petite fantaisie dynamique

Patrick Teller

25 septembre 2024

1 Description du système dynamique

On considère un tableau carré $T = [1, .., n]^2$ dont les lignes seront décrites comme horizontales ou verticales et on désigne par U une suite injective de cases du tableau définie comme suit

Initialisation : On désignera par U_0 une case du tableau et par U_1 une autre case de la même ligne horizontale.

Le mécanisme : pour tout entier i tel que U_{2i+1} appartient à $\complement_T \{U_0, ..., U_{2i}\}$, U_{2i+2} sera une case de la ligne verticale passant par U_{2i+1} et pour tout entier i tel que U_{2i+2} appartient $\complement_T \{U_0, ..., U_{2i+1}\}$, U_{2i+3} sera une case de la ligne horizontale passant par U_{2i+2}.

Par exemple voici une trajectoire possible dans le tableau carré $[1, .., 6]^2$:
Instant t=0 ($x = 2, y = 0$; instant $t = 1(x = 4, y = 0)$ etc...

1	2	3	4	5	6
	$U_0 = U_{12}$		U_1		
		U_9		U_8	
			U_2		U_3
U_6				U_7	
	U_{11}	U_{10}			
U_5					U_4

On peut voir sur cet exemple que U_{12} est égal à U_0 et que la suite s'arrête là.

2 Analyse du Problème

Théorème 1. *Quelle que soit la position initiale et quelles que soient les décisions intermédiaires, à condition que les contraintes décrites plus haut soient respectées, la trajectoire de U est un cycle.*

Ce que l'on peut décrire comme suit :

Théorème 2. *Soit un tableau*$[1, ..., n]^2$*, si on définit une famille injective de points comme suit :*

— a_0 *et* a_1 *appartiennent à une même ligne du tableau*

— *pour tout i de* $\mathbb{N}$ *le segment* $[a_{2i+1}, a_{2i+2}]$ *est horizontal*

— *pour tout i de* $\mathbb{N}^*$ *le segment* $[a_{2i}, a_{2i+1}]$ *est vertical*
avec les contraintes :

— *dans chaque colonne il y a 2 points au plus*

— *dans chaque ligne il y a 2 points au plus*
Alors $A = \{a_0, ..., a_{2n-1}\}$ *et* a_{2n} *et* a_1 *appartiennent à la même colonne.*

Démonstration. a_0 est choisi de manière arbitraire Il y a pour a_1 n choix, puis pour a_2 n-1 choix, pour a_3 n-1 choix (pour éviter la ligne de a_1) et pour a_4 n-2 choix (pour éviter les colonnes de a_1 et de a_2).

Supposons que pour chaque point $a_{2i-1}, i = 1, ..., p$ il y ait n-i choix et que pour chaque point $a_{2i}, i = 1, .., p$ il y ait n-i choix, alors au moment du choix de $a_{2p+1} = a_{2(p+1)-1}$ p colonnes sont déjà occupées donc il faudra choisir a_{2p+1} parmi les n-p encore inoccupées et de même il faudra choisir $a_{2(p+1)}$ parmi les n-p-1 colonnes encore inoccupées.

Par suite cette construction sera encore possible pour a_{2n-1} à qui il ne reste que n-(n-1) choix mais pas pour a_{2n} à qui il restera "zéro choix". Donc voici la famille recherchée $\{a_0, ..., a_{2n-1}\}$.
Par ailleurs les contraintes imposées font que lors de la séquence $a_{2i} - a_{2i+1}$ une colonne passe de 0 passage à 2 et lors d'une séquence $a_{2j+1} - a_{2j+2}$ c'est une ligne qui passe de 0 passage à 2 passages ; donc comme la colonne de a_0 est initialisée avec 1 seul passage, ce ne peut être que lors du choix de a_2n que s'effectue le mouvement manquant dans cette ligne. □

Voilà pourquoi, quele que soit la case initiale U_0 *et quelles que soient les valeurs de* U_1*,*U_2*,..,*$U_{2n-1)}$ *le terme suivant sera égal au premier terme* U_0*.*