Probable, peut-être pas prouvable

PAR PATRICK TELLER

Septembre 2021

Définition 1. *L'application f*

On note f l'application qui à tout entier x>1 associe la somme de ses diviseurs strictement supérieurs à 1; ainsi f(5)=5, f(6)=11, etc...il est immédiat que x premier <=>f(x)=x.

(traditionnellement on désigne par σ(x) la somme des diviseurs de l'entier x, et ainsi f(t)=$\sigma(t)$-1)

On notera $f^{\circ n}$ la composée n fois de f par f; ainsi $f^{\circ 3}(12)$=$f^{\circ 2}(39) = f(55) = 67$.

Pour tout entier x>1 on considérera le système dynamique associé $\begin{cases} U_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

Théorème 2. *(ou plutot conjecture)*

Quel que soit l'entier x>1 il existe un entier p tel que $f^{\circ p}$(x) est premier, ou, ce qui revient au même, tel que $f^{\circ p}$(x)=$f^{\circ (p+1)}$(x).

J'ai pu vérifier empiriquement jusqu'à $x = 2000000$ que, quel que soit x, la suite ainsi construite atteint « en un temps fini » (sic !) un point fixe, c'est à dire un nombre premier; des étudiants de l'EFREI ont fait la même constatation jusqu'à x=300000000; d'où la conjecture ci-dessus.

1 Exemples

```
Maxima 5.37.2 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) conject(a,n):=block([b,k,L],b:a,L:[],for k:1 thru n do (b:divsum(b)-1,
      L:endcons(factor(b),L)),return(L))$
(%i2) conject(45,15);
```

(%o2) [7 11, 5 19, 7 17, 11 13, 167, 167, 167, 167, 167, 167, 167, 167, 167, 167, 167]

```
(%i2) conject(1234567,100);
```

(%o2) [3 5 23 3607, 2078207]

```
(%i4) conject(701823,100);
```

(%o4) [7 37 3613, 5 219731, 19 69389, 7 198257, 19 83477, 29 57571, 7 137 1801, 7 284201, 5 454723, 19 37 3881, 41 227 317, 59 51613, 17 182167, 11 298093, 41 43 2029, 61 89 691, 883 4373, 5 53 14591, 7 43 113 139, 1031 5449, 11 17 19 1583, 59 115981, 11 632629, 31 244889, 7 701 1597, 41 218887, 5 1838659, 269 41011, 17 41 15887, 61 196907, 5 11^2 17 1187, 47 67 5419, 163 108533, 5^2 711983, 241 91583, 151 146777, 5 11 405641, 47 109 5701, 7 4300937, 13 439 6029, 743 49993, 5 13 572239, 2293 20963, 5 43 223681, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 5905\
2047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 5905\
2047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 59052047, 5905\
2047, 59052047]

```
(%i5)
```

On remarquera que le processus est souvent très rapide, le record en nombre d'itérations (pour les entiers inférieurs à 1000000) est atteint pour $U_0 = 701823$ qui exige 46 itérations pour atteindre le nombre premier 59052047.

Remarque 3.
La conjecture a reçu des « preuves » heuristiques, tant sur le site Mathoverflow que par courriers personnels ; ces « preuves » sont probabilistes, ce qui s'explique par la difficulté du problème qui mêle des aspects multiplicatifs et additifs (Courrier de Michel Mendes-France).

L'ouvrage Unsolved Problems in Number Theory [1] précise que Erdös s'est intéressé à la fonction f et à ses itérations sans aboutir.

Nous allons d'abord étudier la plausibilité de la conjecture: au lieu de considérer explicitement la relation $U_{n+1} = f(U_n)$ nous ne retiendrons que la propriété suivante, établie par Robin

$1 < U_n < \mathrm{U}_{n+1} \leqslant e^{\gamma} U_n \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(U_n))$ [3].

2 Les nombres premiers contenus dans un intervalle

On utilisera la notation classique $\pi(x)$ pour désigner le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.

Dans sa Thèse [1] Pierre Dusard établit les inégalités suivantes

i) $\pi(x) \geqslant \frac{x}{\ln(x)}\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)$ pour x>32999

ii) $\pi(x) \leqslant \frac{x}{\ln(x)}\left(1 + \frac{1}{\ln(x)} + \frac{2.51}{\ln(x)}\right)$ pour x>355991; nous allons en déduire une minoration du nombre de premiers dans un intervalle [x,y].

Lemme 4.
La fonction $g{:}t \longrightarrow \frac{t}{\ln(t)}$ *est croissante et concave sur* $[3, +\infty[$

La fonction $h{:}t \longrightarrow \frac{t}{\ln(t)^2}$ *est croissante et concave sur* $[3, +\infty[$

Démonstration.
$\forall t > e$

$g'(t) = \frac{\ln(t) - 1}{\ln(t)^2} = ln(t)^{-1} - \ln(t)^{-2} > 0,, g''(t) = -t^{-1}\ln(t)^{-2} + 2t^{-1}\ln(t)^{-3} < 0$

$h'(t) = \frac{\ln(t)^2 - 2\ln(t)}{\ln(t)^4} = ln(t)^{-2} - 2\ln(t)^{-3} > 0, h''(t) = -2t^{-1}\ln(t)^{-3} + 6t^{-1}\ln(t)^{-4} < 0$

□

Proposition 5. *Une minoration de* $\frac{\pi(y) - \pi(x)}{y\text{-}x}$

Démonstration.

Soit x<y assez grands $0 > \pi(y) - \pi(x) > \frac{y}{\ln(y)} - \frac{x}{\ln(x)} + \frac{y}{\ln(y)^2} - \frac{x}{\ln(x)^2} - \frac{2.51}{\ln(x)^3}$;

D'après le lemme

$\frac{y}{\ln(y)} - \frac{x}{\ln(x)} > (y-x)g'(y) = (y-x)\left(\frac{1}{\ln(y)} - \frac{1}{\ln(y)^2}\right)$ □

$\frac{y}{\ln(y)^2} - \frac{x}{\ln(x)^2} > (y-x)h'(y) = (y-x)\left(\frac{1}{\ln(y)^2} - \frac{2}{\ln(y)^3}\right)$

donc $\frac{\pi(y) - \pi(x)}{y\text{-}x} > \left(\frac{1}{\ln(y)} - \frac{1}{\ln(y)^2}\right) + \left(\frac{1}{\ln(y)^2} - \frac{2}{\ln(y)^3}\right) - \frac{2.51}{(y-x)\ln(x)^3} = \frac{1}{\ln(y)} - \frac{1}{\ln(y)^3} - \frac{2.51}{(y-x)\ln(x)^3}$.

Dans le cas particulier où y=x+Kxln(ln(x)) on peut donc écrire

$\frac{\pi(y) - \pi(x)}{y\text{-}x} > \frac{1}{\ln(y)} - \frac{1}{\ln(y)^3} - \frac{2.51}{\mathrm{Kx}\ln(\ln(x))\ln(x)^3}$

3 Étude de la série de terme général $\frac{1}{\ln(U_n)}$

Soit un entier naturel x, on suppose que la suite récurrente définie par $\begin{cases} U_0 = x \\ \forall n, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ ne contient aucun nombre premier.

Selon le Théorème de Robin on sait alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n < \mathrm{U}_{n+1} \leqslant e^{\gamma} U_n \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(U_n))$.

Théorème 6.

Si (Un) est une suite d'entiers strictement supérieurs à 1 telle que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < U_n < U_{n+1} \leqslant e^{\gamma} U_n \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(U_n))$, *la série de terme général* $\frac{1}{\ln(U_n)}$ *diverge.*

Démonstration.

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ln}(u_k) < Ln(u_{k+1}) \leqslant \gamma + \mathrm{Ln}(u_k) + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(u_k)))$, *par suite* $\frac{1}{\mathrm{Ln}(u_{k+1})} \geqslant \frac{1}{\mathrm{Ln}(u_k)} \times \frac{1}{1 + \gamma / \mathrm{Ln}(u_k) + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(u_k))) / \mathrm{Ln}(u_k)}$.

Posons $t_k = 1/Ln(u_k)$, *on a donc* $t_{k+1} \geqslant t_k \times \frac{1}{1 + \gamma t_k + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k}$.

Par la suite nous ne préciserons plus que les séries condidérées sont à termes positifs.

On en déduit d'abord $0 \leqslant Ln(1/t_{k+1}) - Ln(1/t_k) \leqslant \mathrm{Ln}(1 + \gamma t_k + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k)$; *or la série de tg* $Ln(1/t_{k+1}) - Ln(1/t_k)$ *est divergente donc la série de tg* $\mathrm{Ln}(1 + \gamma t_k + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k)$ *aussi.*

Remarquons que (t_k) *et* $(\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k)$ *tendent vers 0 et* $(t_k) = o(\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k)$, *d'où* $\mathrm{Ln}(1 + \gamma t_k + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k) \sim \gamma t_k + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k \sim \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k$ *d'où la divergence de la série de tg* $\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k$.

On peut aussi comparer $\mathrm{Ln}(1 + \gamma t_k + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k) \leqslant \gamma t_k + \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k \leqslant 2\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k$

De ce qui précède on déduit par sommation des relations de comparaison $Ln(1/t_n) < \mathrm{Ln}(1/t_{n+1}) = O(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k)$. *(*)*

Appliquons la transformation d'Abel pour obtenir $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_k)) t_k = \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_n)) \sum_{k=1}^{n} t_k - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{Ln}(1/t_{k+1})}{\mathrm{Ln}(1/t_k)}\right) \sum_{i=1}^{k} t_i \right\}$.

Or $t_{k+1} < t_k < 1$ *d'où* $\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \mathrm{Ln}\left(\frac{\mathrm{Ln}(1/t_{k+1})}{\mathrm{Ln}(1/t_k)}\right) \sum_{i=1}^{k} t_i \right\} > 0$ *d'où on déduit de (*) la relation*

$\mathrm{Ln}(1/t_n) = O(\mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}(1/t_n)) \sum_{k=1}^{n} t_k)$, *qui, compte tenu de la négligeabilité de* $\mathrm{Ln}(x)$ *devant x en* $+\infty$, *impose la divergence de la série de tg* t_k.

Donc la série de terme général $\frac{1}{\ln(U_k)}$ *diverge.* □

Proposition 7. *Sous les hypothèses du Théorème précédent la série de terme général* $V_{k+1} = \frac{1}{\ln(U_{k+1})} - \frac{1}{\ln(U_{k+1})^3} - \frac{2.51}{e^{\gamma}\mathrm{Uk}\ln(\ln(U_k))\ln(\mathrm{Uk})^3}$ *diverge*

Démonstration.

D'une part $\forall k, U_{k+1} > 2U_k$ *donc la série de terme général* $\frac{2.51}{e^{\gamma}\mathrm{Uk}\ln(\ln(U_k))\ln(\mathrm{Uk})^3}$ *converge, d'autre part la série de terme général* $\frac{1}{\ln(U_{k+1})}$ *diverge et* $\frac{1}{\ln(U_{k+1})^3} = o\left(\frac{1}{\ln(U_{k+1})}\right)$ *donc la série de terme général* $\frac{1}{\ln(U_{k+1})} - \frac{1}{\ln(U_{k+1})^3}$ *diverge d'où le résultat annoncé.* □

4 Suites de Robin

Définition 8. *Suite de Robin*

Une suite (U_n) $n \in N$ *d'entiers naturels strictement supérieurs à 1 sera dite de Robin lorsque, quel que soit n, si* U_n *est premier* $U_{n+1} = U_n$ *et si* U_n *n'est pas premier* U_{n+1} *suit une loi uniforme sur l'intervalle* $[U_n, U_n + K U_n ln(ln(U_n))]$*, où K est un réel (strictement positif) fixé.*

Théorème 9.

Soit une suite de Robin la probabilité qu'elle soit stationnaire est égale à 1.

Démonstration.

On considère l'entier x et la suite de Robin de premier terme U_0.

Si U_n n'est pas premier U_{n+1} suit une loi uniforme sur l'intervalle $[U_n, U_n + U_n \ln(\ln(U_n))K]]$

Si U_n n'est pas premier la probabilité que U_{n+1} ne soit pas premier est inférieure à 1-V_{n+1}, par suite la probabilité que U_0,U_1, ..., U_{n+1} ne soient pas premiers est inférieure ou égale à $\prod_{k=0\ldots n} (1 - V_{k+1})$.

Or la suite $\prod_{k=0\ldots n} (1 - V_{k+1})$ tend vers 0 si et seulement la série (à termes positifs pour n assez grand) de terme général V_{n+1} diverge, ce qui a été établi par le Théorème 6.

D'où la suite $\prod_{k=0\ldots n} (1 - V_{n+1})$ tend vers 0, ce qui entraîne que la probabilité de l'évènement $\cap(U_n \notin \mathcal{P})$ est égale à 0.

D'où le résultat.

□

Ce qui constitue un preuve probabiliste de la conjecture; nous dirons qu'elle est « probable ».

Mais à ce jour elle n'a pas été démontrée, on ne sait pas si elle est « prouvable ».

Et le fait est qu'il existe des suites de Robin qui ne prennent aucune valeur dans $\mathcal{P}$.

Par exemple si on définit une suite (U_n) comme suit $\begin{cases} U_0 = x \\ \forall n, \begin{cases} \text{si} \quad U_n \in \mathcal{P} \quad U_{n+1} = U_n \\ \text{sinon}\, U_{n+1} = \sigma(U_n) + 1 \end{cases} \end{cases}$ elle est aussi de Robin donc quel que soit x son caractère stationnaire est probable mais dans le cas x=4 on voit facilement que $\forall n, U_n = 2^{n+2}$ et cette suite n'est pas stationnaire.

Bibliographie:

[1] Richard K.Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Problem Books in Mathematics Springer, 2000; spécialement pp. 149.

[2] Pierre Dusard, Autour de la fonction qui compte le nombre de premiers, Thèse de Doctorat, Mai 1998, peut être trouvée à https://www.researchgate.net/publication/245578016_Autour_de_la_fonction_qui_compte_le_nombre_de_nombres_premiers

[3] *Robin Guy (1984), "Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Neuvième Série,* ***63*** *(2): 187–213, ISSN 0021-7824, MR 0774171*

Nimes-Paris septembre 2021