Une erreur grave sans conséquence

PAR PATRICK TELLER

Pour le développement limité de $(1+x)^a$ on opère comme suit:

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{a(a-1).......(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

mais dans le cas de $(1+x)^x$ on doit poser

1) $u(x) = x\ln(1+x) = x(x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + o(x^{n-1})) = x^2 - \frac{x^3}{2} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n-1} + o(x^n)$

2) $e^{u(x)} = 1 + u(x) + ... + \frac{u(x)^n}{n!} + o(u(x))^n$

3) substituer la formule du 1) à u(x) dans 2) et tronquer à l'ordre n.

Boris Velikson, qui enseigne les Mathématiques et l' Informatique à l'EFREI, m'a fait remarquer que des étudiants, qui avaient traité l'exposant x de $(1+x)^x$ comme la constante a de la première formule, avaient obtenu $(1+x)^x = 1 + xx + \frac{x(x-1)}{2!}x^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{x(x-1).......(x-n+1)}{n!}x^n$ (*) puis tronqué à l'ordre n obtenant le résultat correct.

Ils avaient raison !

Exemple 1. Avec maxima

$(1+x)^x$ à l'ordre 12

```
(%i10) essai(u,n):=block([k,b,c],b:u,c:1+b*x,for k:2 thru n do (b:b*(u-k+1),c:c+b*x^k/(k!)),return(c))$
(%i11) a:remainder(essai(x,12),x^13);
                12            11            10             9             8
(%o11) (18028763 x   - 17849700 x   + 17639820 x   - 17380440 x   + 17099280 x
           7             6             5             4            3
 - 16632000 x  + 16465680 x  - 14968800 x  + 16632000 x  - 9979200 x
           2
 + 19958400 x  + 19958400)/19958400
(%i12) b:taylor((1+x)^x,x,0,12);
                        3      4      5       6      7        8       9
                 2     x    5 x    3 x    33 x    5 x    2159 x    209 x
(%o12)/T/ 1 + x  - -- + ---- - ---- + ----- - ---- + ------- - ------
                   2     6      4      40      6      2520      240
                                              10        11           12
                                        8909 x     601 x     18028763 x
                                      + -------- - ------- + ------------ + . . .
                                         10080      672       19958400
(%i13) a-b;
(%o13)/T/                          0 + . . .
```

1 Quelques rappels et définitions

Définition 2. *Polynômes de Newton*

Les polynômes $N_j(X) = \frac{X(X-1)...(X-j+1)}{j!}$ *sont appelés Polynômes de Newton*

La question est donc est-ce que $(1+x)^x = \overline{\sum_{j=0}^n N_j(x)x^j} + o(x^n)$, ou $\overline{\cdots}$ désigne la troncature à l'ordre n?

Définition 3. *Série alternée*

Une série à termes réels $\sum u_n$ est dite alternée lorsque les signes des termes u_n sont alternés.

Théorème 4. *Théorème spécial des séries alternées*

Soit une série alternée $\sum u_n$, telle que la suite $(|u_n|)$ est décroissante et tend vers 0, alors

i) la série converge

ii) si on pose $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$=S, $\forall N \in \mathbb{N}, |S - \sum_{n=0}^{N} u_n| \leqslant |u_{N+1}|$.

2 Le cas (1+x)^a

Théorème 5.

Soit un réel $a \in]-1,1[$, quel que soit le réel $x \in [0,1[$

i) la série $\sum N_j(a)x^j$ vérifie (a partir de j=1) les conditions du théorème spécial des séries alternées.

ii) $\forall N \geqslant 1, |\sum_{j=0}^{N} N_j(a)x^j\text{-}(1+x)^a| < /N_{N+1}(a)/x^{N+1}$

iii) $\forall N \geqslant 1, |\sum_{j=0}^{N} N_j(a)x^j\text{-}(1+x)^a| = 0(x^N)$.

Démonstration.

i) $\frac{N_{j+1}(a)x^{j+1}}{N_j(a)x^j} = \frac{a-j}{j+1}x$ est négatif dès que a<j et sa valeur absolue est inférieure à x.

ii) découle du théorème spécial

iii) il suffit de remarquer que:

$|a| \leqslant 1, |a-1| \leqslant 2, |a-2| \leqslant 3, ..., |a-n| \leqslant n+1$, d'ou $/N_{n+1}(a)/ \leqslant \frac{(n+1)!}{(n+1)!}$)

D'ou $\forall N \geqslant 1, |\sum_{j=0}^{N} N_j(a)x^j\text{-}(1+x)^a| < x^{N+1}$.

Cette dernière remarque nous permettra de faire varier a. □

3 Le cas (1+x)^x

On fixe x dans [0,1[et a dans ce même intervalle; alors $\forall N > 1, |\sum_{j=0}^{N} \mathrm{N}_j(\mathrm{a})\mathrm{x}^j\text{-}(1+\mathrm{x})^a| < \mathrm{x}^{N+1}$, on fait alors tendre a vers x, comme les polynomes N_j et la fonction t->(1+x)^t sont continues

$\forall N > 1, |\sum_{j=0}^{N} \mathrm{N}_j(\mathrm{x})\mathrm{x}^j\text{-}(1+\mathrm{x})^x| \leqslant M\mathrm{x}^{N+1}$.

Il ne reste plus, pour obtenir un développement limité à l'ordre N qu'à tronquer $\sum_{j=0}^{N} \mathrm{N}_j(\mathrm{x})\mathrm{x}^j$ a l'ordre N.

Remarque 6.

Sachant que (1+x)^x possède un développement limité à l'ordre N en 0, le même, valable tant à gauche qu'à droite, le fait de l'avoir « identifié » à droite permet de conclure aussi pour x<0

Remarque 7.

On raisonnerait de même si au lieu de $(1+x)^x$ il s'agissait de $(1+x)^{v(x)}$, tant que v(x) tend vers 0 .

Exemple 8. Avec maxima $(1+x)^{\sin(x)}$ à l'ordre 7

```
                         2      3      3      18       240
%i42) essai(u,n):=block([k,b,c],b:u,c:1+b*x, for k:2 thru n do (b:b*(u-k+1),c:c+b*x^k/(k!)),return(c))$
%i43) a:taylor((1+x)^(sin(x)),x,0,7);
                          3      4      5       6         7
                     2    x     2 x    2 x    11 x    151 x
%o43)/T/     1 + x  - -- + ---- - ---- + ----- - ------ + . . .
                         2      3      3      18       240
%i44) b:remainder(essai(x-x^3/6+x^5/120-x^7/(7!),8),x^8);
                           2        3        4        5        6        7
         (- 720) - 720 x  + 360 x  - 480 x  + 480 x  - 440 x  + 453 x
%o44)  - ------------------------------------------------------------
                                       720
%i45) a-b;
%o45)/T/                          0 + . . .
```

Remarque 9.

Cela dit reste la difficulté à développer puis simplifier et enfin tronquer.

Paris, fin avril 2017