Une propriété qui ne caractérise pas les matrices cycliques

PAR PATRICK TELLER, JUIN 2021

Proposition 1.

Soient une matrice compagnon $M=\begin{pmatrix} 0 & \dots & & & & -m_0 \\ 1 & \dots & & & & -m_1 \\ 0 & 1 & & & & \dots \\ . & 0 & . & & & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & & -m_{n-2} \\ & & \dots & 0 & 1 & -m_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et un polynôme* $P(X)=X^r+\sum_{i=0}^{r-1} p_i X^i$ *qui divise le polynôme minimal de M, noté* $\pi_M(X)$*.*

Le rang de P(M) est égal à n-degré de $P(X)$*.*

Le résultat reste vrai lorsque M est seulement cyclique

Démonstration.

Comme M est une matrice compagnon, si on note P(M)=$(M_1,\dots,M_n)$ alors pour tout entier k tel que 0<k<n $\quad$ $M_{k+1}=\mathbb{M}M_k$.

Il est immédiat que $M_1=\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_{r-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, $M_2=\mathbb{M}M_1=\begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_{r-1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots 0 \end{pmatrix}$,…., jusqu'à $M_{n-r}=\begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ \dots \\ p_{r-1} \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice $(M_1,\dots,M_{n-r})$ est échelonnée par suite les colonnes $M_1,\dots,M_{n-r}$ sont linéairement indépendantes.

Nous allons montrer par récurrence que les colonnes $M_{n-r+1},\dots,M_n$ sont des combinaisons linéaires des colonnes $M_1,\dots,M_{n-r}$.

Soit Q(X)=$X^{n-r}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_j X^j$ tel que P(X)Q(X)=$\pi_M(X)$ et, par suite, P(M)Q(M)=0, d'où pour tout entier k tel que 1<k$\leqslant n$ Q(M)P(M)(e_k)=$\pi_M(M)(e_k)$=0, où $(e_1,\dots,e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Or P(M)(e_1)=M_1 donc $(M^{n-r}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_j M^j)M_1=0$, d'où $M_{n-r+1}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_j M_{j+1}=0$, d'où $M_{n-r+1}\in\mathrm{Vect}(M_1,\dots,M_{n-r})$.

Si on suppose que $M_{n-r+1},\dots,M_{n-r+k}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(M_1,\dots,M_{n-r})$ alors, comme Q(M)P(M)(e_{k+1})=0 et P(M)(e_{k+1})=M_{k+1}, $(M^{n-r}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_j M^j)M_{k+1}=0$, d'où $M_{n-r+k+1}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_j M_{j+k+1}=0$, c'est- à-dire $M_{n-r+k+1}\in\mathrm{Vect}(M_1,\dots,M_{n-r+k})$, qui est égal par hypothèse à $\mathrm{Vect}(M_1,\dots,M_{n-r})$.

Par suite le rang de P(M) est égal à n-r.

Toute matrice cyclique étant semblable à une matrice compagnon on en déduit le même résultat pour le rang de P(M'), lorsque M' est une matrice cyclique.

□

La réciproque de ce résultat est fausse.

Si A est une matrice on désignera par $\pi_A(X)$ son polynôme minimal.

Proposition 2.

Soit une matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *où* $A \in \mathcal{M}_r(K)$,$B \in \mathcal{M}_{r,p}(K)$,$C \in \mathcal{M}_r(K)$ *si le rang(*$\pi_A(M)$*)=n-r alors*

i) A est cyclique

ii) Les spectres de A et de C sont disjoints.

Soit $\pi_A(X) = \prod_{k=1}^{t} (X - \mu_k I)^{m_k}$ le polynôme minimal de la matrice A.

Si M$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet comme décomposition de Jordan $\oplus_{i=1}^{p}(\oplus_{j=1}^{q_i} J(\lambda_i, r(i,j)))$, son rang est égal à la somme des rangs des blocs $J(\lambda_i, r(i,j))$, ceux-ci étant chacun inversibles sauf ceux qui sont associés à la valeur propre 0, le rang de J(0,p) étant égal à p-1.

Nous étudierons plutôt le défaut de M c'est à dire la dimension du noyau, le défaut de M étant égal au nombre de blocs de Jordan associés à la valeur propre 0.

On vérifiera aisément que le défaut de J(0,p)^t sera égal à t tant que t<p et sera égal à p dès que $t \geqslant p$.

Quel que soit λ la matrice M-λI a pour décomposition $\oplus_{i=1}^{p}(\oplus_{j=1}^{q(i)} J(\lambda_i - \lambda, r(i,j))$ et, comme les diverses matrices M-μ_kI ont la même décomposition en blocs, $\prod_{k=1}^{t} (M - \mu_k I)^{m_k} = \oplus_{i=1}^{p}(\oplus_{j=1}^{q_i} \prod_{k=1}^{t} (J(\lambda_i - \mu_k, r(i,j))^{m_k})$.

Par suite, comme d'une part le défaut de $\prod_{k=1}^{t} J(\lambda_i - \mu_k, r(i,j))^{m_k}$ est égal à min(r(i,j), mk), et d'autre part $M - \mu_k I$ est inversible lorsque μ_k n'appartient pas au spectre de M, on pourra se limiter à ne considérer que les valeurs propres communes à A et à M c'est à dire celles de A.

Le défaut de $\pi_A(M)$ est égal à $\sum_{\lambda \in \text{spectre}(A)} \left(\sum_{j=1}^{q(\lambda)} \min\left(r(\lambda, j), m(\lambda)\right) \right)$, où m($\lambda$) est la taille du plus grand bloc de Jordan associé à λ dans la décomposition de A et (r(λ, j))$_{j=1\ldots q(\lambda)}$ sont les tailles des blocs de Jordan associés à λ dans la décomposition de M.

Or comme M=$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ pour chaque λ appartenant au spectre de A il existe j tel que r(λ, j)$\geqslant$m(λ) donc le défaut de $\pi_A(M)$ est supérieur ou égal à $\sum_{\lambda \in \text{spectre}(A)} m(\lambda) = \text{degré de } \pi_A(X)$ et il est égal au degré de $\pi_A(X)$ si et seulement si, pour chaque valeur propre de A, M ne possède qu'un seul bloc de Jordan.

Bien entendu cela entraîne que A ne possède qu'un seul bloc de Jordan par valeur propre, donc que A est cyclique et $\pi_A(X) = \chi_A(X)$ et que les valeurs propres de C ne doivent pas appartenir à Spec(A); il n'y a aucune autre contrainte sur les valeurs propres de C.

Exemple 3.

```
Maxima 5.43.2 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

```
(%i1) m:matrix([0,1,2,0,1],[0,0,0,1,1],[0,0,5,0,1],[0,0,0,5,0],[0,0,0,0,0]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
(%i2) load(diag);
```

(%o2) /usr/share/maxima/5.43.2/share/contrib/diag.mac

```
(%i2) m^^2;
```

(%o3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
(%i2) jordan(m);
```

(%o4) $[[0,3],[5,1,1]]$

```
(%i5)
```

m n'est pas cyclique parce qu'elle possède 2 blocs de valeur propre 5 mais la dimension de Ker(m) est égale à 2 , degré du polynome minimal de $a=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d'où la Conclusion:

La propriété selon laquelle si P(X) divise le polynôme minimal d'une matrice M$\in\mathcal{M}_n(K)$ alors le rang de P(M)=n - degré (P) n'est pas une propriété caractéristique des matrices cycliques.

Définition 4. *Matrice quasi-cyclique*

Une matrice $M\in\mathcal{M}_n(K)$ sera dite quasi-cyclique lorsque $M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, A est cyclique et spectre(A)$\cap$spectre$(C)=\varnothing$; alors rang($\pi_A(M)$)=n-degré de $\pi_A(X)$

Mi-juin 2021