

# Bezout.02 ou Frobenius.02 ?

PAR PATRICK TELLER

version beta

Au début était Bezout: étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$ , le sous-groupe  $\text{Gr}(a,b)$  engendré par  $a$  et  $b$ , c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires  $\{au + bv, (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$  est égal à l'ensemble des multiples de leur pgcd, soit  $\mathbb{Z}$  s'ils sont premiers entre eux ou  $d\mathbb{Z}$  si leur pgcd est  $d$ .

Puis vint Frobenius, étant donnés deux entiers naturels  $a$  et  $b$ , premiers entre eux, on considère le semi-groupe  $\text{SGr}(a,b)$  engendré par  $a$  et  $b$ , c'est à dire l'ensemble des combinaisons linéaires  $\{au + bv, (u, v) \in \mathbb{N}^2\}$ , l'ensemble des entiers naturels qui n'appartiennent pas à  $\text{SGr}(a,b)$  est fini; il existe un seuil  $N$  tel que tout entier  $n \geq N$  puisse s'écrire  $n=au+bv$  (avec des coefficients dans  $\mathbb{N}$ ).

Par contre, lorsque  $a \wedge b = d > 1$  l'ensemble des entiers naturels qui n'appartiennent pas à  $\text{SGr}(a,b)$  est infini, puisqu'il contient le complémentaire de  $d\mathbb{N}$ .

On peut se poser la question de l'extension de ces deux résultats à la dimension 2.

Bien que la démonstration du Théorème de Bezout repose sur le caractère cyclique des sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  on verra qu'il est possible d'en trouver un analogue en dimension 2; par contre il ne sera pas possible d'obtenir un analogue immédiat du résultat de Frobenius.

Cependant en considérant les points entiers  $\text{N}(V_1, V_2)$  du cône engendré par deux vecteurs primitifs d'une part et le sous-groupe  $\text{SGr}(V_1, V_2)$  d'autre part on verra qu'il existe un nombre fini de vecteurs  $W_1, \dots, W_p$  tels que le sous-groupe qu'ils engendrent « complète »  $\text{SGr}(V_1, V_2)$  dans  $\text{N}(V_1, V_2)$  (un peu comme le cas de la dimension 1 où un ensemble fini d'entiers complète  $\text{SGr}(a,b)$  dans  $\mathbb{N}$ ).

## 1 A la recherche d'extensions à la dimension 2

### 1.1 Bezout.02 ?

On considère deux vecteurs (à coefficients dans  $\mathbb{N}$ )  $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$  et  $V_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ , linéairement indépendants.

Le sous-groupe engendré par  $V_1$  et  $V_2$  est l'ensemble  $\{u_1V_1 + u_2V_2, (u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ , il est contenu dans  $\mathbb{Z}^2$ .

$$\text{La résolution de l'équation } u_1V_1 + u_2V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ nous donne } \begin{cases} u_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & v_{12} \\ y & v_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}} \\ u_2 = \frac{\begin{vmatrix} v_{11} & x \\ v_{21} & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}, \text{ d'où}$$

i) si  $\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = \pm 1$ ,  $\text{Gr}(V_1, V_2) = \mathbb{Z}^2$

ii) si  $\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = d$ ,  $d \neq 1$ ,  $\{u_1V_1 + u_2V_2, (u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, d \mid \begin{vmatrix} x & v_{12} \\ y & v_{22} \end{vmatrix} \text{ et } d \mid \begin{vmatrix} v_{11} & x \\ v_{21} & y \end{vmatrix} \right\}$ ; d'où  $\text{Gr}(V_1, V_2)$  n'est pas égal à  $\mathbb{Z}^2$ .

CONCLUSION:

Le Théorème de Bezout a son analogue en dimension 2 et le rôle du pgcd est tenu par le déterminant.

On retiendra pour la suite que, le déterminant  $\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}$  étant non nul, les équations que nous posons possèdent une solution unique, la question étant de distinguer les entiers parmi les rationnels, les naturels parmi les entiers.

### 1.2 Frobenius.02 ?

Avec les mêmes hypothèses.

Le cône  $\Gamma(V_1, V_2)$  de sommet O et engendré par les demi-droites  $\mathbb{R}^+V_1$  et  $\mathbb{R}^+V_2$  est de manière évidente stable par addition, il constitue donc un semi-groupe; par suite l'ensemble des points entiers de ce cône (que l'on notera  $N(V_1, V_2)$ ) et que l'on appellera cône entier engendré par  $V_1$  et  $V_2$ ) est un semi-groupe qui contient le semi-groupe  $SGr(V_1, V_2) = \{u_1V_1 + u_2V_2, (u_1, u_2) \in \mathbb{N}^2\}$ .

La résolution de l'équation  $u_1V_1 + u_2V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  nous donne 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & v_{12} \\ y & v_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}} \\ u_2 = \frac{\begin{vmatrix} v_{11} & x \\ v_{21} & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}, \text{ d'où}$$

i) si  $\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = \pm 1$ ; par unicité, si un point appartient au cône,  $u_1$  et  $u_2$  sont des réels positifs) et, si ses coordonnées sont entières, il appartient au semi-groupe:  $SGr(V_1, V_2) = \{u_1V_1 + u_2V_2, (u_1, u_2) \in \mathbb{N}^2\} = N(V_1, V_2)$ ;

ii) si  $\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = d, |d| \neq 1$ ,  $SGr(V_1, V_2) = \{u_1V_1 + u_2V_2, (u_1, u_2) \in \mathbb{N}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma(V_1, V_2), d \mid \begin{vmatrix} x & v_{12} \\ y & v_{22} \end{vmatrix} \text{ et } d \mid \begin{vmatrix} v_{11} & x \\ v_{21} & y \end{vmatrix} \right\}$ . Ici  $SGr(V_1, V_2)$  est strictement inclus dans l'ensemble des points entiers du cône.

**CONCLUSION:** Contrairement au cas du Théorème de Bezout celui de Frobenius ne possède pas d'analogue: soit le semi-groupe est le cône entier, soit il y a une infinité de points (entiers) du cône entier qui n'appartiennent pas au semi-groupe:

**Définition 1.** *Parallélogramme de base du cône entier  $N(V_1, V_2)$*

*On appellera, de manière naturelle, parallélogramme de base du cône entier  $N(V_1, V_2)$ , le polygone convexe  $P(V_1, V_2)$  dont les sommets sont les quatre points entiers  $\{O, V_1, V_2, V_1 + V_2\}$ .*

Rappelons le

**Théorème 2.** *Théorème de Pick [1]*

*Soit un polygone à sommets entiers, si on désigne par  $A$  l'aire de ce polygone, par  $i$  le nombre de points intérieurs du polygone et du nombre  $b$  de points du bord du polygone :*

$$A = i + \frac{1}{2}b - 1$$

**Théorème 3.** *d'après le Théorème de Pick*

*Le parallélogramme  $P(V_1, V_2)$  possède  $i = |d| - 1$  points entiers intérieurs.*

**Démonstration.**

*Ici par construction  $b=4$ ,  $A=|d|$*  □

Les points intérieurs au parallélogramme  $P(V_1, V_2)$  et les points qui leur sont congrus modulo le semi-groupe sont les points du cône entier qui n'appartiennent pas au semi-groupe.

D'où le

**Théorème 4.**

*Lorsque  $\det(V_1, V_2) = \pm 1$   $SGr(V_1, V_2) = N(V_1, V_2)$ .*

*Lorsque  $\det(V_1, V_2) = d, |d| > 1$   $N(V_1, V_2) \setminus SGr(V_1, V_2)$  est infini.*

**Proposition 5.**

*Tout point de  $N(V_1, V_2)$  est congru modulo  $SGr(V_1, V_2)$  à un point de  $P(V_1, V_2)$*

**Théorème 6.** *Soit un point entier  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  ( $a, b$  naturels)*

*L'utilisation d'une base standard vectorielle  $[ ]$  associée à la famille  $\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  peut permettre de*

1) déterminer s'il appartient au semi-groupe  $SGr(V_1, V_2)$  (le reste est de la forme  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \in \mathbb{N} \\ u_2 \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$ ) et il vaut  $u_1V_1 + u_2V_2, (u_1, u_2)$ ).

2) déterminer son reste modulo  $SGr(V_1, V_2)$  (le reste apparaît comme  $\begin{pmatrix} \alpha \in \mathbb{N} \\ \beta \in \mathbb{N} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ).

## 2 Cônes entiers parfaits et suites de rationnels adjacents

**Définition 7.** *Cône entier parfait*

Soient  $V_1, V_2$  le cône entier  $N(V_1, V_2)$  sera dit parfait lorsque  $N(V_1, V_2) = SGr(V_1, V_2)$

On a compris que  $N(V_1, V_2)$  est parfait si et seulement si  $\det(V_1, V_2) = \pm 1$ .

**Définition 8.** *Rationnels adjacents*

Deux rationnels positifs  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  seront dits adjacents lorsque  $ad - bc = 1$

**Théorème 9.**

Soient  $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$  et  $V_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ , tels que  $\frac{v_{21}}{v_{11}} < \frac{v_{22}}{v_{12}}$  (réduits), le cône entier  $N(V_1, V_2)$  est une réunion « disjointe » de cônes entiers parfaits si et seulement si il existe une suite de rationnels adjacents  $\frac{v_{21}}{v_{11}} = \frac{y_1}{x_1} < \dots < \frac{y_p}{x_p} = \frac{v_{22}}{v_{12}}$ ; une telle suite sera dite de longueur  $p$ .

**Démonstration.**

Il suffit de considérer les cônes entiers  $N(V_1, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}), N(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}), \dots, N(\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}, V_2)$ .  $\square$

**Remarque 10.**

Soient  $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  deux rationnels réduits, il n'y a pas unicité de suites de rationnels adjacents de premier terme  $\frac{a}{b}$  et de dernier terme  $\frac{c}{d}$ , comme le prouvent les deux exemples:

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$$

**Définition 11.** *Une relation d'ordre sur les suites de premier terme  $\frac{a}{b}$  et de dernier terme  $\frac{c}{d}$*

Soient les deux suites de rationnels adjacents  $\frac{a}{b} = \frac{y_1}{x_1} < \dots < \frac{y_p}{x_p} = \frac{c}{d}$  et  $\frac{a}{b} = \frac{z_1}{t_1} < \dots < \frac{z_q}{t_q} = \frac{c}{d}$ , on dira que la suite  $(\frac{y_n}{x_n})$  est plus fine que la suite  $(\frac{z_m}{t_m})$  lorsque  $\forall i \in \{1, \dots, q\}, \frac{z_i}{t_i} \in \left\{ \frac{y_n}{x_n} \right\}$ .

**Théorème 12.**

Tout cône entier  $N(V_1, V_2)$  est une réunion « disjointe » de cônes entiers parfaits (on comprendra « disjointe » au sens que les intersections deux à deux sont constituées par des génératrices)

**Démonstration.**

Il suffit d'ajouter aux vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  les vecteurs  $W_k$  correspondant aux points intérieurs du parallélogramme  $P(V_1, V_2)$ .  $\square$

Par suite

**Proposition 13.**

Etant donnés deux rationnels réduits tels que  $0 < \frac{y}{x} < \dots < \frac{y'}{x'}$  il existe une (unique) suite de rationnels adjacents de longueur minimale les reliant, c'est la borne inférieure de l'ensemble des suites resserrées concernées.

**Démonstration.**

Voir les Théorèmes 9 et 12.

Pratiquement on opérera comme suit:

Procédure pour déterminer le premier terme de la suite minimale reliant  $\frac{a}{b}$  à  $\frac{c}{d}$

Soit  $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  le Théorème de Bezout nous donne deux entiers positifs  $u$  et  $v$  tels que  $bv - au = 1$ , les autres couples étant  $(u + b\lambda, v + a\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}$ , la fonction  $\lambda \mapsto \frac{v + a\lambda}{u + b\lambda}$  est décroissante donc

on prendra  $\lambda^* = \min \left\{ \lambda \in \mathbb{Z}, \left\{ \begin{array}{l} v + a\lambda > 0 \\ u + b\lambda > 0 \\ \frac{v + a\lambda}{u + b\lambda} \leq \frac{c}{d} \end{array} \right. \right\}$  et  $\frac{a}{b} < \frac{v + a\lambda^*}{u + b\lambda^*} \leq \frac{c}{d}$ .

Si  $\frac{v + a\lambda^*}{u + b\lambda^*} = \frac{c}{d}$  c'est terminé, sinon on applique la procédure à  $0 < \frac{v + a\lambda^*}{u + b\lambda^*} < \frac{c}{d}$ .

L'assurance que cet algorithme s'achève est fournie par les Théorèmes 9 et 12. □

**Remarque 14.**

Chaque cône entier parfait introduit supprime au moins un point intérieur du parallélogramme de base, donc il y aura au plus  $d-1$  cônes entiers parfaits.

d'où

**Théorème 15.** Soient  $V_1$  et  $V_2$  le cône entier  $N(V_1, V_2)$  et  $d = |\det(V_1, V_2)|$   
Le cône entier  $N(V_1, V_2)$  est la réunion d'au plus  $d-1$  cônes parfaits.

**Remarque 16.**

Il s'agit là d'une majoration grossière comme le prouve l'exemple suivant

$$\frac{2}{9} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{9} \text{ alors que } \left| \begin{array}{cc} 2 & 7 \\ 9 & 9 \end{array} \right| = 27.$$

Un dessin fait percevoir que certaines demi-droites « suppriment » plus qu'un point de l'intérieur du parallélogramme de base: la demi-droite engendrée par  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  contient les points  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Une autre formulation consiste en le

**Théorème 17.** (ce serait peut-être Frobenius.02 ?)

Soient  $V_1$  et  $V_2$  il existe un nombre fini de vecteurs  $W_1, \dots, W_p$  tels que  $N(V_1, V_2) = SGr(V_1, W_1, \dots, W_p, V_2)$ .

Le nombre minimal de générateurs nécessaires est égal à la longueur de la suite minimale de rationnels adjacents reliant  $\frac{v_{11}}{v_{21}}$  et  $\frac{v_{12}}{v_{22}}$ .

Il est inférieur ou égal à  $\det(V_1, V_2) - 1$ .

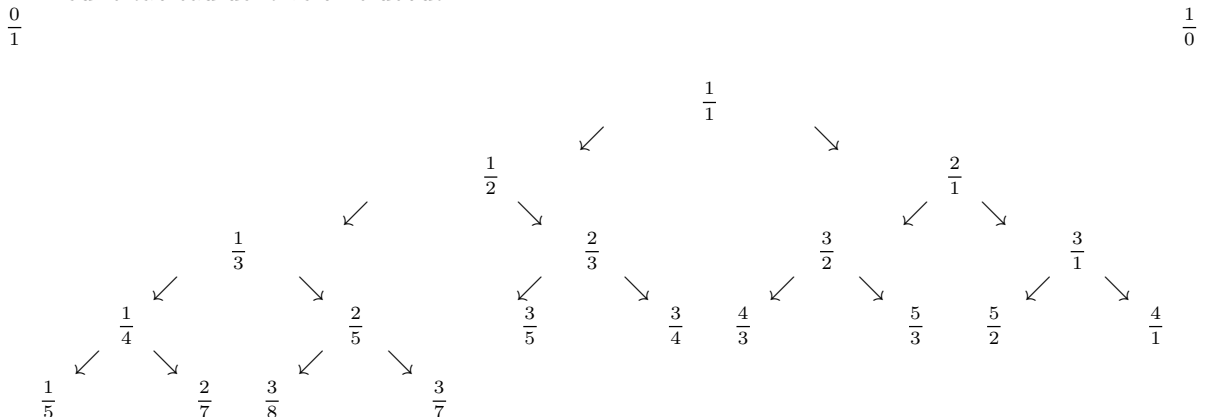
### 3 L'arbre de Stern-Brocot [3,4]

L'arbre de Stern-Brocot est un arbre au sens de l'informatique, construit de la manière suivante:

première ligne deux rationnels  $0/1$  et  $1/0$  (qui figure  $+\infty$ )

puis à chaque nouvelle ligne on insère de nouveaux éléments suivant le principe  $\frac{m}{n} < \frac{m+m'}{n+n'} < \frac{m'}{n'}$  (cette opération sera appelée médiation).

D'où le tableau dont voici le début



On remarquera que dans chaque ligne les rationnels sont rangés dans un ordre croissant et même que si on lit de gauche à droite de manière globale (en confondant les lignes):  $0, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2 \dots$  on a encore une suite croissante.

De même deux rationnels qui se suivent « globalement » (par exemple  $3/2$  et  $5/3$ ) sont adjacents; on remarque aussi que les deux parents ( $m/n$  et  $m'/n'$ ) du rationnel  $(m+m')/(n+n')$  l'encadrent et on peut vérifier et démontrer que les parents sont des rationnels adjacents à leur enfant.

(tous ces résultats se démontrant par des récurrences élémentaires).

**Proposition 18.** *Parents et adjacents*

Soit un rationnel  $a/b$  et ses deux parents  $m/n < m'/n'$

- 1)  $m/n$  est le plus petit des rationnels adjacents à  $a/b$  et  $m'/n'$  est le plus grand
- 2)  $a/b$  est le plus grand des rationnels adjacents à  $m/n$

**Démonstration.**

1) Pour déterminer les rationnels adjacents à  $a/b$  on part d'un premier couple  $(u, v) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $bu - av = 1$ ; le plus petit  $u > 0$  « correspond » à l'inverse de  $b$  dans  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  et donc  $0 < u < a$  et on déduit de l'égalité  $bu = av + 1$  que  $0 < v < b$ .

D'autre part nous savons que l'ensemble des rationnels adjacents à  $a/b$  qui lui sont supérieurs est inclus dans  $\left\{ \frac{u+ta}{v+tb}, t \in \mathbb{Z} \right\}$ ; une simple étude de la fonction  $f: t \rightarrow \frac{u+ta}{v+tb}$  (restreinte à  $\mathbb{Z}$ ) permet de conclure:

$$-\infty \quad -1 \quad -v/b \quad 0 \quad +\infty$$

$$f(t) \quad \frac{a}{b} \quad \searrow \quad \frac{u-a}{v-b} \quad \emptyset \quad \frac{u}{v} \quad \searrow \quad \frac{a}{b}$$

Il suffit de remarquer que  $u/v$  est le seul rationnel adjacent à  $a/b$ , supérieur à  $a/b$  et dont le dénominateur est inférieur à  $b$ , par suite c'est lui le parent de droite de  $a/b$ ; il s'ensuit que le parent de gauche est  $\frac{u-a}{v-b}$ .

Le 2) se démontre de la même manière. □

**Avertissement 19.**

Ceci ne signifie pas que si  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{u}{v}$  les rationnels  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{x}{y}$  sont adjacents;  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{1}$  sont adjacents mais pas  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{3}{5}$ .

**Définition 20.** *Descendance d'un couple de rationnels immédiatement voisins dans l'arbre*

Soient deux rationnels  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  immédiatement voisins ( ce qui signifie qu'ils sont reliés par une arête) on appellera descendance de ce couple l'ensemble des rationnels obtenus par médiations successives; on désignera cet ensemble par  $D\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ .

**Proposition 21.**

Soient deux rationnels  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  immédiatement voisins, alors quel que soit  $\frac{x}{y} \in D\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$

i)  $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$

ii)  $\left| \frac{x}{y} \frac{c}{d} \right| = \left| \frac{a}{b} \frac{c}{d} \right| = -1$ .

La démonstration est immédiate

**Définition 22.** *Ancêtre, Premier ancêtre (droit, gauche)*

Soit un rationnel  $\frac{a}{b}$  on appelle ancêtre de  $\frac{a}{b}$  tout rationnel  $\frac{c}{d}$  de l'arbre tel que  $\frac{a}{b}$  est un descendant de  $\frac{c}{d}$ .

On appelle premier ancêtre droit le plus petit (au sens de  $<$ ) des ancêtres de  $\frac{a}{b}$ .

On appelle premier ancêtre gauche le plus grand (au sens de  $<$ ) des ancêtres de  $\frac{a}{b}$ .

**Proposition 23.**

Soit un rationnel  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{a'}{b'}$  son premier ancêtre droit et  $\frac{a''}{b''}$  son premier ancêtre droit alors  $\left| \frac{a}{b} \frac{a'}{b'} \right| = -1$  et  $\left| \frac{a}{b} \frac{a''}{b''} \right| = +1$ .

La démonstration découle de la proposition 21.

**Définition 24.** Une relation d'ordre (partiel) sur les sommets du graphe

Soient deux rationnels  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{c}{d}$  on dira que  $\frac{a}{b}$  domine  $\frac{c}{d}$  s'il existe un chemin de  $\frac{a}{b}$  vers  $\frac{c}{d}$  qui suit des arêtes **orientées** du graphe.

$\frac{1}{1}$  est le maximum (au sens de la domination),  $\frac{5}{3}$  domine  $\frac{7}{4}$  et  $\frac{3}{2}$  est la borne supérieure de la paire  $\left\{ \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right\}$ .

**Définition 25.** Codage des rationnels dans l'arbre de Stern-Brocot

Soit un rationnel  $\frac{a}{b}$  on lui associe la suite de symboles  $G$  et  $D$  qui représentent les mouvements vers la gauche, respectivement vers la droite, pour aller de  $\frac{1}{1}$  à  $\frac{a}{b}$  en suivant les arêtes **orientées** de l'arbre.

Il est immédiat qu'il y a une bijection entre l'ensemble des rationnels strictement positifs et l'ensemble des suites finies de la forme  $G^{g_1} D^{d_1} G^{g_2} \dots D^{d_p}$  (le premier exposant et/ou le dernier pouvant être nul suivant la nature du premier et du dernier mouvement).

Avec cette dernière convention nous pouvons associer à chacune de ces suites finies la liste  $[g_1, d_1, \dots, d_p]$  et ceci sera encore bijectif.

**Lemme 26.**

Soient deux rationnels  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{a'}{b'}$ , les listes associées  $L = [g_1, d_1, \dots, d_p]$  et  $L' = [g'_1, d'_1, \dots, d'_q]$ ; ils admettent  $\frac{c}{d}$  comme borne supérieure (au sens de la domination) si et seulement si il existe  $k$  tel que  $\forall i \in [1, \dots, k]$   $L[i] = L'[i]$  et  $L[k] \neq L'[k]$

La liste associée à  $\frac{c}{d}$  est  $[L[1], L[2], \dots, L[k]]$

**Remarque 27.** Codage d'un rationnel  $\frac{a}{b}$  relatif à un rationnel  $\frac{c}{d}$  qui le domine

On peut aussi définir le codage de  $\frac{a}{b}$  relatif à un rationnel  $\frac{c}{d}$  qui le domine; celui-ci représentera seulement les mouvements sur le graphe orienté pour aller de  $\frac{c}{d}$  vers  $\frac{a}{b}$ ; ce sera le codage de  $\frac{a}{b}$  dans lequel on aura supprimé la partie initiale correspondant à  $\frac{c}{d}$ .

**Théorème 28.** La longueur de la suite minimale reliant deux rationnels  $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$

Soit le codage  $G^{g_1} D^{d_1} G^{g_2} \dots D^{d_p}$  (resp.  $G^{g'_1} D^{d'_1} G^{g'_2} \dots D^{d'_q}$ ) de  $\frac{a}{b}$  (resp.  $\frac{a'}{b'}$ ) relatif à leur borne supérieure; la longueur de la suite minimale de rationnels adjacents qui relie  $\frac{a}{b}$  à  $\frac{a'}{b'}$  est égale à  $\sum_{i=1}^p g_i + \sum_{j=1}^q d'_j$ .

**Démonstration.**

Une suite de rationnels adjacents reliant  $\frac{a}{b}$  à  $\frac{a'}{b'}$  correspond à une suite de mouvements (dans le plan) vers la droite

La suite minimale correspond (propositions 18, 21, 23) à une suite de mouvements (tant que c'est possible) allant d'un rationnel à son premier ancêtre droit tant que celui-ci reste inférieur ou égal à  $\frac{a'}{b'}$  puis une redescente dans l'arbre en allant d'un rationnel à son fils de droite; le dernier parent de droite à considérer acceptable est donc le premier sommet qui domine  $\frac{a}{b}$  et  $\frac{a'}{b'}$ , c'est à dire leur borne supérieure.

Dans la redescente on suivra le fils droit tant qu'il est inférieur ou égal à  $\frac{a'}{b'}$  puis lorsqu'on est bloqué par le premier fils droit qui dépasse  $\frac{a'}{b'}$  on rejoindra directement  $\frac{a'}{b'}$ .

Pour remonter de  $\frac{a}{b}$  à la borne supérieure il faut reproduire à l'envers les  $\sum_{i=1}^p g_i$  mouvements vers la gauche, pour redescendre vers  $\frac{a'}{b'}$  il faut effectuer les  $\sum_{j=1}^q d'_j$  mouvements vers la droite.  $\square$

**Exemple 29.**  $2/9 \rightarrow 1/5 \rightarrow 1/4 \rightarrow 1/3 \rightarrow 1/2$  (mais pas vers 1 car  $7/9 > 1$ )  $\rightarrow 2/3 \rightarrow 3/4$  (ici on refuse  $4/5$ )  $\rightarrow 7/9$

## 4 Conclusion

Nous avons établi le nombre minimal de générateurs à ajouter afin d'engendrer tout le cône entier  $C(N_1, N_2)$ .

Bibliographie:

- [1] O. Debarre, Polytopes et points entiers, R.M.S. 126 année, n°1, P.37-57.
- [2] P. Teller, Version vectorielle des bases standard, [www.lalgebrisant.fr](http://www.lalgebrisant.fr)
- [3] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Mathématiques Concrètes, Thomson Publishing, 1998.
- [4] [http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/autour\\_de\\_larbre\\_de\\_stern\\_brocot/](http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/autour_de_larbre_de_stern_brocot/)

Nîmes-Paris Janvier 2017.