La Domination des Matrices et la décomposition de Frobenius

par Patrick Teller

Fin Mars 2021

Soient deux matrices carrées A$\in\mathcal{M}_n(K)$ et B$\in\mathcal{M}_p(K)$, on dira que A domine B (que l'on notera A$\succ B$) lorsqu'il existe un sous-espace F de K^n stable par A et tel que la restriction de A à F est semblable à B.

Il est assez facile de montrer que cette relation est un préordre sur l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans K, et un ordre sur l'ensemble de leurs classes de similitude.

La représentation de A$\succ B$ par la relation matricielle AF=FB, avec rang(F)=p, fournit un formalisme assez utile.

Le cas des matrices compagnons est étudié, ce qui ouvre la voie à l'utilisation de la décomposition de Frobenius pour caractériser la domination dans le cas général.

Par ailleurs l'usage de la représentation matricielle de la domination offre un point de vue matriciel pour une démonstration effective du Théorème de Frobenius à l'opposé des démonstrations classiques qui ont recours à des preuves d' existence.

Parmi les démonstrations classiques on citera [1], qui se place dans le cadre de la Théorie des Modules, [2], qui semble fournir une base commune, [3], qui établit de manière très élégante l'existence d'un vecteur x tel que le polynôme minimal $\pi_{f,x}$ de la restriction de f au sous-espace cyclique engendré par x soit égal au polynôme minimal π_f (seule condition: que le corps K soit infini) et celle de B. Randé [6], qui se veut effective, et qu'il est possible d'alléger par l'usage du point de vue développé ici.

Le Théorème de Frobenius établit pour tout endomorphisme f d'un espace E de dimension finie l'existence et l'unicité de la décomposition de l'espace de E en une somme directe de sous-espaces cycliques E_i, tels que pour tout i $\pi_{f|E_{i+1}}$ divise $\pi_{f|E_i}$, où π désigne le polynôme minimal.

Les étapes de la démonstration classique (=non effective) sont:

1. Existence d'un vecteur x tel que le polynôme minimal $\pi_{f,x}$ de la restriction de f au sous-espace cyclique engendré par x soit égal au polynôme minimal π_f.

2. Existence, un sous-espace cyclique pour f étant donné, d'un supplémentaire stable par f.

3. Unicité de la décomposition.

Plutôt que de raisonner en termes d'endomorphismes le choix a été fait d'utiliser des matrices et pour cela d'introduire la représentation par la relation AT=T$\tilde{A}$ pour signifier que le sous-espace engendré par les colonnes de la matrice T est stable par A et que les images par A de celles-ci s'expriment dans la multiplication de T par $\tilde{A}$. Cette écriture qui généralise la description des vecteurs propres et des sous-espaces, fournit donc une double information: le sous-espace stable et la nature de la restriction de A à ce sous-espace, elle permet de réduire à des équations matricielles de Sylvester la recherche des sous-espaces stables.

La démonstration effective suivra un autre ordre:

Construction d'une décomposition en somme directe de sous-espaces cycliques.

Détermination d'un sous-espace cyclique de dimension maximale.

Détermination pour un sous-espace cyclique de dimension maximale d'un supplémentaire stable. Ce processus étant achevé la décomposition de Frobenius est acquise.

Unicité de la décomposition.

En fin de compte on verra que la décomposition de Frobenius permet une caractérisation simple de la domination.

Dans tout ce qui suit K désigne un corps quelconque et $(e_1, \ldots., e_n)$ désigne la base canonique de K^n.

1 Sous-espace vectoriels stables par une matrice

Définition 1. *Soit deux entiers naturels 0<p<n on désignera par $\mathcal{GL}_{p,n}(K)$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes de rang p.*

Théorème 2.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et une matrice $T \in \mathcal{GL}_{r,n}(K)$, dont on désignera les colonnes par $(T_1, \ldots, T_r)$, le sous-espace vectoriel vect(T_i,i=1,..,r) est stable par A si et seulement si il existe une matrice $\tilde{A} \in \mathcal{M}_r(K)$ telle que $AT = T\tilde{A}$.

Dans le cas d'un sous-espace propre on aura $AT = TD$ où D est scalaire.

Démonstration.

Si on note $\tilde{A} = (p_{\mathrm{ij}})$ $AT = T\tilde{A} \Longleftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, r\}, \mathrm{AT}_j = \sum_{i=1}^{p} p_{\mathrm{ij}} T_i$ □

Dans la suite on désignera indistinctement par T le sous-espace vectoriel dont une base est formée par les colonnes $T_1, .., T_r$ et la matrice dont ce sont les colonnes; on désignera la matrice $\tilde{A}$ du nom de matrice induite.

Remarque 3.

La condition selon laquelle $\mathrm{T} \in \mathcal{GL}_{r,n}(K)$ est nécessaire comme le prouve l'exemple suivant.

T n'appartient pas à $\mathcal{GL}_{3,5}(K)$, la relation AT=TB est vérifiée mais le sous-espace stable par A est de dimension 2, il est engendré par les colonnes de S et la matrice induite, qui ne peut pas être B, est la matrice C.$\langle \quad | \quad |$

$\rangle$

(%i1) `A:matrix([0,0,0,0,0],[1,0,0,0,-1],[0,1,0,0,0],[0,0,1,0,2],[0,0,0,1,0]);`

(%o1) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i5) `B:matrix([0,0,0],[1,0,1],[0,1,0]);`

(%o5) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) `T:matrix([0,0,0],[1,0,1],[0,1,0],[-1,0,-1],[0,-1,0]);`

(%o6) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) `A.T-T.B;`

(%o7) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i11) `S:matrix([0,0],[1,0],[0,1],[-1,0],[0,-1]);C:matrix([0,1],[1,0]);`

(%o11) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(%o12) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i13) `A.S-S.C;`

(%o13) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i14)

En particulier

Définition 4. *Sous-espace directement cyclique*

Soit $(A,T,\tilde{A}) \in \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{GL}_{r,n}(K) \times \mathcal{M}_r(K)$, *tels que* $AT = T\tilde{A}$ *on dira que le sous-espace* T *est directement* A*-cyclique lorsque* $\forall j \in \{1, \ldots, r-1\}, \mathrm{AT}_j = T_{j+1}$.

Dans le cas où $r = n$ *on dira que l'espace est directement* A*-cyclique.*

1

Définition 5.

On appelle matrice compagnon du polynôme $X^k+\sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$ *la matrice* $C=\begin{pmatrix} 0 & ... & & & -a0 \\ 1 & ... & & & -a1 \\ 0 & 1 & & & .... \\ . & 0 & . & & ... \\ 0 & ... & & ... & -a_{k-2} \\ & & ... & 0 \quad 1 & -\mathrm{ak}-1 \end{pmatrix}$

Pour la suite on posera a_k=1 ce qui permettra d'écrire le polynôme sous la forme $\sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$; il est bien connu que $\sum_{i=0}^{k} a_i C^i$=0.

Théorème 6.

Soit $(A,T,\bar{A})\in\mathcal{M}_n(K)\times\mathcal{GL}_{r,n}(K)\times\mathcal{M}_r(K)$, *tels que* $AT=T\tilde{A}$, *T est directement A-cyclique si et seulement si la matrice* $\tilde{A}$ *est une matrice compagnon.*

2 Une relation d'ordre sur les classes de similitude

Définition 7.

Si $(A,B)\in\mathcal{M}_n(K)\times\mathcal{M}_p(K)$ *on dira que A domine B lorsqu'il existe* $V\in\mathcal{GL}_{p,n}(K)$ *tel que AV=VB; on écrira alors* $A\succ B$.

Proposition 8. $\succ$ *est une relation réflexive et transitive sur* $\mathcal{M}(K)=\cup\mathcal{M}_n(K)$

Démonstration.

$V\in\mathcal{GL}_{p,n}(K) \Longrightarrow p\leqslant n$; *soit* $\left\{\begin{array}{c} V\in\mathcal{GL}_{p,n}(K) \\ W\in\mathcal{GL}_{q,p}(K)\end{array}\right. \Longrightarrow \mathrm{VW}\in\mathcal{GL}_{q,n}(K)$, *ce qui assure la transitivité*

□

Proposition 9.

Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n(K)\times\mathcal{M}_p(K)$ *si* $A\succ B$ *et* $B\succ A$ *alors A et B sont semblables.*

Démonstration. *Soit* $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{AV}=\mathrm{VB}, \text{avec } V\in\mathcal{GL}_{p,n}(K) \\ \mathrm{BW}=\mathrm{WA}, \text{avec } W\in\mathcal{GL}_{n,p}(K)\end{array}\right.$, *alors p=n et V, comme W, appartient à* $\mathcal{GL}_n(K)$. □

d'où $\succ$ induit une relation d'ordre sur l'ensemble des classes de similitude de $\mathcal{M}(K)=\cup\mathcal{M}_n(K)$

3 Le Cas des matrices compagnons

Théorème 10.

Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & ... & & & -a0 \\ 1 & ... & & & -a1 \\ 0 & 1 & & & .... \\ . & 0 & . & & ... \\ 0 & ... & & ... & -a_{n-2} \\ & & ... & 0 \quad 1 & -\mathrm{an}-1 \end{pmatrix}$ *et le polynôme* $P(X)=X^r+\sum_{i=0}^{r-1} p_i X^i$.

i. La dimension de Ker(P(A)) est égale au degré de $(P(X)\wedge\pi_A(X))$.

ii. Dans le cas où P(X) divise $\pi_A(X)$, *si on désigne par* $Q(X)=X^{n-r}+\sum_{j=0}^{n-r-1} q_j X^j$ *le quotient de* $\pi_A(X)$ *par P(X) et si on écrit* $P(A)=(C_1,...,C_n)$, *alors*

$\forall j\in\{1,...,n-r\}, C_j=\sum_{i=j}^{j+r-1} p_{i-j}e_i+e_{j+r}$

$\forall k \in \{1,...,r\}, C_{n-r+k} = -\sum_{i=0}^{n-r-1} q_i C_{i+k}$.

Démonstration.

1. Lorsque $P(X) \wedge \pi_A(X) = 1$ il découle du Théorème de Bezout que $P(A) \in \mathcal{GL}_n(K)$.

2. Lorsque $P(X)$ divise $\pi_A(X)$

Comme A est une matrice compagnon, si on note $P(A) = (C_1, ..., C_n)$ alors $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$ $C_{k+1} = \mathrm{AC}_k$.

Il est immédiat que $C_1 = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ .... \\ p_{r-1} \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2 = \mathrm{AC}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ .... \\ p_{r-1} \\ 1 \\ 0 \\ ...0 \end{pmatrix}$, ..., *jusqu'à* $C_{n-r} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ p_0 \\ p_1 \\ .... \\ p_{r-1} \\ 1 \end{pmatrix}$, *par suite les colonnes $C_1, ..., C_{n-r}$ sont linéairement indépendantes. (*)*

Si on suppose que $P(X)$ divise $\pi_A(X)$ il existe $Q(X) = X^{n-r} + \sum_{j=0}^{n-r-1} q_j X^j$ tel que $P(X)Q(X) = \pi_A(X)$ et, par suite $P(A)Q(A) = 0$, c'est à dire $\forall k \in \{1, ..., n\}$ $Q(A)P(A)(e_k) = 0$.

Or $P(A)(e_1) = C_1$ donc $(A^{n-r} + \sum_{j=0}^{n-r-1} q_j A^j) C_1 = 0$, d'où $C_{n-r+1} + \sum_{j=0}^{n-r-1} q_j C_{j+1} = 0$, d'où $C_{n-r+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, ..., \mathrm{Cn} - r)$.

Si on suppose que C_{n-r+1}, ..., C_{n-r+k} appartiennent à $\mathrm{Vect}(C_1, ..., \mathrm{Cn} - r)$ alors, comme $Q(A)P(A)(e_{k+1}) = 0$ et $P(A)(e_{k+1}) = C_{k+1}$, $(A^{n-r} + \sum_{j=0}^{n-r-1} q_j A^j) C_{k+1} = 0$, d'où $C_{n-r+k+1} + \sum_{j=0}^{n-r-1} q_j C_{j+k+1} = 0$, c'est à dire $C_{n-r+k+1} \in \mathrm{Vect}(C_1, ..., C_{n-r+k})$, qui est égal par hypothèse à $\mathrm{Vect}(C_1, ..., C_{n-r})$.

Ce qui établit le rang de la matrice $P(A)$.

3. Si $Z(X) = P(X) \wedge \pi_A(X)$ alors du 2. découle degré(Z(X))=n-rang(Z(A)).

Par ailleurs il existe $(U(X), V(X))$ tels que $U(X)P(X) + V(X)\pi_A(X) = Z(X)$ donc $U(A)P(A) = Z(A)$, or $U(X)$ est premier avec $\pi_A(X)$ donc $U(A)$ est inversible et rang(P(A))=rang(Z(A)) et le résultat est acquis..

En résumé, dans le cas général aussi le degré de $P(X) \wedge \pi_A(X)$ est égal à la dimension de Ker(P(A)).

Des relations établies au-dessus entre les colonnes de $P(A)$, dans le cas où $P(X)$ divise $\pi_A(X)$, on déduit que les vecteurs $M_1 = e_{n-r} + \sum_{i=0}^{n-r-1} q_i e_{i+1}$, $A(M_1) = e_{n-r+1} + \sum_{i=0}^{n-r-1} q_i e_{i+2}$, ..., $A^{r-1}(M_1) = e_n + \sum_{i=0}^{n-r-1} q_i e_{i+r}$ appartiennent à Ker(P(A)) et, comme ils sont linéairement indépendants, ils en constituent une base. □

Théorème 11. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de polynôme minimal $\pi_A(X)$ et B une matrice compagnon de polynôme minimal $\pi_B(X)$ de degré p, $A \succ B$ si et seulement si $\pi_B(X)$ divise $\pi_A(X)$.*

Démonstration. □

Nous allons être conduits lorsque $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_r(K)$ à considérer l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,r}(K)$ défini par $M \longrightarrow \mathrm{AM} - \mathrm{MB}$; relativement à la base $(E_{1,1}, E_{2,1}, ..., E_{n,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{n,r})$ la matrice de cet endomorphisme est $I_r \otimes A - {}^tB \otimes I_n$; dans le cas où $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & & . & -b_1 \\ 0 & 1 & & ... & ... \\ ... & 0 & & ... & ... \\ ... & ... & & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & -b_{p-1} \end{pmatrix}$

$$I_r \otimes A - {}^tB \otimes I_n = \begin{pmatrix} A & -I & 0 & ... & & 0 \\ 0 & A & -I & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & A & -I & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & A & -I \\ b_0 I & b_1 I & ... & ... & ... & b_{r-1} I + A \end{pmatrix}.$$

D'où, en posant $M = \begin{pmatrix} M_1 & \dots & \dots & M_r \end{pmatrix}$, $AM = MB \Longleftrightarrow \begin{cases} M_2 = \mathrm{AM}_1 \\ M_3 = \mathrm{AM}_2 \\ \dots. \\ M_r = \mathrm{AM}_{r-1} \\ (\sum_{i=0}^{r-1} b_i A^i + A^r) M_1 = 0 \end{cases}$.

Si $\pi_B(X) \wedge \pi_A(X) = Z(X)$, *où degré de Z(X) inférieur à r, si on pose* $Z(X) = \sum_{j=0}^{d-1} z_j X^j + X^d$ *alors* $(\sum_{j=0}^{d-1} z_j A^j + A^d) M_1 = 0$, *dans ce cas* $(M_1, AM_1, \dots, A^{r-1} M_1)$ *sont liés.*

Si $\pi_B(X)$ *divise* $\pi_A(X)$, *le Théorème 10 produit une famille de vecteurs* $(M_1, AM_1, \dots, A^{r-1} M_1) =$
$\begin{pmatrix} q_0 & 0 & \dots. & \dots\dots. & 0 \\ q_1 & q_0 & & 0 & \dots \\ \dots\dots & \dots & & q_0 & 0 \\ q_{n-r-1} & \dots & & \dots & q_0 \\ 1 & q_{n-r-1} & & \dots & \dots \\ \dots & 1 & & \dots & \dots. \\ \dots & \dots & & q_{n-r-1} & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & q_{n-r-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ *libres dans* $Ker(\pi_B(A)$, *d'où, si on pose* $V = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 = \mathrm{AM}_1 & \dots & \dots & M_r = A^{r-1} M_1 \end{pmatrix}$ *qui sera de rang r et on a bien* $\forall j \in \{1, \dots, r-1\}, AM_j = M_{j+1}$ *et* $AM_r = -\sum_{i=0}^{r-1} b_i M_i$, *donc* $AV = VB$.

En particulier

Proposition 12.

Si le polynôme minimal $\pi_M(X)$*de la matrice* $M \in \mathcal{M}_n(K)$ *est de degré n il existe une matrice* $P \in \mathcal{GL}_n(K)$ *telle que* $MP = PC$, *où C est la matrice compagnon du polynôme* $\pi_M(X)$.

La proposition suivante sera utile pour établir l'unicité dans le Théorème de Frobenius:

Proposition 13.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(K)$ *une matrice compagnon et* $\pi_A(X)$ *son polynôme minimal.*

Soit une famille de matrices compagnons $(B_1, \dots, B_s)$ *de polynôme minimal* $\pi_{B_1}, \dots, \pi_{B_s}$ *telles que* $\forall i \in \{1, \dots, s-1\} \pi_{B_{i+1}} | \pi_{B_i}$ *et pour chaque* $i \in \{1, \dots, s\}$ W_i *telle que* $AW_i = W_i B_i$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, s\}$ *on écrira* $\pi_A(X) \wedge \pi_{B_i}(X) = Z_i(X) = \sum_{j=0}^{d_i - 1} z_{i,j} X^j + X^{d_i}$.

On suppose que pour tout i degré$(\pi_A \wedge \pi_{B_i}) <$ *degré*(π_{B_i}).

Alors

i) $\forall i \in \{1, \dots, s\}$*le rang de* $W_i \leqslant d_i$.

ii) si on pose $W_i = (W_{i,1}, W_{i,2}, \dots, W_{i,p-1})$ *alors* $\forall k \geqslant d_i, W_{i,k} = -\sum_{j=0}^{d_i - 1} z_{i,j} W_{i, k - d_i + j}$

Démonstration.

La construction de W_i *est la suivante: on choisit* $W_{i,1}$ *dans* $Ker(Z_i(A))$ *puis* $W_{i,2} = A W_{i,1}$*,., jusqu'à* $W_{i, d_i - 1}$, *les suivants vérifiant* $W_{i, d_i + k} + \sum_{j=0}^{d_i - 1} z_{i,j} W_{i, j+k}, = 0$ *pour* $k \in \{0, \dots, \deg(\pi_{B_i}) - d_i - 1\}$.

De plus comme $\forall i, Z_{i+1}(X)$ *divise* $Z_i(X)$, *les relations* $W_{s, d_i + k} + \sum_{j=0}^{d_i - 1} z_{s,j} W_{s, j+k} = 0$ *pour* $k \in \{0, \dots, \deg(\pi_{B_s}) - d_s - 1\}$ *sont vérifiées pour chacun des* W_i, *pour* $i = 1, \dots s$.

Par suite si on considère la matrice $\begin{pmatrix} W_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ W_s \end{pmatrix}$ *ses colonnes sont liées.* □

Proposition 14. *L'amalgame de deux sous-espaces directement A-cycliques d'intersection nulle*

Soit deux matrices compagnons C et D, de polynomes minimaux $\pi_C(X)$ et $\pi_D(X)$ et les sous-espaces M et N tels que $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{AM} = MC \\ \mathrm{AN} = ND \end{array} \right.$ *, où M=($M_1,\dots,A^{p-1}M$) et N=($N_1,\dots,A^{q-1}N_1$) tels que $M \cap N = \{0\}$,alors, si on pose P_1=$M_1 + N_1$ le sous-espace P=(P_1,$AP_1,\dots,A^{d-1}P_1$), où d=degré($\pi_C(X) \vee \pi_D(X)$) est directement A-cyclique et AP=P $C \vee D$, où $C \vee D$ désigne la matrice compagnon du polynôme $\pi_C(X) \vee \pi_D(X)$.*

Démonstration.

Quel que soit k∈N $A^k M_1 = R_k(A) M_1$ où $R_k(X)$ est le reste de la division de X^k par $\pi_C(X)$

Quel que soit k∈N $A^k N_1 = S_k(A) N_1$ où $S_k(X)$ est le reste de la division de X^k par $\pi_D(X)$

Par suite si on pose P_1=$M_1 + N_1$ et si on suppose $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k A^k P_1$=0 alors $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k A^k M_1$=$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k A^k N_1$=0 donc $\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k X^k$ est divisible par $\pi_C(X)$ et par $\pi_D(X)$, donc par leur ppcm, or d-1<degré de $\pi_C(X) \vee \pi_D(X)$ donc $\forall k, \lambda_k = 0$; d'où le résultat demandé.

on notera A M@N=M@N $C \vee D$, où $C \vee D$ désigne la matrice compagnon du polynôme $\pi_C(X) \vee \pi_D(X)$. □

4 Une propriété intéressante des matrices compagnons (mais pas que..)

On connait la règle de simplification (Roth's Removal Rule) de Roth pour les matrices $\begin{pmatrix} P & U \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ qui s'applique lorsque le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} P & U \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ est égal à celui de P; le cas où C est une matrice compagnon permet de rechercher un même résultat.

Proposition 15.

La matrice A=$\begin{pmatrix} C & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$ où C est une matrice compagnon est semblable à A'=$\begin{pmatrix} C & U' \\ 0 & V \end{pmatrix}$, où les les lignes de U' à partir de la deuxième sont nulles.

Démonstration.

C=$\begin{pmatrix} 0 & -c_0 \\ I_{p-1} & \gamma \end{pmatrix}$, nous allons nous appuyer sur la matrice extraite I_{p-1}, ses 1 se trouvent (relativement à C) dans les positions (i,i-1); pour annuler la i-ème ligne de U effectue sur A des opérations élémentaires de la forme C_j:C_j-kC_{i-1} (où j>p$\geqslant i-1$) et pour obtenir une matrice semblable il faut effectuer sur A l'opération réciproque sur les lignes:Li-1:Li-1+kLj qui ne modifie que la i-1-ème ligne de U car la ligne Lj de la matrice nulle … est nulle.

Par suite si on annule les lignes de U « de bas en haut », jusqu'à la deuxième (qui correspond à i-1=2et i-1=1) on obtient la matrice semblable demandée.

Cette propriété est la clé de toute démonstration effective du Théorème de Frobenius; en ce qui me concerne c'est l'article de Bernard Randé [6] qui me l'a fait découvrir, bien que sous une forme difffférente. □

Remarque 16.

La condition selon laquelle C est une matrice compagnon n'est pas nécessaire, il en aurait été de même avec C=$\begin{pmatrix} 0 & -c_0 \\ C' & V \end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix} -c_0 \\ V \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne et C' une matrice triangulaire inférieure inversible.

5 A la recherche d'un vecteur x tel que $\pi_{A,x} = \pi_A$

A étant une matrice carrée π_A est le générateur (unitaire) de l'idéal $\{P(X) \in K[X], P(A) = 0\}$ et pour chaque x$\in K^n$ $\pi_{A,x}$ est le générateur unitaire de l'idéal $\{P(X) \in K[X], P(A)(x) = 0\}$; si l'ensemble de ces vecteurs est dense dans K^n (dans le cas où K est infini) cela ne suffit pas à exhiber un tel vecteur.

Nous ne disposons pour créer des sous-espaces cycliques que de la manière naïve qui consiste à choisir un vecteur non nul x et à itérer la composition par A jusqu'à obtenir une famille libre maximale (x,Ax,$A^2x, ..., A^{t-1}x$); cela fournit un sous-espace A-cyclique, que l'on notera $\Gamma(x)$.

Soit A$\in\mathcal{M}_n(K)$ et un premier sous-espace directement A-cyclique T_1, on désigne par T'_1 un supplémentaire de T_1 d'où l'égalité $A(T_1, T_1') = (T_1, T_1')\begin{pmatrix} C_1 & U_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$; la matrice (T_1, T_1') étant de rang n cette égalité n'est que la formule de changement de base.

Proposition 17.

Soit $A\in\mathcal{M}_n(K)$ on peut trouver $(T_1, T_1') \in \mathcal{GL}_n(K)$ et une matrice compagnon C telle que $A(T_1, T_1') = (T_1, T_1')\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Démonstration.

Une fois trouvées les matrices telles que $A(T_1, T_1') = (T_1, T_1')\begin{pmatrix} C_1 & U_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ on applique la proposition 15 et on obtient une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(K)$ telle que $P^{-1}\begin{pmatrix} C_1 & U_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} C_1 & U' \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$.

Si U' n'est pas nul soit u_{1k} un élémént non nul de sa première ligne alors $Ae'_k = u_{1k}e'_1$ où $(T_1, T_1')P^{-1} = (e'1, ..., e'n)$; la famille ($e'_k, Ae'_k = u_{1k}e'_1, A^2e'_k = u_{1k}e'_2, .., u_{1k}e'_p$) est libre; on pose alors T_1=($e'_k, Ae'_k = u_{1k}e'_1, A^2e'_k = u_{1k}e'_2, .., u_{1k}e'_p$) et T'_1un supplémentaire; d'où $A(T_1, T_1') = (T_1, T_1')\begin{pmatrix} C_1 & U_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ où la dimension de T_1 est p+1.

On itère.

Comme la dimension de T_1 est bornée on arrive nécessairement à un moment à U'=0 et alors $A(T_1, T_1') = (T_1, T_1')\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que le supplémentaire T_1' de T_1 est stable par A. □

Proposition 18.

Soit $A\in\mathcal{M}_n(K)$ on peut trouver une matrice $T\in\mathcal{GL}_n(K)$ et une famille finie de matrices compagnons $(C_1, ..., C_t)$ telle que $AT = T\begin{pmatrix} C_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & . & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & C_t \end{pmatrix}$

Démonstration.

La proposition 17 nous assure de trouver les matrices telles que $A(T_1, T_1') = (T_1, T_1')\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$*, d'où* $\mathrm{AT}_1' = T_1' D_1$.

De même on peut trouver (T_2, T'_2)*,* $\;$ *Pet* (C_2, D_2) *telles que* $A(T_2, T_2')P^{-1} = (T_2, T_2')P^{-1}\begin{pmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$*, d'où* $A\left(T_1, (T_2, T_2')P^{-1}\right) = (T_1, (T_2, T_2')P^{-1})\begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$.

Et on itère.

□

Arrivés à ce stade il est immédiat que π_A est le plus petit commun multiple des π_{C_i}, d'où en pratiquant l'amalgame des sous-espaces cycliques correspondants on obtient un sous-espace cyclique Δ_1 et une matrice compagnon Γ_1 dont le polynôme minimal π_{Γ_1} est égal à π_A.

6 Le Théorème de Frobenius

Théorème 19.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *de polynôme minimal* π*, on peut déterminer une somme directe finie de sous-espaces A-directement cycliques et des matrices compagnons* (Δ_i, Γ_i) *telle que* $A(\Delta_1, ..., \Delta_p) = (\Delta_1, ..., \Delta_p)\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & ... \\ & & & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \Gamma_p \end{pmatrix}$*, tels que* $\forall i, \pi_{\Gamma_{i+1}} \Big| \pi_{\Gamma_i}$

De plus la suite des polynômes (π_{Γ_i})*, appelés invariants de similitude de f, est entièrement déterminée par A et deux matrices sont semblables si et seulement elles ont les mêmes invariants de similitude.*

Démonstration.

La proposition 18 et le commentaire qui la suit assurent l'existence et la détermination de Δ_1 *et* Γ_1 *tels que* $A\Delta 1 = \Delta 1 \Gamma 1$*; on considère alors un supplémentaire* Δ_2*, il est nécessairement stable parce que le polynôme minimal* π_{Γ_1} *est de degré maximal (voir proposition 17) et on applique la proposition 18…*

La construction assure la propriété annoncée sur les polynômes π_{Γ_i}.

L'unicité est la conséquence du Théorème 20

$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & ... \\ & & & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \Gamma_p \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \Gamma'_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & \Gamma'_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & ... \\ & & & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & \Gamma'_q \end{pmatrix}$ *sont semblables si et seulement s'il existe une injection* $\varphi: \{1, ..., p\}$ *vers {1,… q} et une injection* $\psi: \{1, ..., q\}$*vers {1,…,p} tellles que*

$\forall k \in \{1, ..., p\}$ π_{C_k} *divise* $\pi_{\Gamma_{\varphi(k)}}$*, et* $\forall j \in \{1, ..., q\}$ π_{Γ_j} *divise* $\pi_{C_{\psi(j)}}$.

Par suite p=q et φ *et* ψ *sont des bijections; par suite il est nécessaire que* $\varphi(1)=1$ *et* $\psi(1) = 1$*;si on suppose que* $C1 = \ldots = Ck \neq \mathrm{Ck} + 1$*,* $D1 = \ldots = Dj \neq \mathrm{Dj} + 1$ *et* $k<j$ *alors* π_{C_1} *divise* $\pi_{\Gamma_1}, \varphi(1) = 1 \ldots, \pi_{C_k}$ *divise* $\pi_{\Gamma_k}, \varphi(k) = k$ *et il faut alors que* $\pi_{C_{k+1}}$ *divise* $\pi_{\Gamma_{k+1}}$*, sans qu'ils soient égaux, ce qui entraîne que k+1 n'aura pas d'image par* ψ*; d'où k=j; on raisonne de même pour la suite.*

En conclusion $\forall k, \pi_{C_k} = \pi_{\Gamma_k}$. □

7 Applications

Soient (A,B)$\in\mathcal{M}_p(K)\times\mathcal{M}_q(K)$, respectivement semblables à $\begin{pmatrix} C_1 & 0 & ... & ... & 0\\ 0 & C_2 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0 & ...\\ & & & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0 & C_p \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} C'_1 & 0 & ... & ... & 0\\ 0 & C'_2 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0 & ...\\ & & & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0 & C'_q \end{pmatrix}$, que nous apprennent les décompositions trouvées au-dessus ?

Théorème 20.

Soient (A,B)$\in\mathcal{M}_r(K)\times\mathcal{M}_s(K)$*, respectivement semblables à* $C=\begin{pmatrix} C_1 & 0 & ... & ... & 0\\ 0 & C_2 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0 & ...\\ & & & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0 & C_p \end{pmatrix}$ *et à* $D=\begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & ... & 0\\ 0 & D_2 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0 & ...\\ & & & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0 & D_q \end{pmatrix}$*, il existe un sous-espace vectoriel Tde* K^r *tel que la restriction de A à T est égale à B si et seulement si il existe une injection* φ *de {1,..,q} vers {1,..,p} telle que*

$\forall k\in\{1,...,q\}$, $\pi_{D_k}(X) \,\Big|\, \pi_{C\varphi(k)}(X)$.

Démonstration.

L'existence de $T\in\mathcal{GL}_{s,r}(K)$*, AT=TB équivaut à l'existence de T'*$\in\mathcal{GL}_{s,r}(K)$*,CT'=T'D; si on pose T'=(Tij) nous sommes conduits au système* $\{C_i T'_{\mathrm{ij}} = T'_{\mathrm{ij}} D_j, (i,j)$.

Comme Ci et Dj sont des matrices compagnons

$\exists\ T'_{ij}\in\mathcal{GL}_{s_j,r_i}(K), C_i T'_{\mathrm{ij}} = T'_{\mathrm{ij}} D_j \Longleftrightarrow \pi_{D_j}(X)|\pi_{C_i}(X)$, *Théorème (11).*

Donc si $\forall k\in\{1,...,q\}$, $\pi_{D_k}(X) \,\Big|\, \pi_{C_{\varphi(k)}}(X)$ *si on prend pose* $P_{\varphi(k),k}\in\mathcal{GL}_{s_k,r_{\varphi(k)}}(K), C_{\varphi(k)}P_{\varphi(k),k} = P_{\varphi(k),k}D_k$ *et, sinon* $P_{\mathrm{ij}}=0$ *alors* $P=(P_{i,j})\in\mathcal{GL}_{s,r}(K)$.

Inversement si il existe j tel que $\pi_{D_j}(X)$ ne divise *aucun* $\pi_{C_i}(X)$ *les colonnes du bloc* $\begin{pmatrix} T'_{1j}\\ T'_{2j}\\ ...\\ ...\\ T'_{\mathrm{pj}} \end{pmatrix}$ *sont liées (voir Proposition 13), par suite il n'existe pas de matrice T'*$\in\mathcal{GL}_{s,r}(K)$*,CT'=T'D.* □

D'où

Théorème 21.

Toute partie finie de S(K)=$\cup(\mathcal{M}_n(K)/\mathcal{GL}_n(K))$ possède une borne supérieure pour la relation de domination.

Démonstration. Soit A= $\begin{pmatrix} C_1 & 0 & ... & ... & 0\\ 0 & C_2 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0 & ...\\ & & & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0 & C_p \end{pmatrix}$ et B= $\begin{pmatrix} C'_1 & 0 & ... & ... & 0\\ 0 & C'_2 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & 0 & ...\\ & & & ... & ...\\ ... & ... & ... & 0 & C'_q \end{pmatrix}$

On supposera ici que p$\geqslant$q.

La borne supérieure de la partie {A,B} est $\begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 & ... \\ & & & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & D_q \end{pmatrix}$ où $\forall i \in \{1,...,q\}$ D$_i$=C_i@C'$_i$ et $\forall j \in \{q+1,...,p\}$ Dj=Cj.

□

On peut de même caractériser la borne inférieure.

Bibliographie:

[1] G. Birkhof, S. Mac Lane, Algèbre, les Grands Théorèmes, Gauthier-Villars, 1971.

[2] F.R. Gantmacher, Matrix Theory, Chelsea Publishing Company, 1977

[3] P. R. Halmos, Eigenvectors and adjoints, Linear Algebra Appl. 4:11-15 (1971).

[4] R.E. Hartwig, Roth's Removal Rule and the Rational Canonical Form,

[5] V.W. Prasolov, Problems and Theorems in Linear Algebra, Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 1994

[6] B. Randé, Un algorithme pour la décomposition en espaces cycliques, Revue de la filière Mathématiques, 115 ème année, Mai 2005, Numéro 4

[

Paris, fin Mars 2021