. [3]

On trouvera ici une démonstration élémentaire qui fait appel à la suite $(\min(t_i, s_j))$.

Remarque 1.

On considérera en fait des listes d'entiers strictement positifs (la notion de partition étant superfétatoire) et on conservera la définition de liste conjuguée: $\forall k \in [\![1, \ldots, \max(t)]\!], z_k = |i, t_i \geqslant k|$.

Définition 2. *$t \wedge s$*

Soient deux listes t=[t_1, ..., t_p] et s=[s_1, ..., s_q] à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ on désigne par $t \wedge s$ la liste [min(t_i,s_j)] classée (par exemple) dans l'ordre lexicographique.

Théorème 3.

La liste conjuguée $(t \wedge s)^*$ est égale à $[t_k^* \times s_k^*]$,k=1..max(t,s).

Démonstration.

Il suffit de remarquer que min(t_i,s_j)$\geqslant k \Longleftrightarrow t_i \geqslant k \wedge s_j \geqslant k$). □

Proposition 4. *Propriétés de la loi $\wedge$*

La lci $\wedge$ est associative et commutative

Il n'y a pas d'élément neutre

(on pourrait définir comme élément neutre la suite [∞] dont la suite duale est [1,..,1,...,1,...]; il n'y aurait alors pas de symétrisabilité).

Rappel:

Soient une liste $[t_1, \ldots., t_p]$ et sa liste conjuguée, $[z_1, \ldots, z_{t_1}]$, $\sum_{k=1\ldots\max(t)} z_k = \sum_{i=1\ldots p} t_i$.

Par suite

Théorème 5. *Soient deux listes t et s et leurs listes conjuguées z et w.*

$\sum_{k=1\ldots\min(\max(t),\max(s))} z_k w_k = \sum_{(i,j)\in[\![1,\ldots,p]\!]\times[\![1,\ldots,q]\!]} \min(t_i, s_j)$ [3]

$\sum_{k=1\ldots\max(t)} {z_k}^2 = \sum_{(i,j)\in[\![1,\ldots,p]\!]^2} \min(t_i, t_j)$ [1].

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le rappel aux listes t$\wedge s$ et t$\wedge t$. $\square$

Remarque 6.

L'associativité de la composition ouvre la voie à la formule générale:

$\boldsymbol{\sum_k x(1)^*_k ... x(p)^*_k = \sum_{(i_1, i_2, ..., i_p)} \min(x(1)_{i_1}, ..., x(p)_{i_p})}$,

où x(1),..,x(p) sont des listes finies à valeur dans $\mathbb{N}^*$ et $x(1)^*$, ..., $x(p)^*$ les listes conjuguées; la démonstration se fera par récurrence.

ANNEXE:

Si on considère une matrice nilpotente en blocs de Jordan de tailles respectives ($t_1 \geqslant .... \geqslant t_p$) la dimension de son commutant est $\sum_{(i,j) \in [\![1,...,p]\!]^2} \min(t_i, t_j)$. [2]

Si on considère la matrice de Weyr semblable ([1]) formée de blocs de tailles respectives (z_1, ..., z_{t_1}) la dimension de son commutant est $\sum_{k=1...t_1} z_k^2$.

Mars 2019

Bibliographie:

[1] http://lalgebrisant.fr/images/pdfArticles/LuniversDesMatricesFractales.pdf

[2] http://lalgebrisant.fr/images/pdfArticles/EquatAMMB.pdf

[3] https://math.stackexchange.com/questions/81059/a-formula-on-partitions/81213