Retour sur l'équation AM=MB

PAR PATRICK TELLER*

Résumé

Etant données deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ il est bien connu que l'équation AM=MB ne possède de solution non nulle que si et seulement si $\mathrm{Spec}(A) \bigcap \mathrm{Spec}(B) \neq \varnothing$ et le théorème de Cecioni-Frobenius ([1]) détermine exactement la dimension de l'espace vectoriel des solutions en fonction des facteurs invariants des deux matrices A et B; nous allons retrouver ce résultat de manière élémentaire au moyen de la forme de Jordan dans le cas où les polynômes caractéristiques sont scindés et déterminer le rang maximal des solutions; nos résultats s'appliquent aussi au cas où $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec (m,n) quelconques.

Dans la première partie nous allons réduire le problème de manière tout à fait classique au cas de matrices qui sont des sommes de matrices (pas forcément de même taille) de Jordan associées à une seule valeur propre en rappelant des résultats classiques; la démarche étant similaire à celle de [2].

Dans la deuxième nous allons étudier le noyau de l'application linéaire Φ: $M \longmapsto$ AM-MB où $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (on notera que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}))$ au moyen du produit tensoriel de matrices, ce qui donne plus de rapidité et de clarté que dans [2], puis nous appliquerons dans la troisième partie la technique développée pour déterminer la dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation AM=MB et le rang maximal des solutions.

1 Réduction du problème, notations et résultats classiques

Remarque 1. Dans tout ce qui suit les matrices seront considérées comme possédant un polynôme caractéristique scindé.

Proposition 2. *Soient deux matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et les matrices régulières $(P, Q) \in \boldsymbol{Gl}_n(\mathbb{K})^2$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation AM=MB est isomorphe à l'espace vectoriel des solutions de l'équation $P^{-1}APM$=$MQ^{-1}BQ$.*

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul. □

Proposition 3. *Soient deux matrices $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et une matrice M telle que AM=MB alors, quels que soient le scalaire λ et l'entier u, $M(Ker(B-\lambda I_n)^u) \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)^u$.*

Démonstration. De l'égalité AM=MB on déduit que $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)M = \mathrm{MP}(B)$ soit alors $X \in \mathbb{K}^n$, tel que $(B-\lambda I_n)^u X = 0$ on en déduit que $\mathrm{M}(B-\lambda I_n)^u X = 0$, d'où $(A-\lambda I_n)^u \mathrm{MX} = 0$ $\mathrm{M}(\mathrm{Ker}(B-\lambda I_n)^u) \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I_m)^u$. □

Proposition 4. *Soient deux matrices $(A,B) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de polynômes caractéristiques respectifs $\prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{m_i}$ et $\prod_{i=1}^s (X-\mu_j)^{n_j}$ et une matrice M telle que AM=MB alors*

i) $\mathbb{K}^m = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(A\text{-}\lambda_i I_m)^{m_i}$ et $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^s \mathrm{Ker}(B\text{-}\mu_j I_n)^{n_j}$

ii) Si $\mu_j \notin \mathrm{Spec}(A)$, $M(Ker(B-\mu_j I_n)^{n_j} = \{0\}$

*. Patrick Teller, Cpge Lycee Charlemagne, Paris 75004, France, (patrick.teller@free.fr)

iii) Si $\mu_j = \lambda_{i_0} \in \mathrm{Spec}(A)$, $M(Ker(B - \mu_j I_n)^{n_j} \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda_{i_0} I_m)^{m_{i_0}}$.

Démonstration. i) découle immédiatement du théorème de Cayley-Hamilton.

ii) d'après la proposition précédente $\mathrm{M}(\mathrm{Ker}(B - \mu_j I_n)^{n_j}) \subset \mathrm{Ker}(A - \mu_j I_m)^{n_j}$ et si $\mu_j \notin \mathrm{Spec}(A)$ alors $\mathrm{Ker}(A - \mu_j I_m)^{n_j} = \{0\}$.

iii) $\mathbb{K}^m = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(A\text{-}\lambda_i I_m)^{m_i}$ et chacun de ces sous-espaces vectoriels est stable par A, donc si $y \in \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(A\text{-}\lambda_i I_m)^{m_i}$ s'écrit $y = \sum_{i=1}^r y_i$, où $\forall i \in \{1, ..., r\}$, $y_i \in \mathrm{Ker}(A\text{-}\lambda_i I_m)^{m_i}$ alors pour que $(A - \lambda_{i_0} I_m)^{n_{i_0}}(y) = \sum_{i=1}^r (A - \lambda_{i_0} I_m)^{n_{i_0}}(y_i)$ soit nul il est nécessaire que $\forall i \in \{1, ..., r\} (A - \lambda_{i_0} I_m)^{n_{i_0}}(y_i) = 0$; or si $i \neq i_0$ $(X - \lambda_{i_0})^{n_{i_0}} \wedge (X - \lambda_i)^{n_i} = 1$ et donc $(A - \lambda_{i_0} I_m)^{n_{i_0}}(y_i) = 0 \Longleftrightarrow y_i = 0$; donc $\mathrm{Ker}(A - \lambda_{i_0} I_m)^{n_{i_j}} \cap \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(A\text{-}\lambda_i I_m)^{m_i} \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda_{i_0} I_m)^{m_{i_0}}$.

□

Proposition 5. *Soit* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et son polynôme caractéristique* $\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$ *alors P est semblable à la matrice diagonale par blocs* $\bigoplus_{i=1}^r P_i$*, où pour chaque i=1,..,r* $P_i - \lambda_i I$ *est une somme de blocs de Jordan nilpotents.*

Démonstration. Ceci est un résultat classique. □

Ceci nous permet de nous limiter à l' étude de l'espace vectoriel des solutions de l'équation AX=XB lorsque $A = \bigoplus_{i=1}^r A_i$ et $B = \bigoplus_{j=1}^s B_j$, où pour chaque i=1,..,r $A_i - \lambda_i I$ et $B_j - \mu_j I$ sont des sommes de blocs de Jordan nilpotents.

Proposition 6. *Soient deux matrices (A,B)∈*$\mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *comme au-dessus où* $A = \bigoplus_{i=1}^r A_i$ *et* $B = \bigoplus_{j=1}^s B_j$*, où pour chaque i=1,..,r* $A_i - \lambda_i I$ *et* $B_j - \mu_j I$ *sont des sommes de blocs de Jordan nilpotents,* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & A_r \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & B_2 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & B_s \end{pmatrix}$*; nous supposerons qu'il existe un indice* δ *tel que* $\forall i \in \{1, ..., \delta\}, \lambda_i = \mu_i$ *et* $\{\lambda_{i+1}, ..., \lambda_r\} \cap \mathrm{Spec}(B) = \varnothing$ *et* $\{\mu_{i+1}, ..., \mu_s\} \cap \mathrm{Spec}(A) = \varnothing$.

Soit une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*, écrite sous forme de blocs rectangulaires* $M = (M_{\mathrm{ij}})_{(i,j) \in \{1,...,r\} \times \{1,.,s\}}$*, qui vérifie la relation AM=MB.*

Alors i) M est la matrice diagonale par blocs $M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & ... & ... & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & M_{\delta\delta} & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$

ii) $\forall (i,j) \in \{1, ..., \delta\}^2$, $A_i M_{\mathrm{ii}} = M_{\mathrm{ii}} B_{\mathrm{ii}}$.

Démonstration. i) Il suffit de remarquer que M_{ij} représente la projection sur $\mathrm{Ker}(A\text{-}\lambda_i I_m)^{m_i}$ de la restriction à $\mathrm{Ker}(B\text{-}\mu_j I_n)^{n_j}$ et d'appliquer le résultat de la proposition 4.

ii) Découle de la multiplication des matrices par blocs. □

Par suite et comme toute matrice commute avec les matrices scalaires, il suffira d'étudier le cas de deux matrices nilpotentes A et B, sommes de blocs de Jordan: A= $\bigoplus_{k=1}^p J(i_k)$et B=$\bigoplus_{t=1}^q J(j_t)$.

2 Le résultat principal

Il est bien connu que la matrice (dans la base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$) de l'endomorphisme $M \mapsto$ AM-MB est $A \otimes I_n - I_m \otimes {}^t B$, d'où l'intérêt de la proposition suivante:

Proposition 7. *Soient deux matrices nilpotentes* $A= \bigoplus_{k=1}^{p} J(i_k) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ *et* B*, telle que* $B' = \bigoplus_{t=1}^{q} J(j_t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *alors la dimension du noyau de* $A \otimes I_n - I_m \otimes B'$ *est égale à* $\sum_{(i_k, j_t)} \min(i_k, j_l)$.

Démonstration. Soient A$=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & a_{m-1} \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ et $B' = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & b_{n-1} \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$, où les complexes a_i et b_j sont égaux à 0 ou 1 (suivant les tailles des blocs de Jordan).

Alors $A \otimes I_n - I_m \otimes B' = -\begin{pmatrix} 0_n & a_1 I_n & ... & ... & ... \\ 0 & 0_n & a_2 I_n & ... & ... \\ 0 & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & a_{a_{m-1}} I_n \\ 0 & ... & ... & 0 & 0_n \end{pmatrix} +$

$$\begin{pmatrix} B' & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & B' & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' & -a_1 I_n & 0_n & .... & 0_n \\ 0_r & B' & -a_2 I_n & 0_n & ... \\ ... & 0_r & ... & ... & 0_r \\ ... & ... & ... & ... & -a_{m-1} I_n \\ 0_r & ... & ... & ... & B' \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} B' & -a_1 I_n & 0_r & .... & 0_r \\ 0_r & B' & -a_2 I_n & 0_n & ... \\ ... & 0_r & ... & ... & 0_r \\ ... & ... & ... & ... & -a_{m-1} I_n \\ 0_r & ... & ... & ... & B' \end{pmatrix} X = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} B'X_1 = a_1 X_2 \\ B'X_2 = a_2 X_3 \\ ...... \\ B'X_{m-1} = a_{m-1} X_m \\ B'X_m = 0 \end{cases}, \text{ where } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ .... \\ X_m \end{pmatrix}.(*)$$

Nous supposerons que $A = \bigoplus_{k=1}^{p} J(i_k)$, où $i_1 \geqslant i_2 \geqslant ... \geqslant i_p$, et donc $a_{i_1} = a_{i_1+i_2} = ... = a_{i_1+...+i_{p-1}} = 0$ et que $\forall i \in \{1, ..., m-1\} \backslash \{i_1, i_1 + i_2, ..., i_1 + ...i_{p-1}\}, a_i = 1$ et de même supposons que $B' = \bigoplus_{t=1}^{q} J(j_t)$ où $j_1 \geqslant j_2 \geqslant ... \geqslant j_q$ que $b_{j_1} = b_{j_1+j_2} = ... = b_{j_1+...+j_q} = b_r = 0$ et $\forall j \in \{1, ..., n-1\} \backslash \{j_1, j_1 + j_2, ..., j_q\}, b_j = 1$; alors (*) est équivalent à

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, ..., i_1 - 1\}, X_{i+1} = B'^{i} X_1 \\ B'^{i_1} X_1 = 0 \\ \forall i \in \{0, ..., i_2 - 1\}, X_{i_1+i+1} = B'^{i} X_{i_1+1} \\ B'^{i_2} X_{i_1+1} = 0 \\ ...... \\ \forall i \in \{0, i_p - 1\}, X_{i_1+...+i_{p-1}+i+1} = B'^{i} X_{i_1+...+i_{p-1}+1} \\ B'^{i_p} X_{i_1+...+i_{p-1}+1} = 0 \end{cases} . (**)$$

Comme $B' = \begin{pmatrix} J(j_1) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J(j_2) & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & J(j_q) \end{pmatrix}$ alors $B'^u = \begin{pmatrix} J(j_1)^u & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J(j_2)^u & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & J(j_q)^u \end{pmatrix}$, son noyau est de dimension $\sum_{l=1}^{q} \min(u, j_l)$, et par suite le noyau de $A \otimes I_r - I_r \otimes B'$ a pour dimension $\sum_{(i_k, j_t)} \min(i_k, j_l)$; il est immédiat que les partitions $I = (i_1, ..., i_p)$ et $J = (j_1, ..., j_q)$ ont des rôles symétriques, nous désignerons cet entier par $\mu(I, J)$.

□

Théorème 8. *Soient deux matrices nilpotentes* $A= \bigoplus_{k=1}^{p} J(i_k)$ *et* $B= \bigoplus_{t=1}^{q} J(j_t)$ *comme audesssus, l'ensemble des matrices M telles que AM=MB est un espace vectoriel de dimension* $\mu(I, J)$*, où* $I = (i_1, ..., i_p)$ *et* $J = (j_1, ..., j_q)$.

Démonstration. Comme la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de l'endomorphisme $M \mapsto$ AM-MB est $A \otimes I_n - I_m \otimes {}^tB$ il suffit d'appliquer le résultat précédent à A et à $B' = {}^tB$; les vecteurs $X_1, ..., X_m$ représentent les lignes successives de M. □

Ce qui démontre (dans un cadre plus général quant aux tailles des matrices mais sous la condition que les polynômes caractéristiques soient scindés) le théorème de Cecioni-Frobenius:

Théorème 9. *Soient deux matrices $(A,B)\in\mathcal{M}_m(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices M telles que $AM=MB$ est un espace vectoriel de dimension $\sum_{i=1}^{\delta}\mu(I_i,\,J_i)$, où δ désigne, comme dans la proposition 6. le nombre de valeurs propres communes , et pour chaque $i\in\{1,\ldots,\delta\}$ I_i et J_i sont les partitions associées respectivement pour A et pour B aux différentes valeurs propres communes λ_i.*

La formulation du théorème de Cecioni-Frobenius ([1]) est équivalente, les entiers $\min\,(i_k,\,j_l)$ apparaissant comme degrés des pgcd de facteurs invariants de A et B.

Exemple 10. Soients $A=J(3)\oplus J(2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $B=J(4)\oplus J(1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, l'ensemble des matrices M telle que AM=MB est un espace vectoriel de dimension 7.

${}^tB^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et ${}^tB^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ d'où M est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d\\ 0 & 0 & a & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & 0\\ 0 & 0 & e & f & g\\ 0 & 0 & 0 & e & 0\end{pmatrix}$; on vérifie

bien que AM=MB.

Exemple 11. Appliquons notre démarche au cas du commutant d'une matrice nilpotente, c'est à dire posons $A=B=\begin{pmatrix} J(3) & 0\\ 0 & J(2)\end{pmatrix}$, alors la dimension du commutant de A est égale à 9; ${}^tB^3=0$ et ${}^tB^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ d'où M est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c & d & e\\ 0 & a & b & 0 & d\\ 0 & 0 & a & 0 & 0\\ f & g & 0 & h & i\\ 0 & f & g & 0 & h\end{pmatrix}$, on reconnait le résultat classique ([3]).

3 Le maximum des rangs des solutions de l'équation AX=XB

Dans la suite nous considérerons un couple de matrices $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ dont les polynômes caractéristiques sont scindés, de spectres respectifs $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$ et $\{\mu_1,\ldots,\mu_s\}$, un indice δ tel que $\forall i\in\{1,\ldots,\delta\}$, $\lambda_i=\mu_i$ et $\{\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_r\}\cap\mathrm{Spec}(B)=\varnothing$ et $\{\mu_{i+1},\ldots,\mu_s\}\cap\mathrm{Spec}(A)=\varnothing$ et pour chaque $i\in\{1,\ldots,\delta\}$ I_i et J_i les partitions ordonnées (décroissantes) associées respectivement pour A et pour B aux différentes valeurs propres $\lambda_i=\mu_i$; l'objet de cette partie est de déterminer le maximum des rangs des solutions de l'équation AX=XB.

Remarque 12. Si $I\neq J$ les matrices A et B ne sont pas semblables et il ne peut donc exister de matrice inversible M telle que AM=MB, ce que l'on retrouve en remarquant que, soit il existe k tel que $\forall t, i_k>j_t$ auquel cas l'une des lignes de M est nulle, soit il existe t tel que $\forall k, j_t>i_k$ et on applique le même raisonnement à l'équation ${}^tB{}^tM={}^tM{}^tA$.

Tandis que si $I=J$ les matrices A et B sont semblables et notre méthode fournit une famille libre $(X_1,.,X_n)$, donc une matrice inversible P telle que AP=PB.

Théorème 13. *Soient deux matrices nilpotentes $A=\bigoplus_{k=1}^{p}J(i_k)\in\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$et $B=\bigoplus_{t=1}^{q}J(j_t)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où on suppose que $I=(i_1,\ldots,i_p)$ et $J=(j_1,\ldots,j_q)$ sont décroissantes. Le maximum des rangs des solutions de l'équation AM=MB est égal à $\sum_{u=1}^{\delta}\min\,(i_u,j_u)$.*

Démonstration. Nous allons décrire les matrices solutions en détaillant la résolution du système (**) de la proposition 7. dans le cas où B' est une matrice blocs dont les blocs sont des blocs de Jordan triangulaires inférieurs $B' = \begin{pmatrix} J'(j_1) & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J'(j_2) & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & J'(j_q) \end{pmatrix}$; la résolution des différentes parties $\begin{cases} \forall i \in \{0, ..., i_t - 1\}, X_{i_1+...+i_{t-1}+i+1} = B'^{i} X_{i_1+...+i_{t-1}+1} \\ B'^{i_t} X_{i_1+...+i_{t-1}+1} = 0 \end{cases}$ permet de déterminer les lignes $i_1 + ... + i_{t-1} + 1$ jusqu'à $i_1 + ... + i_t$ de la matrice M; comme $J'(j_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ alors $J'(j_k)^{i_t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & ... & ... & ... \\ ... & 1 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où les 1 sont au nombre de $\max(0, j_k - i_t)$, sur une parallèle à la diagonale principale, par suite $X_{i_1+...+i_{t-1}+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ * \\ ... \\ * \end{pmatrix}$, les $\max(0, j_k - i_t)$ premières coordonnées étant nécessairement nulles, ce qui décrit la ligne $i_1 + ... + i_{t-1} + 1$ de M; les vecteurs suivants $X_{i_1+...+i_{t-1}+i+1}$ pour $i \in \{1, ..., i_t - 1\}$ s'en déduisent par multiplication par $J'(j_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & ... & ... & ... \\ ... & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc sont de la forme $X_{i_1+...+i_{t-1}+i+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ * \\ ... \\ * \end{pmatrix}$, les $\max(0, j_k - i_t)$ +i premières coordonnées étant nécessairement nulles.

Donc le bloc formé par les lignes $i_1 + ... + i_{t-1} + 1$ jusqu'à $i_1 + ... + i_t$ de la matrice M est de la forme $\begin{pmatrix} R_{t,1} & ... & .... & R_{t,k} & ... & R_{t,q} \end{pmatrix}$ où chaque rectangle $R_{t,k}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & T_{t,k} \end{pmatrix}$ si $i_t \leqslant j_k$ ou $\begin{pmatrix} 0 & T_{t,k} \end{pmatrix}$ si $j_k \leqslant i_t$, les termes arbitraires formant le triangle rectangle $T_{t,k}$ dont l'hypothénuse est parallèle à la diagonale principale de M et le côté vertical est de longueur $\min(j_k, i_t)$; par ailleurs la relation de récurrence sur les X_i entraine la forme suivante pour $T_{t,k}$ $\begin{pmatrix} a & b & c & d & .... & w & x \\ & a & b & c & ... & ... & w \\ & & a & b & ... & ... & v \\ & & & ... & ... & ... & ... \\ & & & & ... & ... & ... \\ & & & & & & a \end{pmatrix}$, d'où on voit qu'un bon choix des éléments rend les lignes de $T_{t,k}$ linéairement indépendantes.

On remarquera que pour tout k le support du triangle $T_{t,k}$ est inclus dans celui du triangle $T_{t-1,k}$ de même que dans celui de $T_{t,k}$ −1; ces matrices étant à lignes échelonnées on déduit au moyen d'un raisonnement de type pivot que le rang de M est inférieur ou égal au maximum de la somme des rangs des blocs diagonaux T_{11}, ...,$T_{\min(p,q)}$, c'est à dire $\sum_{k=1}^{\min(p,q)} \min(i_k, j_k)$ et que cette valeur est atteinte, donc le maximum des rangs des matrices M telles que AM=MB est exactement $\sum_{k=1}^{\min(p,q)} \min(i_k, j_k)$. □

Notation 14. *Si $I = (i_1, ..., i_p)$ et $J = (j_1, ..., j_q)$ sont deux suites d'entiers (strictement positifs) décroissantes, $\omega(I, J)$ désignera $\sum_{k=1}^{\min(p,q)} \min(i_k, j_k)$.*

Dans le cas de l'exemple 10. on vérifie qu'une matrice de rang maximal sera $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme la condition AM=MB induit que la matrice M est diagonale par blocs, où les blocs vérifient le résultat du Théorème 14, on en déduit le

Théorème 15. *Soient deux matrices (A,B)$\in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,où δ désigne, comme dans le Théorème 9., le nombre de valeurs propres communes , et pour chaque i$\in\{1, ..., \delta\}$ I_i et J_i sont les partitions associées respectivement pour A et pour B aux différentes valeurs propres communes λ_i. Le maximum des rangs des matrices M telles que AM=MB est égal à $\sum_{i=1}^{\delta} \omega(I_i, J_i)$,* Dans le cas de matrices semblables on retrouve $\sum_{i=1}^{\delta} \omega(I_i, J_i) = n$.

4 Le degré de similitude de deux matrices carrées

Définition 16. *Degré de similitude de deux matrices carrées de même taille*

Soient deux matrices (A,B)$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *on appellera degré de similitude le maximum des rangs des matrices* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $AM{=}MB$.

On désignera cet entier par s(A,B).

Proposition 17.

i) il est évident que s(A,B)=s(B,A)

ii) mais s(A,B)=s(B,C)=r n'entraîne pas s(A,C)=r.

iii) il est évident que si A et A' sont semblables s(A,B)=s(A',B).

Démonstration.

Les points i et iii étant évidents, nous nous contenterons d'un contre-exemple pour établir le point ii.

Considérons les trois matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; il est aisé de voir que s(A,B)=3, s(B,C)=2+1=3 mais s(A,C)=2. □

Remarque 18.

Il y a certainement plus *à* sur ce degr*é* de similitude

Bibliographie:

[1] C.C. Mac Duffee, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company,New-York, 1956, p. 89-91. (les textes originaux de F.G. Frobenius et de F. Cecioni sont difficiles à rencontrer).

[2] F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company,New-York, 1959, Volume 1, p.215-220.

[3] H.W. Turnbull and A.C. Aitken, *An introduction to the Theory of Canonical Matrices*, Dover, New-York, 1961.Mac