Une famille d'identités (comment j'ai retrouvé les relations de Plucker)

PATRICK TELLER
version beta

1 En dimension 2

1.1 L'identité

On considère trois vecteurs $V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{pmatrix}$ linéairement indépendants deux à deux.

Théorème 1. *Théorème « à la Cramer »*

Soient V_1, V_2, V_3 comme au-dessus et le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on notera $Y_j = \begin{vmatrix} y_1 & v_{1j} \\ y_2 & v_{2j} \end{vmatrix}$, pour j=1,2,3 et $D_1 = \begin{vmatrix} v_{12} & v_{13} \\ v_{22} & v_{23} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} v_{13} & v_{11} \\ v_{23} & v_{21} \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}$

$$Y = u_1 V_1 + u_2 V_2 + u_3 V_3 \iff \begin{cases} 0 - D_3 u_2 + D_2 u_3 = Y_1 \\ D_3 u_1 + 0 - D_1 u_3 = Y_2 \\ -D_2 u_1 + D_1 u_2 + 0 = Y_3 \end{cases}.$$

Ce système est de rang deux et possède des solutions quel que soit le vecteur Y.

Démonstration.

L'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $Y = u_1 V_1 + u_2 V_2 + u_3 V_3 \longmapsto (Y_1, Y_2, Y_3)$ est injective car son noyau consiste en les vecteurs colinéaires à la fois à V_1, V_2 et V_3; par suite le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -D_3 & D_2 \\ D_3 & 0 & -D_1 \\ -D_2 & D_1 & 0 \end{pmatrix}$ est égal à deux.

L'équivalence découle de l'égalité des dimensions de l'espace source et de l'image de l'application. □

La réduction du système conduit à l'identité

Théorème 2. *$det(Y, V_1) * det(V_2, V_3) + det(Y, V_2) * det(V_3, V_1) + det(Y, V_3) * det(V_1, V_2) = 0$ (*)*

Remarque 3. Cette relation peut aussi se vérifier directement et elle reste vraie lorsqu'on supprime la condition d'indépendance linéaire.

On remarquera que le rôle de Y n'est distinct des autres qu'en apparence et que

(*) $\iff \det(V_1, V_2) * \det(V_3, Y) + \det(V_1, V_3) * \det(Y, V_2) + \det(V_1, Y) * \det(V_2, V_3) = 0$ etc..

Pour comparer avec la suite on écrira $D_1 Y_1 + D_2 Y_2 + D_3 Y_3 = 0$.

Réponse. (à la question que vous posez certainement)

Cette identité n'est pas nouvelle, il s'agit d'une relation de Plücker [1].

Il y a cependant une différence notable

Les coordonnées de Plücker représentent une injection de l'ensemble des droites de l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ dans $\mathbb{P}^5$ (en gros : à chaque droite on associe un point représenté par 6 coordonnées, à un coefficient multiplicatif près) et la relation (*) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de $\mathbb{P}^5$ soit l'image d'une droite.

Tandis qu'ici on associe à chaque quadrilatére de $\mathbb{R}^2$ un point de $\mathbb{P}^5$; nous allons essayer de comprendre pourquoi nous avons obtenu la même relation.

1.2 L'application de $\mathbb{Q}(2)$ vers $\mathbb{P}^5$

Définition 4. *On désignera par $\mathbb{Q}(2)$ l'ensemble des quadrilatères de $\mathbb{R}^2$*

On appellera quadrilatère toute liste de 4 points (non alignés) de $\mathbb{R}^2$ et on désignera par $\mathbb{Q}(2)$ l'ensemble des quadrilatères de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.

A tout quadrilatère Q=[M0,M1,M2,M3] de $\mathbb{R}^2$ on associe la liste φ(Q)=[det(M0,M1),det(M0,M2),det(M0,M3),det(M1,M2),det(M1,M3),det(M2,M3)]$\in\mathbb{P}^5$.

Théorème 6. *Propriétés de l'application φ*

1) Si f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$, $\forall Q \in \mathbb{Q}(2), \varphi(f(Q)) = \varphi(Q)$

*2) Soit [q01,q02,q03,q12,q13,q23]$\in\mathbb{P}^5, \exists Q \in \mathbb{Q}(2)$ tel que $\varphi(Q)$ = [q01,q02,q03,q12,q13,q23]$\Longleftrightarrow$ q01*q23-q02*q13+q03*q12=0.*

Démonstration.

1) On sait que si V et W sont des vecteurs et f un morphisme det(f(V),f(W))=det(f)det(V,W), donc l'action d'un automorphisme sur la liste revient à multiplier les 6 coordonnées par un même scalaire non nul, ce qui représente le même point de l'espace projectif $\mathbb{P}^5$.

2) L'implication a été établie plus haut.

Pour la réciproque:

Par définition des espaces projectifs l'une au moins des six coordonnées est non nulle, on supposera que q12$\neq 0$; .

Alors on peut poser M1=$\begin{pmatrix} q12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $M3 = \begin{pmatrix} -q23 \\ \frac{q13}{q12} \end{pmatrix}$, qui vérifient les définitions de q12,q23,q13, puis l'existence de M0 découle du Théorème 1. □

Théorème 7. *Etude des fibres de φ*

Les fibres de φ sont en bijection avec $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^2)$

Démonstration. *Soient deux quadrilatères M=[M0,M1,M2,M3] et N=[N0,N1,N2,N3] tels que $\varphi(M) = \varphi(N)$, alors det(M1,M2)=det(N1,N2),det(M1,M3)=det(N1,N3) et det(M2,M3)=det(N2,N3).*

Supposons, comme au-dessus que det(M1,M2)=det(N1,N2)$\neq 0$.

Soit alors l'automorphisme f tel que N1=f(M1) et N2=f(M2), alors *det(N1,N3-f(M3))=0 et det(N2,N3-f(M3))=0, d'où N3-f(M3)=0.*

D'où $\forall i=1,2,3$ *Ni=f(Mi); la suite: comme dans le Théorème 1;*

d'où $\forall i=1,2,3,4$ *Ni=f(Mi), N=f(M).* □

1.3 Les classes de quadrilatères

Définition 8.

Nous dirons que deux quadrilatères M et N sont équivalents lorsqu'il existe un automorphisme f tel que f(M)=N.

Théorème 9. *Détermination de l'équivalence de deux quadrilatères*

Soient deux quadrilatères M=[M0,M1,M2,M3] et N=[N0,N1,N2,N3]

M est équivalent à N si seulement si $\varphi(M)=\varphi(N)$

ou, ce qui est suffisant, $\exists i \in I=\{0,1,2,3\}$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{\star}, \forall (j,k) \in (I \backslash i)^2, \mathrm{det(Mj,Mk)} = \lambda \mathrm{det(Nj,Nk)}$

Démonstration.

Se reporter au Théorème précédent. □

1.4 Sous l'angle des matrices

Définition 10. *La matrice d'un quadrilatère*

On appellera matrice du quadrilatère M=[M0,M1,M2,M3] la matrice $\tilde{M}$*=(M0,M1,M2,M3)*$\in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{R})$.

Définition 11. *La grassmanienne G(2,3) est l'ensemble des droites (projectives) de l'espace projectif* $\mathbb{P}^3$.

Théorème 12. *(de Plücker)*

Il existe une bijection entre G(2,3) et $\varphi(\mathbb{Q}(2))$

Démonstration.

La condition de non-alignement des points se traduit par rang($\tilde{M}$*)=2, ce qui signifie que dans les matrices considérées les lignes sont indépendantes, et donc représentent des points distincts de l'espace projectif* $\mathbb{P}^3$.

Par ailleurs $\varphi(M)=\varphi(N) \Longleftrightarrow \exists P \in \mathcal{GL}(2,\mathbb{R}), \tilde{M}=P\tilde{N}$ *(**).*

Si on note $\tilde{M}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \end{pmatrix}$ *et* $\tilde{N}=\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \end{pmatrix}$, *(**) équivaut à dire que les points*

$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{P}^3$ *engendrent la même droite (projective) que* $\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \end{pmatrix}$ □

Remarque 13.

La boucle est bouclée entre l'ensemble des quadrilatères (non plats) de $\mathbb{R}^2$(modulo les automorphismes) et celui des droites projectives de $\mathbb{P}^3$.

2 En dimension 3

Soient cette fois les vecteurs V_1,V_2,V_3,V_4, linéairement indépendants trois à trois dans $\mathbb{R}^3$ et un vecteur Y; la même démarche conduit au système suivant

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & D_4 & D_3 \\ 0 & -D_4 & 0 & D_2 \\ 0 & -D_3 & -D_2 & 0 \\ D_4 & 0 & 0 & D_1 \\ D_3 & 0 & -D_1 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{13} \\ Y_{14} \\ Y_{23} \\ Y_{24} \\ Y34 \end{pmatrix}$ avec les notations

D_1=det(V_2, V_3, V_4),D_2=det(V_3,V_4,V_1),D_3=det(V_4,V_1,V_2),D_4=det(V_1,V_2,V_3)

et Y_{jk}=det(Y,V_j,V_k)

De même l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^6$ définie par Y=$u_1V_1+u_2V_2+u_3V_3+u_4V_4 \longmapsto (Y_{12}, ..., Y_{34})$ est injective car son noyau consiste en les vecteurs colinéaires à la fois à V_1,V_2, V_3, V_4.

Donc la matrice est de rang 3 et la réduction du système conduit donc, sous peine de non existence de solutions (ce qui serait impossible puisque V_1,V_2, V_3, V_4 engendrent $\mathbb{R}^3$), à trois identités :

$$\begin{cases} D_4 Y_{34} - D_1 Y_{31} + D_2 Y_{32} = 0 \\ D_2 Y_{12} - D_3 Y_{13} + D_4 Y_{14} = 0 \quad (***) \\ D_3 Y_{23} - D_4 Y_{24} + D_1 Y_{21} = 0 \end{cases}$$

ou (pour garder la symétrie)

$$\begin{cases} D_4 Y_{34} - D_1 Y_{31} + D_2 Y_{32} + D_3 Y_{33} = 0 \\ D_2 Y_{12} - D_3 Y_{13} + D_4 Y_{14} - D_1 Y_{11} = 0 \\ D_3 Y_{23} - D_4 Y_{24} + D_1 Y_{21} - D_2 Y_{22} = 0 \end{cases}$$

ce qui peut se résumer comme suit

$$D_1 \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{31} \end{pmatrix} - D_2 \begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \end{pmatrix} + D_3 \begin{pmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \end{pmatrix} - D_4 \begin{pmatrix} Y_{14} \\ Y_{24} \\ Y_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on vérifie à l'aide du système (toujours dans l'espoir d'une plus grande symétrie) que

D_1Y_{41}-D_2Y_{42}+D_3Y_{43}+D_4Y_{44}=0

d'où l'identité

$$D_1 \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ Y_{31} \\ Y_{41} \end{pmatrix} - D_2 \begin{pmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \\ Y_{32} \\ Y_{42} \end{pmatrix} + D_3 \begin{pmatrix} Y_{13} \\ Y_{23} \\ Y_{33} \\ Y_{43} \end{pmatrix} - D_4 \begin{pmatrix} Y_{14} \\ Y_{24} \\ Y_{34} \\ Y_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D1 \begin{pmatrix} Y11 \\ Y21 \\ Y31 \\ Y41 \end{pmatrix} - D2 \begin{pmatrix} Y12 \\ Y22 \\ Y32 \\ Y42 \end{pmatrix} + D3 \begin{pmatrix} Y13 \\ Y23 \\ Y33 \\ Y43 \end{pmatrix} - D4 \begin{pmatrix} Y14 \\ Y24 \\ Y34 \\ Y44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Question 14. *On peut conjecturer que ces relations associées à l'ensemble des pentagones (non plans) de $\mathbb{R}^3$ ont un rapport avec celui des plans projectifs de P^4 et que (***) traduit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de P^{10} représente l'image d'un pentagone de $\mathbb{R}^3$ ou d'un plan projectif de P^4.*

Bibliographie :

[1] D.Mumford, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1976

Nimes - Paris décembre 2016.