CONTRIBUTION AU PROBLÈME DE GERSTENHABER POUR TROIS MATRICES

PATRICK TELLER 01 JUILLET 2021

Résumé.

Aujourd'hui c'est décidé, je mets fin à cette quête.

J'étais en quête, avec des pauses et des périodes de tension, depuis des mois; j'avais le rêve insensé de résoudre le problème de Gerstenhaber pour trois matrices, et en plus avec des moyens (assez) élémentaires: un peu, très peu, de Géométrie Algébrique, une grosse dose d'Algèbre Linéaire, et ... une certaine connnaissance sur un type de matrices, ignoré en général: les matrices fractales.

Les matrices fractales représetent d'abord un été, où j'ai découvert, involontairement, que l'ensemble des matrices qui commutent avec une matrice donnée est simultanément trigonalisable par blocs, au moyen, de plus d'une simple permutation des vecteurs de la base canonique.

Puis j'ai découvert le livre de K. O'Meara, ..., qui en décrivant les matrices de Weyr, « concurrentes » de celles de Jordan, fournit l'explication de cette trigonalisation inconnue...

Comme le problème de Gerstenhaber concerne k matrices commutantes l'idée était tentante de recourir aux matrices de Weyr et à leur commutant, les matrices fractales.

Le problème de Gerstenhaber pose la question suivante: est-ce que la dimension de l'algèbre commutative engendrée par k matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inférieure ou égal à n ?

Il a été répondu affirmativement pour k=2, négativement pour k>3, et il reste ouvert pour k=3.

La méthode le plus souvent employée consiste à étudier la variété des k-uplets de matrices commutantes et ses propriétés; je n'ajouterai rien au panorama décrit par Sethuraman, si ce n'est que c'est de ce côté que le problème a eu ses premières réponses , mais aussi les plus récentes.

Il faut aussi citer les articles plus élémentaires qui ont rendu plus concret le résultat pour k=2:

De leur côté K. O'Meara et Hollbrock ont fait le pari de la réponse négative en cherchant à l'aide Matlab, jusqu'à maintenant sans succès, un contre-exemple pour k=3.

Quant à moi je suis parvenu aux résultats suivants:

Lorsque A et B sont deux matrices fractales commutantes, si la matrice B est à diagonale cyclique ou si B appartient à un ouvert dense dans F (les « matrices commodes ») la dimension de $\mathbb{C}[W, A, B]$ est inférieure ou égale à n.

(première mise en ligne 07/2019), dernière version 01/06/2021

,

1. Matrices de Weyr

On trouvera ici un rappel des définitions et résultats élémentaires concernant les matrices de Weyr; les constructions et démonstrations peuvent être trouvées dans l'article d'Helen Shapiro [10] et le livre de Kevin O' Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter [5].

Définition 1. *Composition d'un entier*

Soit un entier n>0 on appelle composition de n toute suite $(p_1, p_2, ...p_k)$ d'entiers strictement positifs telle que $p_1 + p_2 + ... + p_k = n$.

Définition 2. La matrice de Weyr associée à une composition (décroissante au sens large) (z_1,..,z_{t_1}) de n.

Soit la matrice définie par blocs comme suit:

W=$(W_{i,j})$ *où le bloc* $W_{i,j}$ *appartient à* $\mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{C})$; $\forall i \in \{1, ..., t_1 - 1\}$ $W_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(K)$ *et, si* $j \neq i+1$, $W_{i,j} = 0$; *d'où*

W=$\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & ... & & ...0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & ... & & .... \\ ... & ... & ... & ... & .... & & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & & W_{z_{t_1-1},,z_{t_1}} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & & 0 \end{pmatrix}$. *W est appelée la matrice de Weyr associée à la composition* (z_1,..,z_{t_1}).

Théorème 3.

Toute matrice nilpotente $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est semblable à une unique matrice de Weyr nilpotente W.*

Théorème 4.

Toute matrice M$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable (de manière unique, à l'ordre près) à une matrice en blocs de Weyr

$\begin{pmatrix} \lambda_1 I + W_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \lambda_2 I + W_2 & & .... \\ .... & 0 & .... & 0 \\ 0 & .... & 0 & \lambda_r I + W_r \end{pmatrix}$, où les W_i sont des matrices de Weyr nilpotentes.

L'intérêt des matrices de Weyr par rapport aux matrices de Jordan est que la manipulation des matrices du commutant d'une matrice de Weyr est plus aisée, comme le prouve le Théorème suivant.

Théorème 5. Le commutant de la matrice de Weyr nilpotente *W*(z_1,..,z_{t_1})

Soit W=$(W_{i,j})$ *une matrice de Weyr nilpotente et une matrice A décrite par blocs comme suit* A=$(A_{i,j})$,

AW=WA si et seulement si pour tout (i,j) $A_{i+1,j+1} = {}^tW_{i,i+1}A_{i,j}W_{j,j+1}$.
Cette condition peut s'écrire
1. $\forall (i,j),\ i > j \Longrightarrow A_{i,j} = 0$
2. $\forall (i,j), i \leqslant j \Longrightarrow A_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$
Une telle matrice sera dite ***fractale*** *de composition* $(z_1,..,z_{t_1})$.

Définition 6. *(quelques) Soit* $A = (A_{i,j})$ *une matrice fractale*

i) On appellera bande supérieure la matrice $(A_{1,1}, A_{1,2}, ..., A_{1,t_1})$*; une matrice fractale est déterminée par sa bande supérieure.*

ii) On appellera bloc directeur le bloc $A_{1,1}$.

iii) On désignera par $F(z_1,..,z_{t_1})$ *l'ensemble des matrices fractales de composition* $(z_1,..,z_{t_1})$ *ou simplement F lorsqu'il ne peut y avoir d'ambiguité sur la composition.*

Par ailleurs W désignera la matrice de Weyr nilpotente $W(z_1,..,z_{t_1})$.

Lemme 7. *(extension du Théorème 4)*

Soit une matrice fractale M alors $\forall (j,k) \in \{1, ..., n\},\ j \leqslant k \Longrightarrow M_{j,k} = {}^t(\prod_{u=1}^{j-1} W_{u,u+1}) M_{1,k-j+1} \prod_{u=k-j+1}^{k-1} W_{u,u+1}$.

Si on désigne par $Z_{p,q}$ *le produit* $\prod_{u=p}^{q-1} W_{u,u+1}$ *la formule devient* $M_{j,k} = {}^tZ_{1,j} M_{1,k-j+1} Z_{k-j+1,k}$

Démonstration.

Découle directement du Théorème 4. □

On trouvera ci-dessous un exemple de matrice fractale associée à la composition (5,3,2,1).

$$M = \begin{pmatrix} a & b & d & p & u & g & i & z & l & \mathrm{dd} & A \\ 0 & c & e & q & v & h & j & \mathrm{zz} & m & \mathrm{ee} & B \\ 0 & 0 & f & r & w & 0 & k & \mathrm{aa} & n & \mathrm{ff} & C \\ 0 & 0 & 0 & s & x & 0 & 0 & \mathrm{bb} & 0 & \mathrm{gg} & D \\ 0 & 0 & 0 & t & y & 0 & 0 & \mathrm{cc} & 0 & \mathrm{hh} & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & d & g & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & e & h & j & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & k & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

est une matrice fractale; elle est triangulaire supérieure par blocs, les tailles des blocs sont $\begin{pmatrix} 5\times5 & 5\times3 & 5\times2 & 5\times1 \\ & 3\times3 & 3\times2 & 3\times1 \\ & & 2\times2 & 2\times1 \\ & & & 1\times1 \end{pmatrix}$ et, si on les note $(M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1...4\}^2}$, on voit que chaque bloc $\mathrm{M_{ij}}$ contient une copie de son successeur « en diagonale » M_{i+1j+1}.

2. Les matrices commodes

Définition 8. *Matrice commode*

Une matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est dite A-commode lorsque où* $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, *le rang de la matrice* $\chi_A(M)$ *est égal à n-r.*

On remarquera que si M est cyclique elle est A-commode; cependant ce n'est pas nécessaire comme le prouve l'exemple

Exemple 9.

Soit M=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; M n'est pas cyclique car son polynôme minimal est X$^2(X-2)$, il en est de même pour le bloc A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; mais $\chi_A(M)$ est de rang 5-3=2.

Proposition 10.

M=$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est A-commode lorsque les spectres de A et C sont disjoints.

Définition 11. *Matrice fractale à diagonale commode*

Soit M=$(M_{i,j})$ une matrice fractale, on posera pour chaque i<t1 $M_{i,i} = \begin{pmatrix} M_{i+1,i+1} & * \\ 0 & M'_{i+1,i+1} \end{pmatrix}$.

*M sera dite à diagonale commode lorsque pour tout i $M_{i,i}$ est $M_{i+1,i+1}-$*commode.

Lemme 12. *Une formule deux fois utile*

Soient M=$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$,où A∈$\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, $T \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{C})$ et $U \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{C})$.

On pose pour tout entier naturel p et tout triplet (P,Q,R) de matrices pour lequel cela a un sens, $F_p(P,Q,R) = \sum_{k=0}^{p-1} P^k \mathrm{QR}^{p-1-k}$ et, pour tout polynôme $\pi(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, on pose $\pi^\star(P,Q,R) = \sum_{k=0}^{p} a_k F_k(P,Q,R)$.

Pour tout polynôme $\pi(X)$

i) $\pi(M) = \pi\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(A) & \pi^\star(A,B,C) \\ 0 & \pi(C) \end{pmatrix}$

ii) MT-TA=U $\Longrightarrow \pi_A(M)T = \pi^\star(M,U,A)$

Démonstration.

On montre d'abord par récurrence sur p que, pour tout entier naturel strictement positif p

M^p=$\begin{pmatrix} A^p & F_p(A,B,C) \\ 0 & C^p \end{pmatrix}$ et $M^pT = F_p(M,U,A)$.

Pour p=1 le résultat est évident; supposons que M^p=$\begin{pmatrix} A^p & F_p(A,B,C) \\ 0 & C^p \end{pmatrix}$ alors M^{p+1}=$\begin{pmatrix} A^{p+1} & \mathrm{AF}_p(A,B,C)+F_p(A,B,C)C \\ 0 & C^{p+1} \end{pmatrix}$, $\mathrm{AF}_p(A,\ B,\ C)\ +\ F_p(A,\ B,\ C)C$=$A\sum_{k=0}^{p-1} A^k \mathrm{BC}^{p-1-k} + \sum_{k=0}^{p-1} A^k \mathrm{BC}^{p-1-k} C$=$\sum_{k=0}^{p} A^k \mathrm{BC}^{p-k}$=$F_{p+1}(A,B,C)$, ce qui achève la récurrence

pour tout entier srictement positif M^p=$\begin{pmatrix} A^p & F_p(A,B,C) \\ 0 & C^p \end{pmatrix}$.

On conclut par linéarité.

La seconde formule se démontre de manière analogue.
La proximité des deux résultats rappelle la « règle de simplification » de Roth.
□

Proposition 13.
Soit un couple (A,B) de matrices fractales commutantes il existe une matrice fractale b telle que pour tout x réel A et (B+xb) commutent et (B+xb) est à diagonale commode.

3. Le cas des couples de matrices fractales où l'une est à diagonale commode

Proposition 14. L'équation MX-XA=U
Soient $M=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$*,où* $A\in\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$, *et* $U \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{C})$*; on suppose que M est A-commode et que l'équation de Sylvester MX-XA=U (où X est l'inconnue) possède des solutions.*
L'ensemble des solutions est un espace affine dont la dimension est inférieure ou égale à celle du noyau de la matrice $\chi_A(M)$*, c'est à dire à r.*

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le résultat de la proposition 11 à M et au polynôme caractéristique $\chi_A(X)$*.*
□

Théorème 15. *L'Algèbre commutative* $\mathbb{C}[W, M, \tilde{B}]$ *où* $\tilde{B}$ *est à diagonale cyclique*
Si (W,M,$\tilde{B}$*), où* $\tilde{B}$ *est à diagonale commode, sont trois matrices fractales commutantes, la dimension de l'Algèbre* $\mathbb{C}[W, M, \tilde{B}]$ *est égale à n.*

Démonstration.
i) la dimension de $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, \tilde{B})$ *est supérieure ou égale à n ([6], lemme 1.3)*
ii) les deux égalités suivantes sont équivalentes:
Dimension de $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, \tilde{B})$*=n*
Dimension de $\mathbb{C}[W, \tilde{B}]$*=n ([6], Théorème 1.1),*
auquel cas $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, \tilde{B})=\mathbb{C}[W, \tilde{B}]$.
Sachant que la dimension de $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, \tilde{B})$ *est supérieure ou égale à n, nous allons montrer que, si* $\tilde{B}$ *est à diagonale commode, cette dimension est majorée par n.*
Si on pose M=($M_{i,j}$*) une matrice fractale, qui sera déterminée par sa bande supérieure, M commute avec* $\tilde{B}$ *si et seulement si la bande supérieure du produit* $M\tilde{B}$ *est égale à la bande supérieure du produit* $\tilde{B}M$*, c'est-à-dire si et seulement si pour tout* $j\in\{1, ..., t_1\}$, $\sum_{k=1...j} (M_{1,k}\widetilde{B_{k,j}} - \widetilde{B_{1,k}}M_{k,j})=0$

Ce qui s'écrit:

eq1: $\widetilde{B_{1,1}}.M_{1,1}$-$M_{1,1}\widetilde{B_{1,1}}$=0

eq2: $\widetilde{B_{1,1}}M_{1,2} - M_{1,2}\widetilde{B_{2,2}} = -B_{1,2}M_{2,2} + M_{1,1}B_{1,2}$

eq3: $\widetilde{B_{1,1}}M_{1,3} - M_{1,3}\widetilde{B_{3,3}} = -\widetilde{B_{1,2}}M_{2,3} + M_{1,2}\widetilde{B_{2,3}} - \widetilde{B_{1,3}}M_{3,3} + M_{1,1}\widetilde{B_{1,3}}$

.....

eqj: $\widetilde{B_{1,1}}M_{1,j} - M_{1,j}\widetilde{B_{j,j}} = -\widetilde{B_{1,j}}M_{j,j} + M_{1,1}\widetilde{B_{1,j}} - \sum_{k=2\ldots j-1} (\widetilde{M_{1,k}}\widetilde{B_{k,j}} - \widetilde{B_{1,k}}\widetilde{M_{k,j}})$

...

eqt₁: $\widetilde{B_{1,1}}M_{1,t_1} - M_{1,t_1}\widetilde{B_{t_1,t_1}} = -\widetilde{B_{1,t_1}}M_{t_1,t_1} + M_{1,1}\widetilde{B_{1,t_1}} - \sum_{k=2\ldots t_1-1} (\widetilde{M_{1,k}}\widetilde{B_{k,j}} - \widetilde{B_{1,k}}\widetilde{M_{k,j}})$.

Nous désignerons ce système d'équations par S.

La structure échelonnée de S conduit à considérer la suite ci-dessous:

$E_0 = \varnothing$

$E_1 = \{a_{1,1} \in \mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{C}), \text{eq1}\}$

$E_2 = \{(M_{1,1}, M_{1,2}) \in E_1 \times \mathcal{M}_{z_1,z_2}(\mathbb{C}), \text{eq2}\}$

.....

$\mathrm{E}_j = \{(M_{1,1}, M_{1,2}, ..., M_{1,j}) \in E_{j-1} \times \mathcal{M}_{z_1,z_j}(\mathbb{C}), \text{eqj}\}$

.....

$\mathrm{E}_{t_1} = \{(M_{1,1}, M_{1,2}, ..., M_{1,t_1}) \in E_{t_1-1} \times \mathcal{M}_{z_1,z_{t_1}}(\mathbb{C}), \text{eqt}_1\}$

L'ensemble des solutions de S est inclus dans E_{t_1}.

Si S=E_{t_1} pour résoudre S on pourra choisir arbitrairement la matrice $M_{1,1}$ parmi les solutions de eq1, puis $M_{1,2}$ parmi les solutions de eq2 ...mais si S n'est pas égal à E_{t_1} ce ne sera pas le cas.

Les équations eq1,..,eqt₁ sont de la forme $\widetilde{B_{1,1}}T - T\,\widetilde{B_{j,j}} = U$, *où* $\widetilde{B_{1,1}} = \begin{pmatrix} \widetilde{B_{j,j}} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$ *et les matrices* $\widetilde{B_{1,1}}$ *étant commodes la proposition 12 appliquée pour chaque j appartenant à {1,..,t₁} entraîne que dim*$(E_j) \leqslant \dim(E_{j-1}) + z_j$, *par suite la dimension de l'espace affine* E_{t_1} *est inférieure ou égale à* $n = \sum_{i=1}^{t_1} z_i$.

Il en découle que $S = E_{t_1}$ *et, par suite, la dimension de* $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, \tilde{B})$ *est égale à n et* $Cent_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}(W, \tilde{B}) = \mathbb{C}[W, \tilde{B}] = n$.

Si on considère une mat fractale M qui commute avec $\tilde{B}$, *étant fractale elle commute avec W, donc elle appartient au Centralisateur de* $(W, \tilde{B})$ *et donc, à* $\mathbb{C}[W, \tilde{B}]$*; d'où* $\mathbb{C}[W, M, \tilde{B}] = \mathbb{C}[W, \tilde{B}]$, *qui est de dimension n.*

***Remarque* 16.**

On retiendra aussi que si $\tilde{B}$ est *une matrice fractale à diagonale commode le fait que la dimension du Centralisateur est égale à n entraîne que pour tout j l'implication* $\widetilde{B_{1,1}}T$-$T\widetilde{B_{j,j}} = U \Longrightarrow \chi_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{1,1}})T = \chi^{\star}_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{1,1}}, U, \widetilde{B_{j,j}})$ *est une équivalence.*

De plus si on considère T la projection orthogonale de l'origine sur le sous-espace affine défini par l'équation $\chi_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{1,1}})T = \chi^{\star}_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{1,1}}, U, \widetilde{B_{j,j}})$.

Lorsque U tend vers 0 il en est de même pour $\chi^{\star}_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{1,1}}, U, \widetilde{B_{j,j}})$ *d'où T tend vers 0.*

$\chi_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{1,1}}) = \begin{pmatrix} 0 & \chi^{\star}_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{j,j}*,**}) \\ 0 & \chi_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{j,j}}') \end{pmatrix}$; *si on pose* $T{=}\begin{pmatrix} Z1 \\ Z2 \end{pmatrix}$ *l'équation* $\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \chi^{\star}_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{j,j}*,**}) \\ 0 & \chi_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{j,j}}') \end{pmatrix} T = \chi^{\star}_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{1,1}}, U, \widetilde{B_{j,j}})$ *implique que Z1 est arbitraire et* Z2$=\chi_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{j,j}}')^{-1}\chi^{\star}_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{1,1}}, U, \widetilde{B_{j,j}})$, *où l'inversibilité de* $\chi_{\widetilde{B_{j,j}}}(\widetilde{B_{j,j}}')$ *découle de la proposition 9.*

4. Le cas général

***Proposition* 17.**
Soit une suite de matrices A_k*-commodess* $M_k{=}\begin{pmatrix} A_k & B_k \\ 0 & C_k \end{pmatrix}$ *qui tend vers une matrice* $M{=}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ *et une suite* U_k *qui tend vers 0; il existe une suite de matrices* T_k *telle que pour tout k* $\begin{pmatrix} 0 & \chi^{*}{}_{A_k}(A_k, B_k, C_k) \\ 0 & \chi_{A_k}(C_k) \end{pmatrix}(T_k) = \chi^{\star}_{A_k}(M_k, U_k, A_k)$, *où* T_k *tend vers 0.*

Démonstration.
Comme M_k *est Ak-commode* $\chi_{A_k}(M_k)$ *est de rang n-r et est égal à* $\begin{pmatrix} 0 & \chi^{*}{}_{A_k}(A_k, B_k, C_k) \\ 0 & \chi_{A_k}(C_k) \end{pmatrix}$, *donc, si on pose* $T_k{=}\begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix}$, $\chi_{A_k}(M_k)\begin{pmatrix} U_k \\ V_k \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$
$\begin{cases} U_k \text{ arbitraire} \\ \chi^{*}{}_{A_k}(A_k, B_k, C_k)V_k = \chi_{A_k}(C_k)V_k = 0 \end{cases}$ *et* V_k *est unique, on posera* $T_k = \begin{pmatrix} 0 \\ V_k \end{pmatrix}$.
Pour tout k $\pi_{A_k}(M_k) = \chi_{A_k}(M_k)$, parce que A_k *est cyclique, et tend vers* $\chi_A(M)$ *par continuité du polynôme caractéristique; par ailleurs* $\chi_A(M) = \begin{pmatrix} 0 & \chi^{*}{}_A(A, B, C) \\ 0 & \chi_A(C) \end{pmatrix}$ *comme M est commode le rang de* $\begin{pmatrix} \chi^{*}{}_A(A, B, C) \\ \chi_A(C) \end{pmatrix}$ *est égal à n-r donc l'égalité* $\begin{pmatrix} \chi^{*}{}_A(A, B, C) \\ \chi_A(C) \end{pmatrix} T = 0$ *entraîne T=0.*
f implicites □

***Théorème* 18.**
Soit un couple de matrices fractales commutantes (A,B), telles que pour tout j>1 la matrice $B_{1,1} = \begin{pmatrix} B_{j,j} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$ *est commode et* $b_{1,1}$ *définie comme dans le lemme 14, il existe une suite de couples* $(\tilde{A}, \tilde{B})$ *de matrices fractales commutantes de bloc directeurs* $(\widetilde{A_{1,1}}, \widetilde{B_{1,1}})$ *qui tendent vers (A,B).*

Démonstration. *ure*

Soit $\widetilde{B_{1,1}} = B_{1,1} + \mathrm{xb}_{1,1}$ *et* $\widetilde{A_{1,1}} = A_{1,1}$.

Nous allons construire une suite de couples $(\tilde{A}, \tilde{B})$ *de matrices fractales commutantes de bloc directeurs* $(\widetilde{A_{1,1}}, \widetilde{B_{1,1}})$ *qui tendent vers (A,B).*

$\tilde{B}$ *sera la matrice fractale de bande supérieure* $(\widetilde{B_{1,1}}, B_{1,2}, ..., B_{1,t_1})$*; une matrice fractale* $\tilde{A}$ *commute avec la matrice fractale* $\tilde{B}$ *si et seulement si elle appartient au Commutateur de* $\mathbb{C}[W, \tilde{B}]$*; or le Commutateur de* $\mathbb{C}[W, \tilde{B}]$ *est de dimension supérieure ou égale à n ([7] lemme 1.3), ce qui assure l'existence de* $\tilde{A}$.

Nous poserons $\widetilde{B_{1,1}} = B_{1,1} + b_{1,1}$ *et par suite pour tout j* $\widetilde{B_{j,j1}} = B_{j,j} + b_{j,j}$ *et* $\tilde{A}$ *=A+a, où a=*$(a_{i,j})$ *est une matrice fractale qui sera déterminée par sa bande supérieure* $(a_{1,j}, j = 1...t_1)$*,*

$\tilde{A}$ *commute avec* $\tilde{B}$ *si et seulement si la bande supérieure du produit* $\tilde{A}\,\tilde{B}$ *est égale à la bande supérieure du produit* $\tilde{B}\tilde{A}$ *, c'est-à-dire si et seulement si pour tout* $j \in \{1, ..., t_1\}, \sum_{k=1...j} (\tilde{A}_{1,k}\widetilde{B_{k,j}} - \widetilde{B_{1,k}}\tilde{A}_{k,j}) = 0$

On remarque que

si k est différent de 1 et de j: $\widetilde{A_{1,k}}\widetilde{B_{k,j}} - \widetilde{B_{1,k}}\widetilde{A_{k,j}} = A_{1,k}B_{k,j} - B_{1,k}A_{k,j} + a_{1,k}B_{k,j} - B_{1,k}a_{k,j}$

pour k=1: $\widetilde{A_{1,1}}\widetilde{B_{1,j}} - \widetilde{B_{1,1}}\widetilde{A_{1,j}} = A_{1,1}B_{1,j} - B_{1,1}A_{1,j} + a_{1,1}B_{1,j} - B_{1,1}a_{1,j}$- $xb_{1,1}A_{1,j} - \mathrm{xb}_{1,1}a_{1,j} = A_{1,1}B_{1,j} - B_{1,1}A_{1,j}$-$xb_{1,1}A_{1,j} + a_{1,1}B_{1,j} - \widetilde{B_{1,1}}a_{1,j}$

pour k=j $\widetilde{A_{1,j}}\widetilde{B_{j,j}} - \widetilde{B_{1,j}}\widetilde{A_{j,j}} = A_{1,j}B_{j,j} + \mathrm{xA}_{1,j}b_{j,j} + a_{1,j}\widetilde{B_{j,j}} - B_{1,j}A_{j,j}$- $B_{1,j}a_{j,j}$

En tenant compte de l'hypothèse AB=BA le système S s'écrit donc

eq1*:* $\widetilde{B_{1,1}}.a_{1,1}$-$a_{1,1}\widetilde{B_{1,1}} = 0$

eq2*:* $\widetilde{B_{1,1}}a_{1,2} - a_{1,2}\widetilde{B_{2,2}} = -B_{1,2}a_{2,2} + a_{1,1}B_{1,2}$-$\mathrm{x}b_{1,1}A_{1,2} + xA_{1,2}b_{2,2}$

......

eqj*:* $\widetilde{B_{1,1}}a_{1,j}$-$a_{1,j}\widetilde{B_{j,j}}$=-$xb_{1,1}A_{1,j} + a_{1,1}B_{1,j} + \sum_{k=2}^{j-1} (a_{1,k}B_{k,j} - B_{1,k}a_{k,j}) + \mathrm{xA}_{1,j}b_{j,j}$-$B_{1,j}a_{j,j}$

...

$\mathbf{eqt_1}$*:* $\widetilde{B_{1,1}}a_{1,t_1}$-$a_{1,t_1}\widetilde{B_{t_1,t_1}}$=-$xb_{1,1}A_{1,t_1} + a_{1,1}B_{1,t_1} + \sum_{k=2}^{t_1-1} (a_{1,k}B_{k,t_1} - B_{1,k}a_{k,t_1}) + \mathrm{xA}_{1,t_1}b_{t_1,t_1}$-$B_{1,t_1}a_{t_1,t_1}$

La structure échelonnée de S conduit à considérer la suite ci-dessous:

$E_0 = \varnothing$

$E_1 = \{a_{1,1} \in \mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{C}), \mathrm{eq1}\}$

$E_2 = \{(a_{1,1}, a_{1,2}) \in E_1 \times \mathcal{M}_{z_1,z_2}(\mathbb{C}), \mathrm{eq2}\}$

.....

E$_j$=$\{(a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,j}) \in E_{j-1} \times \mathcal{M}_{z_1,z_j}(\mathbb{C}), \mathrm{eqj}\}$

.....

E$_{t_1}$=$\{(a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,t_1}) \in E_{t_1-1} \times \mathcal{M}_{z_1,z_{t_1}}(\mathbb{C}), \mathrm{eqt}_1\}$

L'ensemble des solutions de S est inclus dans E$_{t_1}$.

Les équations eq1,..,eqt$_1$ sont de la forme $\widetilde{B_{1,1}}$T$-T\ \widetilde{B_{j,j}} = U$, où $\widetilde{B_{1,1}}$=$\begin{pmatrix} \widetilde{B_{j,j}} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$ et les matrices $\widetilde{B_{1,1}}$ étant cycliques, la proposition 12 appliquée pour chaque j appartenant à {1,..,t$_1$} entraîne que di$m(E_j) \leqslant \dim(E_{j-1}) + z_j$, par suite la dimension de l'espace affine E$_{t_1}$ est inférieure ou égale à n=$\sum_{i=1}^{t_1} z_i$; donc la dimension de E$_{t_1}$ est égale à n et, pour résoudre le système (S), il est légitime de considérer pas à pas les équations eqj et de choisir pour chacune arbitrairement une solution a$_{1j}$.

Reste à montrer que les $a_{1,j}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers 0.

D'abord on pose $a_{1,1} = 0$*, puis on se souvient que* $xb_{1,1}$ *tend vers 0, et avec lui les* xb$_{j,j}$.

Ce qui permet un raisonnement par récurrence:

Pour chaque équation $\widetilde{B_{1,1}} a_{1,j} - a_{1,j}\ \widetilde{B_{j,j}} = U$*, si* U *tend vers 0, comme* $\widetilde{B_{1,1}}$ *tend vers* $B_{1,1}$ *et* $\widetilde{B_{j,j}}$ *tend vers* $B_{j,j}$ *et la matrice* $B_{1,1}$ *est très commode il en découle que* $a_{1,j}$ *tend vers 0.*

□

D'où

***Théorème* 19.**

Soit un couple de matrices fractales commutantes (A,B)$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$*, telles que pour tout j>1 la matrice* $B_{1,1} = \begin{pmatrix} B_{j,j} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$ *est commode, alors dim(*$\mathbb{C}[A, B, W]$*)*$\leqslant$*n.*

***Proposition* 20.**

L'ensemble des matrices fractales B telles que pour tout j>1 la matrice $B_{1,1} = \begin{pmatrix} B_{j,j} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$ *est commode est un ouvert dense de F.*

Démonstration.

La condition étant la non-nullité des déterminants d'ordre n-r (avec les notations des paragraphes précédents); on conclut avec le Théorème de Baire. □ □

CONCLUSION:

Une réponse a été donnée dans les cas suivants:

1. $\mathbb{C}[A, B, W]$ où B est à diagonale cyclique
2. $\mathbb{C}[A, B, W]$ où pour tout j>1 la matrice $B_{1,1} = \begin{pmatrix} B_{j,j} & * \\ 0 & ** \end{pmatrix}$ est commode,

Il s'agit des paires de matrices fractales commutantes (A,B) où B appartient à un ouvert dense.

Restent les autres.

Paris-Nimes, Juillet 2019, actuellement Juillet 2021

Bibliographie:

[1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, Linear Multilinear Algebra 27 (1990), 147-157

[2] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Using Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1998

[3] M. Gerstenhaber, « *On dominance and varieties of commuting matrices* », *Ann. Math.*, vol. 73,1961, p. 324-348

[4] R.M. Guralnick, A note on Commuting Pairs of Matrices, Linear and Multilinear Algebra, vol.31, p 71-75,1992.

[5] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.

[6] M.G. Neubauer, D.J. Saltman, Two-Generated Commutative Subalgebras of $\mathcal{M}_{\mathrm{un}}(\mathbb{C})$, Journal of Algebra 164;p. 545-562 (1964).

[7] M.J. Neubauer and B.A. Sethuraman, Commuting pairs in the centralizers of 2-regular matrices,Journal of Algebra, 214(1999), 174–181.

[8] A.Sethuraman, The Algebra generated by Three Commuting Matrices, *Mathematics Newsletter, Ramanujam Math. Soc.,* **21** number 2, September 2011, 26-31.

[9] H. Shapiro, The Weyr Characteristic, American Mathematical Monthly, 106, december, p 919-929, 1999.

[10] K. Sivic, Varieties of triples of commuting matrices, Ph.D. Thesis, University ofLjubljana, Slovenia, (2001).

[11] P. Teller, http://www.lalgebrisantfr/images/pdfArticles/EquatAMMB.pdf