Le Problème de la dimension d'une Algèbre Commutative engendrée par deux (ou trois) matrices

VERSION BETA PATRICK TELLER

Résumé.

Il est bien connu que la dimension de l'algèbre (unitaire) engendrée par deux matrices (A,B) $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que AB=BA est inférieure ou égale à n et ce résultat a reçu de nombreuses et diverses démonstrations ([1],[2],[3]).

Par contre le problème concernant trois matrices qui commutent reste très largement ouvert ([3],[4],[6]).

Il nous semble qu'il faut se pencher plus qu'on ne l'a fait sur les propriétés élémentaires des matrices qui commutent avec une matrice de Weyr donnée, et que nous appellerons « matrices fractales ».

Nous considérerons comme connues les propriétés des matrices fractales ([3])) et rappellerons sans démonstration celles qui nous seront utiles.

Dans le deuxième paragraphe nous établirons des propriétés et installerons des outils pour l'étude de l'Algèbre F des matrices fractales associées à une matrice de Weyr donnée.

Le troisième paragraphe appliquera cet outillage à la dimension d'une Algèbre commutative engendrée par deux matrices.

La dernière partie démontrera, à l'aide, essentiellement, des même outils que la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inférieure ou égale à n (problème désormais appelé Problème de Gerstenhaber).

Avertissement 1.

Le problème de Gerstenhaber (dans le cas de trois matrices) est un problème ouvert et certains et non des moindres, pensent que la réponse est négative; je suis d'autant plus demandeur de vos remarques.

Le choix délibéré d'une démarche calculatoire, conséquence de l'impossibilité d'appliquer des concepts avancés, se traduit par la nécessité de définir des objets « techniques » et de s'appuyer sur certains calculs minutieux.

1. Matrices de Weyr

Définition 2.

La matrice de Weyr associée à une partition (décroissante) $(z_1,..,z_{t_1})$ de n

On appelle matrice de Weyr nilpotente associée à une partition (décroissante au sens large) $(z_1,..,z_{t_1})$ de n la matrice définie par blocs comme suit:

W=$(W_{i,j})$ où le bloc $W_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{C})$; $\forall i \in \{1,...,t_1-1\}$ $W_{i,i+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in$ $\mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(\mathbb{C})$ (attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et, si $j \neq i+1$, $W_{i,j}$=0.

d'où W=$\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & ... & ...0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & ... & .... \\ ... & ... & ... & ... & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & W_{z_{t_1-1},z_{t_1}} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de Weyr associée à la partition $(z_1,..,z_{t_1})$.

Théorème 3.

Toute matrice nilpotente $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une unique matrice de Weyr nilpotente W.

Théorème 4. *Toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable (de manière unique à l'ordre près) à une matrice en blocs de Weyr*
$\begin{pmatrix} \lambda_1 I + W_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \lambda_2 I + W_2 & & .... \\ .... & 0 & .... & 0 \\ 0 & .... & 0 & \lambda_r I + W_r \end{pmatrix}$, *où les W_i sont des matrices de Weyr nilpotentes.*

Théorème 5. *Le commutant de la matrice de Weyr nilpotente W(z_1,..,z_{t_1})*
(par la suite on écrira W lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur la partition concernée)

Soit W une matrice de Weyr nilpotente et une matrice A=($A_{i,j}$) (même structure en blocs que W), AW=WA si et seulement si
$\forall(i,j)$,
1. i>j $\Longrightarrow A_{i,j}=0$
2. $i \leqslant j$ $A_{i,j}=\begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ (que l'on peut écrire ${}^tW_{i,i+1}A_{\mathrm{ij}}W_{j,j+1}=A_{i+1,j+1}$)

Définition 6. *Matrice fractale de partition (z_1,..,z_{t_1})*
Soit une partition (nécessairement décroissante au sens large) (z_1,..,z_{t_1}) de n, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sera dite fractale de partition (z_1,..,z_{t_1}) lorsque M=($M_{i,j}$) où $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{C})$ et $\forall(i,j)$
$i>j \Longrightarrow M_{i,j}=0$
$i \leqslant j \Longrightarrow M_{i,j}=\begin{pmatrix} M_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.
On appellera bande supérieure la matrice $(M_{11}, M_{12}, ..., M_{1t_1})$; une matrice fractale est déterminée par sa bande supérieure.
On désignera par F(z_1,..,z_{t_1}) (ou simplement F lorsqu'il ne peut y avoir d'ambiguité sur la partition) l'ensemble des matrices fractales de partition (z_1,..,z_{t_1}) et on appellera Algèbre Fractale toute algèbre commutative (unitaire) de la forme $\mathbb{C}[A,\ B,\ ...,\ W]$ où A,B,..appartiennent à F.

Voici un premier exemple de matrice fractale
M=$\begin{pmatrix} a & b & d & p & u & g & i & z & l & \mathrm{dd} & A \\ 0 & c & e & q & v & h & j & \mathrm{zz} & m & \mathrm{ee} & B \\ 0 & 0 & f & r & w & 0 & k & \mathrm{aa} & n & \mathrm{ff} & C \\ 0 & 0 & 0 & s & x & 0 & 0 & \mathrm{bb} & 0 & \mathrm{gg} & D \\ 0 & 0 & 0 & t & y & 0 & 0 & \mathrm{cc} & 0 & \mathrm{hh} & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & d & g & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & e & h & j & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & k & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est une matrice fractale; elle est triangulaire supérieure par blocs, les tailles des blocs sont $\begin{pmatrix} 5\times 5 & 5\times 3 & 5\times 2 & 5\times 1 \\ \text{nulle} & 3\times 3 & 3\times 2 & 3\times 1 \\ \text{nulle} & \text{nulle} & 2\times 2 & 2\times 1 \\ \text{nulle} & \text{nulle} & \text{nulle} & 1\times 1 \end{pmatrix}$ et, si on les note $(M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1...4\}^2}$ on voit que chaque bloc M_{ij} contient une copie de son successeur « en diagonale » M_{i+1j+1}.

2. L'ALGÈBRE F

2.1. L'espace vectoriel F.

Soit W et l'endomorphisme w représenté par W dans la base canonique, telle est l'action de w sur cette base:
$0 \longleftarrow e_1 \longleftarrow e_{z_1+1} \longleftarrow e_{z_1+z_2+1} .... \longleftarrow ...... \leftarrow ...... e_{z_1+....+z_{t_1-1}+1}$
$0 \longleftarrow e_2 \longleftarrow e_{z_1+2} \longleftarrow e_{z_1+z_2+2} .... \longleftarrow ......$ .....
....
$0 \longleftarrow e_{z_3} \longleftarrow e_{z_1+z_3} \longleftarrow e_{z_1+z_2+z_3}$
.....
$0 \longleftarrow e_{z_2} \longleftarrow e_{z_1+z_2}$
....
$0 \longleftarrow e_{z_1}$

que l'on peut réécrire comme suit en réindexant les vecteurs de la base canonique

$$\begin{array}{l}
0 \longleftarrow e_{1,1} \longleftarrow e_{1,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{1,k...} \leftarrow .... \leftarrow .... \longleftarrow e_{1,t_1} \\
0 \longleftarrow e_{2,1} \longleftarrow e_{2,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{2,k...} \leftarrow .... \longleftarrow e_{2,t_2} \\
..... \\
... \\
0 \longleftarrow e_{p-1,1} \longleftarrow e_{p-1,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{p-1,t_{p-1}} \\
0 \longleftarrow e_{p,1} \longleftarrow e_{p,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{p,t_p}
\end{array} .$$

Remarque 7.
Les deux suites d'indices (t_1,..,t_p) et (z_1,..,z_{t_1}) sont dites « duales ».

Soit pour chaque couple (i,j) et chaque 0⩽k<min $(t_i,\ t_j)$ l'application $g_{j,i,k}$ définie par $\begin{array}{cccc} e_{i,....} & .... & e_{i,t_i-1} & e_{i,t_i} \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ e_{j,...} & .... & e_{j,t_j-k-1} & e_{j,t_j-k} \end{array}$ et nulle sur les autres vecteurs de la base.

Théorème 8. *Une base de F*

Les $g_{j,i,k}$ sont linéairement indépendants et constituent une base du commutant de w.

Démonstration.

Il suffit d'observer les diagrammes commutatifs $\begin{array}{ccccc} \longleftarrow & .... \longleftarrow & e_{i,t_i-1} & \longleftarrow & e_{i,t_i} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \longleftarrow & .... \longleftarrow & e_{j,t_j-k-1} & \longleftarrow & e_{j,t_j-k} \end{array}$ qui montrent que ces applications commutent avec f.

Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes est analogue aux exercices classiques sur les endomorphismes nilpotents.

Leur cardinal est $\sum_{(i,j)\in[\![1,\ldots,p]\!]^2} \min\,(t_i, t_j)$, qui est la dimension du commutant de w (Théorème de Frobenius-Ceccioni). [ ]

C'est donc une base de F.

□

Définition 9. *Matrices $G_{j,i,k}$ « G-matrices »*

Nous désignerons par $G_{j,i,k}$ la matrice qui représente dans la base canonique l'endomorphisme $g_{j,i,k}$; on désignera par $\mathfrak{N}$ la base ($G_{j,i,k}$) de F.

Définition 10. *Zéro permanent d'une Algèbre Fractale*

Soit une Algèbre Fractale $\mathcal{A}$ on appellera zéro permanent de $\mathcal{A}$ toute case nulle dans tous les éléments de $\mathcal{A}$ mais qui n'est pas nulle pour tous les éléments de F; on comprend qu'un zéro permanent ne peut se trouver sur la diagonale.

La présence d'un zéro permament pour une Algèbre Fractale signifie aussi l'absence d'une G-matrice de sa base.

Pour tout (j,i,k) la matrice $G_{j,i,k+1}$=W$G_{j,i,k}$ est l'image de $G_{j,i,k}$ par une translation horizontale vers la droite; on dira que $G_{j,i,k+1}$ est un descendant de $G_{j,i,k}$ (et $G_{j,i,k}$ est un antécédant de $G_{j,i,k+1}$).

$G_{j,i,k}$ étant fixé son ancêtre sera G_{j,i,k_0} où k_0 est le minimum des indices p tels que $G_{j,i,p} \in F$ et son héritier sera $G_{j,i,q}$ où q est le maximum des indices p tels que $G_{j,i,p} \in F$.

Pour décrire les éléments d'une matrice nous dirons indistinctement « case (u,v) », « élément (u,v) » ..

Certains éléments $G_{j,i,k}$ de la base $\mathfrak{N}$ n'occcupent qu'une case, d'autres plusieurs; dans ce dernier cas on désignera sous le nom d'origine de $G_{j,i,k}$ la case dont le numéro de ligne est le plus grand et extrémité la case dont le numéro de ligne est le plus petit, l'extrémité appartient nécessairement à la bande supérieure.

Nous désignerons les choses comme suit: telle case est l'extrémité de $G_{j,i,k}$, $G_{j,i,k}$ est la G-matrice de cette case.

Définition 11. *G-matrice manquante (à une matrice, à une Algèbre), zéro permanent*

Soit une matrice fractale A on dit que la G-matrice $G_{j,i,k}$ manque à A (resp à l'Algèbre Fractale $\mathcal{A}$) lorsqu'aucun des éléments de $\mathbb{C}[W, A]$ (resp $\mathcal{A}$) ne contient $G_{j,i,k}$ (c'est à dire la coordonnée $x_{j,i,k}$ est nulle); alors les cases de $G_{j,i,k}$ sont des zéros permanents de A (resp de $\mathcal{A}$) et on parlera d'antécédants, de descendants ...pour des cases de la bande supérieure au même titre que pour les G-matrices.

Remarque 12.

Comme $WG_{j,i,k}=G_{j,i,k+1}$ si $G_{j,i,k+1}$ manque à une Algèbre Fractale il en est nécessairement de même de $G_{j,i,k}$ et par suite de son ancêtre $G_{j,i,k0}$ dont l'extrémité est une case d'un bloc de la bande supérieure; donc les éléments qui manquent à une telle Algèbre forment des chaines appelées manquantes ($G_{j,i,k0}$,$G_{j,i,k0+1}$, ..., $G_{j,i,q}$), ce dernier n'étant pas nécessairement l'héritier car on peut imaginer que ($G_{j,i,k0}$,$G_{j,i,k0+1}$, ..., $G_{j,i,q}$) manquent et que le descendant suivant $G_{j,i,q+1}$ ne manque pas.

Exemple 13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 14 & 21 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 16 & 22 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, associé à W=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le zéro de la case (2,1) est un zéro permanent, son descendant (case (2,4)) aussi, mais pas la case (2,7) qui est l'héritier de la case (2,1).

On remarquera que la case (1,4) n'est pas un zéro manquant car elle n'est pas nulle dans W; de même que la case (4,6).

De même les cases comme (3,1) ne sont pas des zéros manquants car elles n'appartiennent à aucun élément de F.

.

De même les extrémités des G-matrices d'une chaine manquante appartiennent à une même ligne et sont translatées de z_k, puis z_{k+1} ....

Exemple 14.

Soit W=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui représente w: $\begin{array}{l} 0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \leftarrow e7 \\ 0 \leftarrow e2 \leftarrow e6 \\ 0 \leftarrow e3 \\ 0 \leftarrow e4 \end{array}$

$g_{1,1,0}$: $\begin{array}{l} 0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \leftarrow e7 \\ \ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots\downarrow \\ 0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \leftarrow e7 \end{array}$ $g_{1,1,1}$: $\begin{array}{l} 0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \leftarrow e7 \\ \ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots\downarrow \\ \ldots\ldots 0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \end{array}$ $g_{1,1,2}$: $\begin{array}{l} 0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \leftarrow e7 \\ \ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots\ldots\downarrow\ldots\ldots\downarrow \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \leftarrow e1 \end{array}$

$0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \leftarrow e7$ $\quad$ $0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \leftarrow e7$
$g_{2,1,0}$: ......↓.......↓......↓ $g_{2,1,1}$: ......↓.......↓......↓
......$0 \leftarrow e2 \leftarrow e6$ $\quad$ ....$0 \leftarrow e2$
$0 \leftarrow e2 \leftarrow e6$ $\quad$ $0 \leftarrow e2 \leftarrow e6$
$g_{1,2,1}$: ......↓.......↓ $g_{1,2,2}$: ......↓.......↓
$0 \leftarrow e1 \leftarrow e5$ $\quad$ ......$0 \leftarrow e1$
$0 \leftarrow e3$ $\quad$ $0 \leftarrow e1 \leftarrow e5 \leftarrow e7$
$g_{1,3,2}$: ......↓ $g_{3,1,0}$: ......↓.......↓......↓ etc..
$0 \leftarrow e1$ $\quad$ ....$0 \leftarrow e3$

On considère la matrice fractale A=$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 & -1 & 11 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 13 & -4 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

A=7$G_{1,1,0}$+3$G_{2,2,0}$+2$G_{3,3,0}$$-4G_{4,4,0} + 6G_{1,3,2} + 1G_{2,3,1} - 1G_{1,4,2} - 3G_{3,4,0} - 2G_{2,4,1} +$ $13G_{4,3,0}$+11$G_{1,1,1}$+5$G_{2,1,0}$+3$G_{1,2,2}$+15$G_{2,2,1}$+$7G_{3,2,0} + 9G_{4,2,0} + 4G_{1,1,2} + 8G_{3,1,0} + 10G_{4,1,0}$.

Remarque 15.
Soit la matrice A et $G_{j,i,q}$ qui manque à une Algèbre Fractale $\mathcal{A}$ alors W$G_{j,i,q}$=$G_{j,i,q+1}$ doit nécesssairement manquer à toutes les matrices de W$\mathcal{A}$.

2.2. Zéros permanents et sous-espaces stables.

Remarque 16.

Comme A=$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & .... \\ 0 & A_{22} & ... & .... \\ ... & 0 & A_{33} & ... \\ 0 & ... & 0 & .... \\ .... & ... & ... & .... \end{pmatrix}$ si on considère une case du bloc A_{11} les propositions suivantes sont équivalentes:
i) la case est nulle pour toutes les puissances A^k,k⩾0
ii) la case est nulle dans tous les blocs M_{11} des puissances A^k,k⩾0 (nous dirons que c'est un zéro permanent de A_{11})

Remarque 17.
Comme A_{11}=$\begin{pmatrix} A'_{22} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ si on considère une case du bloc A'$_{22}$ (copie du bloc A_{22}) les propositions suivantes sont équivalentes:
i) la case est un zéro permanent de A_{11}
ii) la case est un zéro permanent de A'$_{22}$

Proposition 18.
Soit une matrice fractale A, la case (i,j) du bloc A_{11} *est un zéro permanent de A si et seulement si le sous-espace cyclique engendré par le vecteur* e_j *de la base canonique est inclus dans Vect(ek,k≠i).*
Ce résultat peut s'étendre aux Algèbres Fractales:

Démonstration.
immédiat □

Exemple 19.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
les cases (1-2) et (1-3) sont des zéros permanents.
la case (1-2) signifie que le vecteur e2 est propre

les deux cases (1-2) et (1-3) « ensemble » signifient que Vect(e2,e3) est stable; on dira qu'ils forment une configuration de zéros permanents.

Définition 20. *Trigonalisation d'une matrice fractale*

A11 est une matrice carrée de taille p et contient une copie de A22 dont nous désignerons ici la taille par q; A11 est la matrice qui représente f relativement à la base (e1,.,ep) sachant que si on note (e1,.eq*) les vecteurs suivants dans la base, on a ei=w(ei*) pour tout i de {1,.q}; la matrice A22 est la matrice de la restriction de f à Vect(e1,.eq).*

Le sous-espace vect(e1,..,eq)) est stable par f, le sous-espace cyclique associé à une configuration de zéros permanents de A22 est donc inclus dans ce sous-espace, donc il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}A_{22}Q=\begin{pmatrix} T & U \\ Z=0 & V \end{pmatrix}$ *où T est triangulaire supérieure; si on trigonalise V on trouve donc une matrice inversible Q' telle que* $Q'^{-1}A_{22}Q'=\begin{pmatrix} T & U \\ 0 & V' \end{pmatrix}$ *triangulaire supérieure.*

Les zéros permanents sont devenus le bloc Z.

On désignera par (e'1,,e'q) la nouvelle base de Vect(e1,..,eq); le changement de base analogue pour Vect(e1,..,eq*) nous asssure à nouveau la relation e'i=w(e*'i).*

On posera $\Pi=\begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q' & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q' & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A22 & C & A12 \\ 0 & e & A12-\mathrm{suite} \\ 0 & 0 & A22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q' & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A22' & C' & A12' \\ 0 & e' & A'12-\mathrm{suite} \\ 0 & 0 & A22' \end{pmatrix}$*, que l'on désignera par A'.*

Les zéros permanents, comme ils expriment une stabilité, sont devenus des zéros permanents de la matrice trigonalisée (le bloc noté Z, on les appellera « zéros significatifs »)et s'y sont ajoutés de nouveaux zéros permanents liés à la trigonalisation; les uns comme les autres se trouvant sous la diagonale.

Seuls les zéros significatifs nous intéressent.

Si on considère une case E_{uv} *de la matrice A11 et la case descendante* $E_{u,v+p}=WE_{u,v}$ *qui se trouve dans la matrice A22, l'image* $\Pi^{-1}E_{u,v+p}\Pi=WE_{u,v}$ *est descendante de* $E_{u,v}$*.*

Exemple 21.

A= $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 13 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

les zéros de la 1ère colonne sont permanents et signifient que e1 est propre.

les zéros des cases (2,3) et (4,3) sont permanents.

le zéro de la case (3,2) n'est pas permanent.

```
Maxima 5.41.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i84) A:matrix([11,2,3,4],[0,5,0,8],[0,0,9,10],[0,13,0,6]);
```

(%o84) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 13 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

```
(%i85) A.A;
```

(%o85) $\begin{pmatrix} 121 & 84 & 60 & 114 \\ 0 & 129 & 0 & 88 \\ 0 & 130 & 81 & 150 \\ 0 & 143 & 0 & 140 \end{pmatrix}$

```
(%i73) A.A.A;
```

$$\text{(\%o73)} \begin{pmatrix} 1331 & 852 & 903 & 2168 \\ 0 & 125 & 0 & 728 \\ 0 & 906 & 729 & 2670 \\ 0 & 0 & 0 & 216 \end{pmatrix}$$

```
(%i79) p:transpose(matrix([0,0,1,0],[3,0,9,0],[0,1,0,0],[0,0,0,1]));rank(p);
```

$$\text{(\%o79)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%o80) 4

```
(%i81) invert(p).A.p;
```

$$\text{(\%o81)} \begin{pmatrix} 0 & -99 & 0 & -2 \\ 1 & 20 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(%i82)

Convention 22.
Désormais, et pour des raisons qui apparaîtront ci-dessous, nous appellerons « zéros permanents admissibles» les zéros des cases appartenant à des G-matrices, c'est à dire des cases qui ne sont pas nécessairement nulles pour tous les éléments de F.

2.3. A la recherche d'une formule de récurrence.

Les paragraphes suivants sont destinés à fournir les outils permettant d'exprimer la dimension de $\mathbb{C}[A,W]$ (respectivement $\mathbb{C}[A,B,W]$) en fonction de celle de $W\mathbb{C}[A,W]$ (respectivement $W\mathbb{C}[A,B,W]$) en identifiant un supplémentaire.

La première étape concerne les idéaux WF et $W\mathbb{C}[A,W]$.

2.4. L'anneau F.

Proposition 23. *L'idéal WF*

L'ensemble WF=$\{W\mathbb{M}, M\in F\}$ est un idéal (bilatère).

Démonstration.
découle du fait que F est le commutant de W. □

Théorème 24.
Soit une matrice fractale A et une Algèbre Fractale $\mathcal{A}$, l'ensemble des polynomes $P(X)$ tels que $P(A)\in W\mathcal{A}$ est un idéal, non réduit à {0}.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $W\mathcal{A}$ est un idéal de l'anneau $\mathcal{A}$ et que le polynome minimal de A convient. □

2.5. Analyse d'une matrice fractale.

Définition 25. *lignes et colonnes, primaires et secondaires*

Soit une matrice fractale M=$(M_{i,j})_{(i,j)\in\{1,.,t_1\}^2}$, pour chaque j$\leqslant t_1$ on note $M_{j,j}$ = $\begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j} \end{pmatrix}$, avec M_{t_1+1,t_1+1}=0.

On appellera primaires les lignes et les colonnes de M qui apparaissent dans les matrices $N_{j,j}$; les autres seront appelées secondaires.

Exemple 26.

les lignes primaires $\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & \mathrm{aaaa} & b & \mathrm{bb} & \mathrm{bbb} & i \\ 0 & c & \mathrm{cc} & \mathrm{ccc} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & \mathrm{ii} \\ 0 & d & \mathrm{dd} & \mathrm{ddd} & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} & \mathrm{iii} \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & \mathrm{hh} & \mathrm{iiii} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \mathrm{dd} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, ici lignes 4,6,7 et 8

les colonnes primaires $\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & \mathrm{aaaa} & b & \mathrm{bb} & \mathrm{bbb} & i \\ 0 & c & \mathrm{cc} & \mathrm{ccc} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & \mathrm{ii} \\ 0 & d & \mathrm{dd} & \mathrm{ddd} & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} & \mathrm{iii} \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & \mathrm{hh} & \mathrm{iiii} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \mathrm{dd} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, ici colonnes 4,6,7 et 8

2.6. Caractérisation de l'idéal WF.

Avant tout remarquons que, si M=(M_{ij}), WM=$(\mathrm{M}_{i,j-1}\mathrm{W}_{j-1j})$.

Lorsque j>i posons $W_{j-1j} = \begin{pmatrix} I_j \\ 0 \end{pmatrix}$ alors il est clair que $\mathrm{M}_{i,j-1}\mathrm{W}_{j-1,j}$ est tout simplement formée par les $\mathrm{z_j}$ premières colonnes (c'est à dire colonnes secondaires) de la matrice $\mathrm{M}_{i,j-1}$, et comme dans $M_{\mathrm{ij}-1}$ les $z_{i-1}-z_i$ dernières lignes de ces colonnes sont nulles (c'est à dire les lignes primaires des colonnes secondaires), les $z_{i-1}-z_i$ dernières lignes de $\mathrm{M}_{i,j}-1\mathrm{W}_{j-1,j}$ (c'est à dire les lignes primaires), sont nulles.

Lorsque j=i on voit facilement que les blocs diagonaux de WM sont nuls.

On en déduit que si une matrice fractale M est un élément de WF ses lignes primaires et les blocs diagonaux sont nuls, et comme M_{11} contient les autres nous retiendrons que si M est un élément de WF ses lignes primaires et le bloc M_{11} sont nuls

La multiplication $P \longmapsto P\mathrm{W}_{j-1j}$ étant une surjection de $\mathcal{M}_{z_1z_{j-1}}(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_{z_1z_j}(\mathbb{C})$ cette condition est suffisante: une matrice fractale est un élément de WF si et seulement si ses lignes primaires et le bloc M_{11} sont nuls.

D'où la

Définition 27. *propriétés W et W_k*

On dira qu'une matrice $M \in F$ possède la propriété W lorsque ses blocs diagonaux M_{jj} sont nuls, de même que toutes ses lignes primaires; on dira qu'elle possède la propriété W_k lorsque ceci est vrai à partir de la ligne de blocs $(M_{\mathrm{kk}}, ..., M_{\mathrm{kt}_1})$ vers le bas.

Proposition 28. *Soit une matrice fractale M=$(M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,.,t_1\}^2}$ qui possède la propriété Wq+1 et ρ_q un polynome annulateur de N_{qq}. Alors la matrice M'=$\rho_q(M)M$ possède la propriété Wq.*

Démonstration.

i) Dans le produit $M\rho_q(M) = \rho_q(M)M$ observons ce qui se passe au niveau du bloc $\mathrm{M'}_{\mathrm{qq}}$:

dans la matrice M qui est fractale le bloc Mqq est $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ le zéro supérieur est égal à $M_{q+1,q+1}$ et le zéro inférieur relève de la structure fractale.

d'autre part$\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_q(M_{q+1,q+1}) & * \\ 0 & \rho_q(N_{\mathrm{qq}}) = 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ce qui établit le résultat pour le bloc M'qq.

ii) Considérons les lignes primaires, hors diagonale:

Remarquons d'abord que dans une matrice fractale, lorsque le bloc $\mathrm{M_{ij}}$ est de taille (u,v) et le bloc $\mathrm{M}_{i+1,j+1}$ est de taille (u',v'), si v>v' les u-u' dernières coordonnées des v' premières colonnes sont nulles; c'est à dire les éléments des colonnes secondaires dans les lignes primaires: d'où, dans $\rho_k(M)$ qui est une matrice fractale, **les lignes primaires** numérotées $\{\sum_{k=1\ldots q} z_k\} - z_{q+1} + 1$, ..., $\sum_{k=1\ldots q} z_k$ (c'est à dire celles qui contiennent le bloc $\rho_k(N_{\mathrm{kk}}) = 0$) **contiennent des zéros dans les colonnes secondaires**, elles ont donc l'allure suivante ($0 \ \ldots \ 0 \ \ \rho_k(N_{\mathrm{kk}}) = 0 \ \ 0 \ * \ 0 \ * \ \ldots. \ * \ 0$), où la partie mauve est nulle parce que la matrice est triangulaire supérieure par blocs, et dans la partie verte les zéros corespondent à notre remarque.

Par hypothèse les colonnes de M ont l'allure suivante $\begin{pmatrix} * \\ \ldots. \\ \ldots \\ * \\ *_{\mathrm{ij}} \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire **les lignes primaires** de numéro supérieur ou égal à $\{\sum_{k=1\ldots q} z_k\} + 1$ **sont nulles** (la partie bleue);on voit clairement que dans $\rho_q(M')M$ les lignes primaires$\{\sum_{k=1\ldots q} z_k\} - z_{q+1} + 1$, ..., $\sum_{k=1\ldots q} z_k$ sont nulles.

D'où le théorème

Théorème 29. *Soit la matrice fractale $M = (M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,.,t_1\}^2}$ pour chaque $j \leqslant t_1$ on désigne par ρ_j le polynome caractéristique de N_{jj} et $\mu_q = \rho_q(M) \ldots. \rho_{t_1-1}(M)\rho_{t_1}(M)$ et $\mu = \mu_1$.*

Alors la matrice $\mu(M)$ possède la propriété W.

En particulier les blocs $\mu(M_{j,j})$ de même que les lignes primaires toutes entières sont nuls.

On remarquera que le degré de μ est égal à la somme des tailles des $N_{j,j}$, c'est à dire la taille de M_{11}, c'est à dire p.

Démonstration.

La démonstration se fera par récurrence descendante en remarquant que si Pet Q sont des polynômes Q(M)P(M)=P(M)Q(M).

L'initialisation est immédiate:

$\rho_{t_1}(M) = \rho_{t_1}\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & N_{t_1 t_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & \rho_{t_1}(N_{t_1 t_1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'hérédité est fournie par la proposition précédente.

□

Exemple 30.

```
Maxima 5.41.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.12
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

(%i8) `m:matrix([1,9,8,8,13,4,5],[0,2,8,8,3,4,5],[0,0,8,8,0,40,51],[0,0,7,8,0,4,5],[0,0,0,0,1,9,13],[0,0,0,0,0,2,3],[0,0,0,0,0,0,1]);`

(%o8) $$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i8) m-ident(7);
```

$$(\%o9)\quad \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) %.(m-2*ident(7));
```

$$(\%o10)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 176 & 184 & 14 & 505 & 669 \\ 0 & 0 & 112 & 120 & 0 & 383 & 499 \\ 0 & 0 & 98 & 104 & 0 & 312 & 466 \\ 0 & 0 & 91 & 98 & 0 & 308 & 399 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i11) %.(m^^2-16*m+8*ident(7));
```

$$(\%o11)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -98 & -1242 & 236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i12)
```

□

2.7. WF,W$\mathcal{A}$ et la propriété W.

Il est évident que W$\mathcal{A}\subset$WF$\cap\mathcal{A}$ mais l'exemple ci-dessous met en évidence le fait que W$\mathbb{C}[A, W]$ n'est pas égal à WF$\cap\mathbb{C}[A, W]$.

Exemple 31. $\mathcal{A}$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ appartient à WF$\cap\mathbb{C}[A, W]$ mais pas à $W\mathbb{C}[A, W]$.

Proposition 32. *Détermination de la codimension de W$\mathcal{A}$ (dans $\mathcal{A}$)*

Rappelons qu'une matrice fractale est déterminée par sa bande supérieure.

Considérons ψ l'endomorphisme de $\mathcal{A}$ défini par $M\longmapsto$MW, de bande supérieure $(0, M_{1,1}W_{1,2}, \ldots\ldots, M_{1,t_1-1}W_{t_1-1,t_1})$.

Supposons dans un premier temps quaucune G-matrice $G_{j,i,k}$ ne manque à $\mathcal{A}$.

Les éléments du noyau sont les matrices M caractérisées par la propriété suivante: dans chaque M_{1j} les z_{j+1} premières colonnes sont nulles; ce qui signifie que le noyau « correspond » aux $z_j - z_{j+1}$ dernières colonnes de chaque $M_{1,j}$; d'où une dimension égale à $z_1(z_1\text{-}z_2+z_2\text{-}z_3+..+z_{t_1}\text{-}0)=z_1^2$.

Considérons maintenant le cas général:

Tout zéro permanent (nécessairement admissible) dans une colonne primaire de la bande supérieure diminue la dimension du noyau de ψ de 1; supposons qu'il y en ait q dans les lignes primaires et r dans les lignes secondaires , par suite la dimension du noyau de ψ est $z_1(z_1$-z_2+z_2-$z_3+..+z_{t_1}$-$0)$-q-r=z_1^2-q-r, ce qui constitue la codimension de l'image, c'est à dire de $W\mathcal{A}$, relativement à $\mathcal{A}$.

Proposition 33. *La propriété W parmi $\mathcal{A}$*

Ici nous repérerons les G-matrices par leur origine, qui se trouve nécessairement dans une zone primaire (ligne ou colonne primaire).

Supposons dans un premier temps qu'aucune G-matrice $G_{j,i,k}$ ne manque à $\mathcal{A}$.

Soit M $\in\mathcal{A}$ dénombrons les contraintes indépendantes à satisfaire pour posséder la propriété W:

i) considérons le bloc diagonal M_{ii}, pour l'annuler (en tenant compte du bloc diagonal inférieur $M_{i+1,i+1}$) il faut annuler les termes de ses colonnes primaires, c'est à dire $z_i(z_i-z_{i+1})$ contraintes

ii) considérons les blocs de la forme $M_{i,j}$, pour j>i, il faut annuler les termes des lignes primaires-colonnes primaires (car ceux des colonnes secondaires sont nuls par définition des matrices fractales), ce qui se traduit par $(z_i$-$z_{i+1})(z_{i+1}$-$z_{i+2}+z_{i+2}$-$z_{i+3}+\ldots+z_t$-$0)$=$(z_i$-$z_{i+1})z_{i+1}$ contraintes.

d'où, au total $z_i(z_i-z_{i+1})+(z_i$-$z_{i+1})z_{i+1}$=${z_i}^2$-z_{i+1}^2 contraintes pour la ième ligne de blocs.

Et par suite $\sum_i(z_i^2-z_{i+1}^2)$=z_1^2 contraintes (en posant z_{t_1+1}=0)

Soit maintenant le cas général:

Ici nous sommes concernés par les zéros permanents admissibles situés dans le bloc M11 ou les lignes primaires-colonnes primaires de la bande supérieure.

Dans le cas des q zéros permanents (nécessairement admissibles) (ou éléments $G_{j,i,k}$ qui manquent) situés à la fois dans les lignes et les colonnes primaires de la bande supérieure cela constitue q contraintes sur M à supprimer.

Considérons les zéros permanents admissibles situés les lignes secondaires du bloc M11 (les lignes primaires ont déjà été considérées), soit leur chaîne manquante s'achève par un élément situé dans une colonne primaire et on retrouve les r éléments de la proposition précédente; ce qui supprime r contraintes sur M; soit la chaine manquante s'achève dans une colonne secondaire et il y a un héritier, c'est à dire:

il y a une suite de G-matrices manquantes ($G_{j,i,k0}$, ...,$G_{j,i,k}$) qui s'interrompt « avant d'atteindre une colonne primaire », sachant que la G-matrice descendante $G_{j,i,k}W$=$G_{j,i,k+1}$ ne manque pas à $\mathcal{A}$; ce cas impose de nouvelles contraintes sur M, il faut annuler les coordonnées de M sur de tels $G_{j,i,k+1}$, cela arrive s fois.

D'où la codimension de $WF\cap\mathcal{A}$:${z_1}^2$-q-r-s

Exemple 34.

Reprenons l'exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 14 & 21 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 16 & 22 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ associé à W=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici il y a zéros permanents admissibles cases (2,1), (2,4), (3,4);

le zéro de la case (2,1) a pour descendant celui de la case (2,4), dont le descendant (2,6) n'est pas manquant , donc s=1.

Conclusion: la codimension de W$\mathcal{A}$ domine celle de WF$\cap\mathcal{A}$ du nombre de zéros permanents admissibles de la « troisième catégorie ».

Définition 35. *Propriété W'*

Une matrice $M\in\mathcal{A}$ possède la propriété W' lorsque pour toute G-matrice qui manque à $\mathcal{A}$, son descendant manque dans M.

Dit autrement : si $G_{j,i,u}$ manque dans $\mathcal{A}$ $G_{j,i,u+1}$ manque dans M.

On remarquera que cela ne peut concerner que des zéros manquants dans des lignes et colonnes secondaires.

Théorème 36. *Une Condition nécessaire et suffisante pour que $M\in\mathcal{A}$ appartienne à $W\mathcal{A}$*

Soit M$\in\mathcal{A}$, M$\in$W$\mathcal{A}$ si et seulement M possède les propriétés W et W'.

Démonstration.

On sait que W$\mathcal{A}\subset$WF$\cap\mathcal{A}$ (ce dernier étant caractérisé par la propriété W).

On sait aussi que la différence de codimensions est s, avec les notations de la proposition précédente.

On sait que les matrices appartenant à W$\mathcal{A}$ vérifient les propriétés W et W' et on sait que la propriété W' ajoute s contraintes à WF$\cap\mathcal{A}$, d'où les codimensions de W$\mathcal{A}$ et du sous-espace de $\mathcal{A}$ qui est défini par les propriétés W et W' sont égales, l'un contient l'autre donc ils sont égaux.

Ceci établit le caractère suffisant, le caractère nécessaire a été établi plus haut. □

2.8. Le problème des descendants des zéros permanents.

Nous avons vu plus haut qu'une matrice M de l'Algèbre $\mathcal{A}$ appartient à W$\mathcal{A}$ si et seulement si elle possède la propriété W et pour tout zéro permanent de $\mathcal{A}$, situé dans une colonne et une ligne secondaires son descendant dans M est nul (propriété W').

Pour la suite nous aurons besoin de

Lemme 37. *Soit une matrice fractale* $A=\begin{pmatrix} A11 & A12 & ... & ... & & A1z \\ 0 & A22 & & & & .... \\ 0 & 0 & & & & .... \\ .... & ... & .... & & & .... \\ & & ... & ... & \mathrm{Az}-1,z-1 & ... \\ & & & ... & 0 & \mathrm{Azz} \end{pmatrix}$ *associée à la partition (z1,z2,..,zp), si on désigne pour tout* $k\in\{1,....,p-1\}$ *par A(k) la matrice extraite de Alimitée aux k premières lignes et colonnes de blocs alors A(k+1) peut être considérée comme une matrice fractale associée à la partition (z1+z2+..+zk,zk+1).*

Nous allons établir que si A est une matrice fractale et P le polynôme caractéristique du bloc A11) possède la propriété W'.

Si on considère un zéro permanent situé dans le bloc 1-j son descendant se trouve dans le bloc 1-j+1; pour calculer la valeur de cette case nous écrirons P$\begin{pmatrix} A(j) & A_{1j+1} \\ 0 & A_{j+1,j+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P(A(j)) & ? \\ 0 & P(A_{j+1,j+1}) \end{pmatrix}$ afin de retrouver cette valeur dans ?.

Définition 38. *P^**

Soit une matrice triangulaire par blocs $M=\begin{pmatrix} C & H \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et *$P(X)=\sum p_k X^k$ on désignera par $P^*(C,H,D)$ la matrice $\sum p_k(C^{k-1}H+C^{k-2}\mathrm{HD}+C^{k-2}\mathrm{HD}^2+\ldots+\mathrm{HD}^{k-1})$*

Lemme 39. *Soit P(X) un polynome et une matrice triangulaire par blocs $M=\begin{pmatrix} C & H \\ 0 & D \end{pmatrix}$ alors $P(M)=\begin{pmatrix} P(C) & P^*(C,H,D) \\ 0 & P(D) \end{pmatrix}$*

Récurrence immédiate

Lemme 40. *Soit P un polynôme et A une matrice la différentielle en A de l'appplication $M\longmapsto P(M)$ est l'application $\mathrm{dP}_A\colon H\longmapsto P^*(A,H,A)$*

Démonstration.

immédiat □

Nous recherchons la valeur des cases descendantes des zéros permanents, celles-ci se trouvent sous la diagonale du bloc 1-j+1 dans P(A), nous allons donc regarder sous la diagonale de $P^*(A(j), A_{1j+1}, A_{j+1,j+1})$.

Pour montrer que les termes (u,v) avec u>v de P*(A,H,A) sont nuls il suffit de montrer que P(A+H)$_{(u,v)}$ ne contient pas de termes linéaires en fonction des coefficients de H, ce que allons établir par récurrence:

Proposition 41.
Soit A triangulaire supérieure, Q son polynôme caractéristique, un couple (u,v) u>v,alors quel que soit H Q(A+H)$_{(u,v)}$ ne contient pas de termes linéaires en fonction des coefficients de H

Démonstration.
Soit M=(mij) où pour tout (i,j) tel que i>j mij=tij et sinon mij=aij et Q(X)=$\prod(X-\mathrm{aii})$*; il suffit de montrer que dans Q(M) les éléments des cases (u,v) pour u>v ne contiennent pas de termes linéaires en les tij.*

On remarquera que si les tij sont tous nuls Q(X) est le polynôme caractéristique de M d'où Q(M) sera nul; ce qui signifie que dans Q(M) les termes sont des expressions polynomiales en les tij ,sans termes constants.

Quitte à remplacer M par M-annIn et Q(X) par Q(X+ann) on peut supposer M=$\begin{pmatrix} N & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *afin de raisonner par récurrence.*

Le résultat est vrai pour les matrices de petite taille; suppossons le vrai pour N et soit le vecteur ligne T, on peut montrer par récurrence que $\begin{pmatrix} N & C \\ T & 0 \end{pmatrix}^k$ $=$ $\begin{pmatrix} N^k+N^{k-2}\mathrm{CT}+N^{k-3}\mathrm{CTN}+\ldots+\mathrm{CTN}^{k-2} & N^{k-1}C \\ \mathrm{TN}^{k-1} & \mathrm{TCN}^{k-2} \end{pmatrix}$ *MODULO LES TERMES EN* t^m*(m>1)*

D'où en posant Q(X)=XP(X) et Q(X)=$\sum\mathrm{qkXk}$

Q(M)=$\begin{pmatrix} Q(N)+P^*(N,\mathrm{CT},N) & * \\ \mathbb{T}P(N) & * \end{pmatrix}$ *(modulo les termes de degré supérieur ou égal à 2 en les tij)* $=\begin{pmatrix} P^*(N,\mathrm{CT},N) & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ *et il suffit d'invoquer l'hypothèse de récurrence sur* $P^*(N,\mathrm{CT},N)$*, dont les termes sont ceux de dP*$_N$*(CT), modulo les termes de degré supérieur ou égal à 2.* □

Lemme 42.
Soit M=$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix}$*, N triangulaire supérieure de taille n, N=*$\begin{pmatrix} N' & C \\ 0 & e \end{pmatrix}$ *et H=*$\begin{pmatrix} K1 & 0 \\ K2 & 0 \end{pmatrix}$ *et P un polynôme* $P^*(N,H,N)=(P^*(N,H,N'),\mathrm{NC})$.

Donc on peut s'aider de dP$_N$*(H) pour étudier* $P^*(N,H,N')$.

Lemme 43.
Soit A triangulaire supérieure, Q un multiple de son polynôme caractéristique P; un couple (u,v) u>v,alors quel que soit H Q(A+H)$_{(u,v)}$ ne contient pas de termes linéaires en fonction des coefficients de H.

Démonstration.
Si on pose Q=RP, on sait déjà que la partie linéaire des termes sous la diagonale de P(A+H) est nulle et que les autres termes de P(A+H) n'ont pas de terme constant (rappelons que P(A)=0); par ailleurs dans tout polynôme en A+H les termes sous la diagonale sont linéaires par rapport aux tij; ce qui établit le résultat. □

Lemme 44.
Soit A=$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix}$*, N,N' triangulaires supérieures, Q le polynôme caractéristique de N ,N=*$\begin{pmatrix} N' & C \\ 0 & e \end{pmatrix}$*et ; un couple d'entiers (u,v) où u>v alors la partie linéaire de* $Q(A+H)_{\mathrm{uv}}$ *est nulle.*

Démonstration.

Dans le cas où H est triangulaire supérieure le résultat est évident, donc par linéarité de la différentielle dQ_A il suffit de considérer le cas où H=$\begin{pmatrix} S & 0 \\ T & R \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure inférieure stricte , alors Q(A+H)=$\begin{pmatrix} Q(N+S) & 0 \\ Q^*(N,T,N') & Q(N'+R) \end{pmatrix}$; le résultat découle des lemmes précédents. □

Lemme 45.

Soient N,N',N" triangulaires supérieures telles que N=$\begin{pmatrix} N' & C \\ 0 & e \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} N'' & D & C \\ 0 & f & G \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix} N & N1 & N2 \\ 0 & N' & N3 \\ 0 & 0 & N'' \end{pmatrix}$, Q le polynôme caractéristique de N, (u,v) tels que u>v.

(on remarquera que le bloc 3-1 de H et de Q(A+H) est nul afin de respecter les règles des matrices fractales)

Alors la partie linéaire de Q(A+H)(u,v) est nulle

Démonstration.

De même il suffit de considérer le cas H=$\begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ T & U & 0 \\ 0 & V & Z \end{pmatrix}$ triangulaire inférieure stricte

Q(A+H)=$\begin{pmatrix} Q(N+S) & * & * \\ Q^*(N+S,T,N'+U) & Q(N'+U) & * \\ 0 & Q^*(N'+U,V,N''+Z) & Q(N''+Z) \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} Q(N+S)=0 & * & * \\ Q^*(N+S,T,N'+U) & Q(N'+U)=0 & * \\ 0 & Q^*(N'+U,V,N''+Z) & Q(N''+Z)=0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ Q^*(N+S,T,N'+U) & 0 & * \\ 0 & Q^*(N'+U,V,N''+Z) & 0 \end{pmatrix}$.

□

Remarque 46.

On pourrait continuer avec autant de lignes de blocs que dans F; nous ne le ferons pas pour ne pas « alourdir » l'écriture, convaincus qu'une bonne compréhension des cas de 2 et de 3 lignes était préférable à une énorme construction formelle.

Théorème 47.

Soit P le polynome réducteur de A ainsi qu'une configuration de zéros permanents α située dans le bloc 1-k

alors dans P(A) la case descendante de α est nulle.

Démonstration.

Soit une configuration de zéros permanents dans le bloc 1-k, l'application du lemme 37 et de la Définition 20 pour transformer $(\mathrm{A_{ij}})_{(i,j)\in\{1,....,k+1\}}$ en une matrice triangulaire supérieure $(\mathrm{A'_{ij}})_{(i,j)\in\{1,....,k+1\}}$ qui aura des zéros significatifs dans la k-ième colonne de blocs, ce qui assurera (par application des lemmes précédents) dans P(A) la nullité de leurs descendants (qui se situent dans la k+1 ième colonne de blocs.

. □

Remarque 48. Remarquons que le résultat reste vrai lorsque A==$\begin{pmatrix} A11 & A12 & ... & ... & & A1z \\ 0 & A22 & & & & .... \\ 0 & 0 & & & & .... \\ .... & ... & .... & & & .... \\ & & ... & ... & \mathrm{Az}-1,z-1 & ... \\ & & & ... & 0 & \mathrm{Azz} \end{pmatrix}$, associée à une partition qui compte z lignes et colonnes.

Il suffit de se référer à la structure triangulaire par blocs de A: les calculs sur les blocs 1-1,1-2,2-2 jusqu'à k+1-k+1 ne font intervenir que ceux-ci.

Théorème 49. *Soit A une matrice fractale et P le polynôme caractéristique de A11 alors P(A) possède la propriété W'*

Démonstration.

Il suffit d'appliquer les résultats ci-dessus à chaque chaîne manquante.

Si $G_{j,i,k0}$ a son extrémité dans A11 et si $G_{j,i,k0}$,..., $G_{j,i,k}$ manquent à $\mathcal{A}$, mais pas $G_{j,i,k+1}$ On considérera A(k) pour la valeur de k autant que nécessaire.

□

Exemple 50. Soit W=$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ qui représente u: $\begin{array}{l} 0\leftarrow e1\leftarrow e5\leftarrow e7\\ 0\leftarrow e2\leftarrow e6\\ 0\leftarrow e3\\ 0\leftarrow e4 \end{array}$

On considère la matrice fractale A=$\begin{pmatrix} 7&0&6&-1&11&3&4\\ 0&3&1&-2&5&15&0\\ 0&0&2&-3&0&7&8\\ 0&0&13&-4&0&9&10\\ 0&0&0&0&7&0&11\\ 0&0&0&0&0&3&5\\ 0&0&0&0&0&0&7 \end{pmatrix}$.

Le zéro de la première ligne-deuxième colonne traduit le manque de $G_{1,2,1}$, tandis que $G_{1,2,2}$ ne manque pas: $G_{1,2,1}$ est donc la source et $G_{1,2,2}$ la borne extérieure.

Le zéro de la deuxième ligne-dernière colonne n'est pas un manque comme on pourra le vérifier en calculant A^2 qui n'aura pas de zéro à cette place.

Les deux zéros de la troisième ligne-cinquième colonne et quatrième ligne-cinquième colonne troisième sont la conséquence de la nature fractale de A et ne constituent pas un manque.

$A=7G_{1,1,0}+3G_{2,2,0}+2G_{3,3,0}-4G_{4,4,0} + 6G_{1,3,2} + 1G_{2,3,1} - 1G_{1,4,2} - 3G_{3,4,0} - 2G_{2,4,1} + 13G_{4,3,0}+11G_{1,1,1}+5G_{2,1,0}+3G_{1,2,2}+15G_{2,2,1}+7G_{3,2,0}+9G_{4,2,0}+4G_{1,1,2}+8G_{3,1,0}+10G_{4,1,0}$

Par suite

Théorème 51.

Si A est une matrice fractale il existe un polynome P tel que P(A) posssède les propriétés W et W' et par suite appartient à $W\mathbb{C}[A, W]$.

Le polynôme unitaire de plus bas degré qui convient sera appelé le polynôme réducteur de la matrice A.

Démonstration.

Il suffit d'appliquer les Théorèmes 28 et 41-43-44; les arguments employés s'appliquent dans les deux cas au polynôme caractéristique de A11, par suite le polynôme réducteur sera un diviseur du polynôme caractéristique de A11.

Il sera donc de degré inférieur ou égal à p. □

2.9. Quelques outils pour l'étude ultérieure.

Soit une matrice de Weyr $W(z_1,..,z_{t_1})$

Définition 52. *Réduction d'ordre k d'une matrice de $F(z_1,..,z_{t_1})$*

Soit une matrice $M=(M_{i,j})$ de $F(z_1,..,z_{t_1})$ on désignera sous le nom de réduite d'ordre k la matrice $M_k=(M_{i,j})_{i\geqslant k, j\geqslant k}$; M est elle-même la réduite d'ordre 1.

.

Proposition 53. *Expression algébrique de la réduction*

Soit une matrice $M=(M_{i,j})$ de $F(z_1,..,z_{t_1})$, ${}^tW^k M W^k = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & M_{k+1}\end{pmatrix}$

Démonstration.

Il suffit d'établir le résultat pour k=1, ce qui se fait en appliquant la relation ${}^{t}W_{i,i+1}A_{\mathrm{ij}}W_{j,j+1} = A_{i+1,j+1}$. □

Définition 54. *Liste des polynomes réducteurs d'une matrice fractale*

Soit $A=(A_{\mathrm{ij}})$ *et pour tout* $k\in\{1, ..., t_1\}$ $A_k=(A_{\mathrm{ij}})_{i>k,j>k}$, *on désignera par* $(\Delta_1, ..., \Delta_{t_1})$ *les polynomes réducteurs des réduites* A_k *et par* d_k *leur degrés respectifs.*

3. Le cas d'une Algèbre engendrée par deux matrices commutantes

Théorème 55.

Soient $(A,W)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ *où* $AW=WA$ *alors* $\dim(\mathbb{C}[A,W])\leqslant\sum_{k=1....t_1} d_k$.

Le Théorème améliore la majoration établie historiquement par Gerstenhaber ([2]), dans l'esprit de la Géométrie Algébrique, et qui a reçu par la suite de nombreuses démonstrations, soit dans cet esprit soit plus élémentaires et longues...(dont [1] etc..).

Démonstration.

La démonstration se fera par récurrence sur t_1.

0) Si $t_1=1$ le résultat est immédiat: $A=A_{1,1}$ et $W=I$; il suffit d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à t_1-1.

On pose $A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_{1,1}\in\mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, et $W=\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{W_{12}}=(W_{1,2}, 0, ..., 0)$ et $W_2=\begin{pmatrix} 0 & W_{2,3} & 0 & .... & 0 \\ ... & 0 & W_{3,4} & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 & & \\ ... & .... & ... & ... & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ est aussi une matrice de Weyr de partition associée $(z_2,..,z_{t_1})$, $A_2W_2=W_2A_2$, d'où $\dim(\mathbb{C}[A_2,W_2])\leqslant\sum_{k=2....t_1} d_k$ par application de l'hypothèse de récurrence.

2) Les Théorèmes 24,25,27 entraînent $\mathbb{C}[A,W]=\mathrm{Vect}(I,A,..,A^{d_1-1})\oplus W\mathbb{C}[A,W]$.

3) Remarquons que pour $k\geqslant 0$ $W^{k+1}A^q=\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{1,1}{}^q & * \\ 0 & A_2^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k A_2^q \end{pmatrix}$.

4) Donc la dimension de $\mathrm{Vect}(W^{k+1}A^q,\ q \geqslant 0,\ k \geqslant 0)$ est inférieure ou égale à celle de $\mathrm{Vect}(W_2^k A_2^q, q\geqslant 0, k\geqslant 0)$, qui est égale à celle de $\mathbb{C}[A_2,W_2]$.

D'où la dimension de $\mathbb{C}[A,W]$est inférieure ou égale à $\sum_{k=1....t_1} d_k \leqslant n$.

□

Le résultat s'étend sans difficulté, dans le cas algèbriquement clos, à toute Algèbre commutative engendrée par 2 matrices. Ceci constitue le Théorème de Gerstenhaber.

Par ailleurs l'inégalite $\dim(\mathbb{C}[A,W])\leqslant\sum_{k=1....t_1} d_k$ est une amélioration du même Théorème.

4. Le cas d'une algebre engendrée par trois matrices commutantes

La dimension de l'Algèbre engendrée par trois matrices qui commutent est encore dans une grande mesure, ouverte; nous allons l'étudier dans le cas particulier de W, A et B, c'est à dire une matrice de Weyr et deux matrices fractales telles que AB=BA.

Dans toute la suite A et B seront toujours supposées commuter.

Nous allons employer la même méthode que dans le cas de W et A.

4.1. La propriété W.

Définition 56.

Soient deux matrices fractales $A{=}(A_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,.,t_1\}^2}$ *et* $B{=}(B_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,.,t_1\}^2}$*; comme plus haut on notera* $A_{j,j}{=}\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} & * \\ 0 & A'_{j,j}\end{pmatrix}$*, avec* $A_{t_1+1,t_1+1}{=}0$ *et* $B_{j,j}{=}\begin{pmatrix} B_{j+1,j+1} & * \\ 0 & B'_{j,j}\end{pmatrix}$*, avec* $B_{t_1+1,t_1+1}{=}0$.

Pour chaque $j{\in}\{1, ..., p\}$ *on désigne par* ρ_j *le polynôme minimal de* A'_{jj}*, par* σ_j *le polynome minimal de* B'_{jj} *et par* $\chi_{j,r}$ *le polynôme minimal de* $A'_{\mathrm{jj}}{+}rB'_{\mathrm{jj}}$ *(où r est un entier).*

Théorème 57.
Quelle que soit la partition de $\{1, ..., p\}$ *en deux sous-ensembles (dont un éventuellement vide) I et J alors* $\pi(I,J) = \prod_{k\in I}\rho_k(A)\prod_{k\in J}\sigma_k(B)$ *possède la propriété W.*

De même $\prod_{k\in\{1,\ldots,p\}}\chi_{k,r}(A+\mathrm{rB})$ *possède la propriété W.*

Démonstration.
Voir les 27-28, seule la structure fractale et l'annulation des blocs de la diagonale sont utilisés. □

4.2. La propriété W'.

Proposition 58.
Soit une partition comme au Théorème 52, alors la matrice $\pi(I, J) = \prod_{k\in I}\rho_k(A)\prod_{k\in J}\sigma_k(B)$ *possède la propriété W'; il en est de même des matrices* $\prod_{k\in\{1,\ldots,p\}}\chi_{k,r}(A+\mathrm{rB})$.

Démonstration.
Nous retrouvons la problématique du 37 etc...

Comme dans le paragraphe 2 nous allons d'abord étudier le cas $\mathrm{A}{=}\begin{pmatrix} A11 & A12 \\ 0 & A22\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}{=}\begin{pmatrix} B11 & B12 \\ 0 & B22\end{pmatrix}$, avec P polynôme caractéristique de A'11, défini par $\mathrm{A11}{=}\begin{pmatrix} A22 & * \\ 0 & A'11\end{pmatrix}$ et Q polynôme caractéristique de B22.

Pour établir que P(A)Q(B) possède la propriété W' il faut considérer un zéro permanent de l'Algèbre $\mathbb{C}[W,\ A,\ B]$ qui se trouve dans A22 et B22 et étudier le bloc X dans $\mathrm{P(A)Q(B)}{=}\begin{pmatrix} P(A11)Q(B11) & X \\ 0 & P(A22)Q(B22)\end{pmatrix}$; X est égal à $\mathrm{P(A11)Q}^*(B11, B12, B22){+}\mathrm{P}^*(A11, A12, A22)Q(B22) = \mathrm{P(A11)Q}^*(B11, B12, B22){+}0{=}\mathrm{P(A11)Q}^*(B11, B12, B22)$; nous nous intéressons en fait à $\mathrm{P(A11)Q}^*(B11, B'12, B11)$

Or A et B commutent donc A_{11} et B_{11} aussi (de même que A_{22} et B_{22}) par suite $A22^kQ^*(B22,\ B'12,\ B22) = Q^*(B22,\ A22^kB'12,\ B22)$ qui possède un 0 en position (u,v) et le résultat attendu suit par linéarité.

Le passage au cas général se fait comme dans les 38 etc. □

4.3. L'idéal réducteur d'un couple de matrices fractales commutantes.

Définition 59. *Idéal réducteur d'un couple (A,B) de matrices fractales commutantes*

Soit un couple (A,B) de matrices fractales commutantes on appellera idéal réducteur du couple l'idéal $\mathrm{I(A,B)}{=}\{P(X,Y)\in\mathbb{C}[X,Y], P(A,B)$ possède les propriétés W et $W'\}$; c'est à dire l'ensemble des polynomes P(X,Y) tels que $\mathrm{P(A,B)} \in W\mathbb{C}[A,B]$.

Proposition 60.
Avec les notations précédentes I(A,B) contient les polynômes $\pi(I, J) = \prod_{k\in I}\rho_k(X)\prod_{k\in J}\sigma_k(Y)$ *et* $\prod_{k\in\{1,\ldots,p\}}\chi_{k,r}(A+\mathrm{rB})$.

Donc, la dimension d'un supplémentaire de $W\mathbb{C}[A,\ B]$ dans $\mathbb{C}[A,\ B]$ est la dimension de l'anneau quotient $\mathbb{C}[X,Y]/\mathrm{I(A,B)}$, qui est majorée par la dimension de l'anneau quotient $\mathbb{C}[X, Y]/{<}\prod_{k\in I}\rho_k(X)\prod_{k\in J}\sigma_k(Y),\ \prod_{k\in\{1,\ldots,p\}}\chi_k(X+\mathrm{rY}){>}$.

Théorème 61.

Avec les notations précédentes la dimension de l'anneau quotient $\mathbb{C}[X, Y]/<\prod_{k\in I}\rho_k(X)\prod_{k\in J}\sigma_k(Y),\ \prod_{k\in\{1,\ldots,p\}}\chi_k(X+\mathrm{rY})>$ est inférieure ou égale à p.

Démonstration. □

L'idéal $\mathcal{Y} = <(\prod_{k\in I}\rho_k(X)\prod_{k\in J}\sigma_k(Y)),\ \left(\prod_{k\in\{1,\ldots,p\}}\chi_k(X+\mathrm{rY}),\, r\in\mathbb{C}\right)>$ est zéro-dimensionnel donc la dimension de $\mathbb{C}[X,Y]/<\prod_{k\in I}\rho_k(X)\prod_{k\in J}\sigma_k(Y),\ \prod_{k\in\{1,\ldots,p\}}\chi_k(X+\mathrm{rY})>$ est égale au nombre de points de la variété qu'il définit.

Un point (x,y) est un zéro de l'idéal $\mathcal{Y}$ si et seulement si x est valeur propre de $A_{1,1}$, y est valeur propre de $B_{1,1}$ et x+ry est valeur propre de $A_{1,1}+rB_{1,1}$, pour tout r; par suite les zéros de $\mathcal{Y}$ sont les couples de valeurs propres associées, c'est à dire p=z_1 points.

Ce qui permet le raisonnement par récurrence suivant, qui est essentiellement le même que dans le cas de deux matrices:

Théorème 62.
Soient (A,B,W)∈$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$où AW=WA,BW=WB,AB=BA alors dim($\mathbb{C}$*[A,B,W])*$\leqslant \sum_{k=1\ldots t_1} z_k = n$.

Le Théorème améliore la majoration établie historiquement par Gerstenhaber ([2]), dans l'esprit de la Géométrie Algébrique, et qui a reçu par la suite de nombreuses démonstrations, soit dans cet esprit soit plus élémentaires et longues...(dont [1] etc..).

Démonstration.
La démonstration se fera par récurrence sur t_1.

0) Si t_1=1 le résultat est immédiat: A=$A_{1,1}$,B=$B_{1,1}$ et W=I; il suffit d'invoquer le Théorème de Gerstenhaber.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à t_1-1.

On pose A=$\begin{pmatrix} A_{1,1} & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} B_{1,1} & D \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$où $(A_{1,1}, B_{1,1}) \in\mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{C})^2 = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2$et W=$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{\mathrm{W}_{12}}$=$(W_{1,2}, 0, \ldots, 0)$ et W_2=$\begin{pmatrix} 0 & W_{2,3} & 0 & \ldots. & 0 \\ \ldots & 0 & W_{3,4} & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & & \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ est aussi une matrice de Weyr de partition associée $(z_2,..,z_{t_1})$, $A_2W_2=W_2A_2$,$B_2W_2=W_2B_2$,$A_2B_2=B_2A_2$ d'où dim($\mathbb{C}[A_2,B_2,W_2]$)$\leqslant \sum_{k=2\ldots t_1} d_k$ par application de l'hypothèse de récurrence.

2) Les Théorèmes ... entraînent dim($\mathbb{C}$[A,B,W])=dim($\mathbb{C}[X,Y]$/I(A,B)+dim($W\mathbb{C}$[A,B,W]).

3) Remarquons que pour k⩾0 $W^{k+1}A^qB^r=\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{k+1}A^qB^r = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{1,1}{}^qB_{1,1}^r & * \\ 0 & A_2^qB_2^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^kA_2^qB_2^r \end{pmatrix}$.

4) Donc la dimension de Vect($W^{k+1}A^qB^r$, $q\geqslant 0$, $k\geqslant 0$,r⩾0) est inférieure ou égale à celle de Vect($W_2^kA_2^qB_2^r$, $q\geqslant 0, k\geqslant 0$,r⩾0), qui est égale à celle de $\mathbb{C}[A_2,B_2,W_2]$.

D'où la dimension de $\mathbb{C}[A,B,W]$est inférieure ou égale à $\sum_{k=1\ldots t_1} z_k \leqslant n$.

□

d'où le Théorème

Théorème 63.
Avec les notations précédentes $\forall i$, $A_iB_i = B_iA_i$, $A_iW_i = W_iA_i$,$W_iB_i = B_iW_i$, *l'Algèbre* $\mathbb{C}[A, B, M]$ *est de dimension inférieure ou égale à n.*

Démonstration.

M est semblable à une matrice en blocs de Weyr $\begin{pmatrix} \lambda_1 I+W_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \lambda_2 I+W_2 & & .... \\ .... & 0 & .... & 0 \\ 0 & .... & 0 & \lambda_r I+W_r \end{pmatrix}$, comme A et B commutent avec M, elles sont simultanément à M semblables à $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & A_2 & & .... \\ .... & 0 & .... & 0 \\ 0 & .... & 0 & A_r \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} B_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & B_2 & & .... \\ .... & 0 & .... & 0 \\ 0 & .... & 0 & B_r \end{pmatrix}$ telles que $\forall i$, $A_iB_i = B_iA_i$, $A_iW_i = W_iA_i$,$W_iB_i = B_iW_i$; par suite dim($\mathbb{C}[A, B, M) = \sum_{i=1,\ldots,r} \dim(\mathbb{C}[A_i, B_i, W_i])$.

Le résultat découle alors du théorème précédent. □

Remarque 64.

Ce résultat n'était connu que pour n$\leqslant$10. [9]

Paris-Nimes, Juin 2018, révisé Septembre 2019

Bibliographie:

[1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, Linear Multilinear Algebra 27 (1990), 147-157

[2] M. Gerstenhaber, « *On dominance and varieties of commuting matrices* », *Ann. Math.*, vol. 73,1961, p. 324-348

[3] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.

[4] K.C.O' Meara

[5] H. Shapiro, The Weyr Characteristic, American Mathematical Monthly, 106, december, p 919-929, 1999.

[6] A.Sethuraman, The Algebra generated by Three Commuting Matrices, *Mathematics Newsletter, Ramanujam Math. Soc.,* **21** number 2, September 2011, 26-31.