Math. Ann. 264, 423–436 (1983)

Mathematische Annalen

Invariants symétriques et fibrés vectoriels sur les courbes

J. Bertin et P. Teller

Département de Mathématiques, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex, France

Introduction

Inspiré par des résultats de Bogomolov sur le fibré cotangent, Sakai [11] a introduit le λ-invariant d'un fibré vectoriel sur une variété projective lisse. Pour un fibré E, λ mesure le comportement asymptotique de la fonction $m \mapsto h^0(S^m(E))$, où $S^m(E)$ est la puissance symétrique d'ordre m de E. De manière précise, il existe des constantes positives α, β et un entier positif m_0, tels que pour $m \gg 0$,

$$\alpha m^\lambda \leqq h^0(S^{mm_0}(E)) \leqq \beta m^\lambda .$$

λ prend l'une des valeurs $-\infty, 0, 1, \ldots, n+r-1$, où n est la dimension de la variété et r le rang de E. L'existence de λ découle du travail d'Itaka [8], en considérant le fibré projectif $\mathbb{P}(E)$ et le faisceau inversible $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$; alors λ coïncide avec la L-dimension de $\mathbb{P}(E)$. Les propriétées de λ qui découlent de celles de la L-dimension sont développées dans [11]. Signalons que l'invariant λ a été aussi utilisé par Green et Griffiths dans un but similaire [5].

Dans cet article, nous supposerons que la variété X est une courbe, et E un fibré vectoriel de rang r sur X; alors λ prend une des valeurs $-\infty, 0, 1, \ldots, r$. Un exemple simple est fourni si X est elliptique par le fibré F_2 d'Atiyah [1]. Si F_m désigne pour $m \geqq 2$ l'extension non triviale de F_{m-1} par $\mathcal{O}_X$, alors (loc. cit.), $h^0(F_m) = 1$ et $S^m(F_2) = F_m$, par suite $\lambda(F_2) = 0$. En fait, nous verrons que X étant elliptique, la valeur $\lambda = 1$ ne peut être obtenue par un fibré indécomposable de rang deux (Par. 4).

Pour énoncer le résultat principal de cet article, introduisons l'entier $d^*(E)$ par

$$d^*(E) = \sup\{\deg(F), F \text{ sous-fibré de } E\}$$

alors nous démontrons (Par. 3):

(i) $d^* > 0$ implique $\lambda = r$ (maximum),

(ii) $d^* = 0$ implique $\lambda \leqq r-1$,

(iii) $d^* < 0$ implique $\lambda = -\infty$.

En général λ maximum n'implique pas E ample, cependant de manière équivalente à un théorème d'Hartshorne, on peut voir que si λ est maximum et si E est semi-stable, alors E est ample. Les démonstrations font largement appel aux résultats de Hartshorne et Gieseker [7, 3] sur la semi stabilité des puissances symétriques $S^m(E)$. Notons que récemment Maruyama a obtenu des résultats dans le même sens pour la dimension supérieure ou égale à deux. Pour préciser (ii), on peut considérer la filtration de Harder-Narasimhan de E [10]:

$$0=E_0 \subsetneqq E_1 \ldots \subsetneqq E_t = E.$$

Par définition E_1 est un fibré semi-stable; nous montrons que $\lambda(E)$ coïncide avec $\lambda(E_1)$. Ce qui ramène le problème (si $d^*=0$) à la considération des fibrés semi-stables. Il n'est pas difficile de construire un fibré décomposable E avec un λ donné, par contre le problème devient intéressant si on suppose E indécomposable. Quant à la valeur que peut prendre $\lambda(E)$ pour E stable, la résponse ne semble pas très évidente. Si $k=\mathbb{C}$, on peut transformer la question en un problème de théorie des invariants, en utilisant la correspondance explicitée par Narasimhan et Seshadri [9], entre fibrés stables (resp. semi-stables) de degré zéro sur une courbe de genre $g \geqq 2$ et les représentations unitaires irréductibles, du groupe fondamental $\pi_1(X)$, (resp. unitaires). Nous démontrons dans le Par. 5 que pour tout $r \geqq 2$ il existe un fibré stable de degré zéro et de rang r avec $\lambda = r-1$, qui est le maximum possible, respectivement $\lambda = -\infty$. Par exemple, nous montrons que pour le rang 2, toute valeur de λ est obtenue par un fibré stable, par contre dans le cas du rang trois, il n'existe pas de fibré stable de degré zéro avec $\lambda = 1$. Nous n'avons pas d'explication géométrique de ce phénomène.

Dans tout cet article, les variétés sont définies sur un corps de base algébriquement clos de caractéristique zéro, dans le Par. 5, ce corps sera le corps des complexes.

1. λ-dimension d'un fibré vectoriel

Pour tout faisceau inversible L sur une variété projective lisse X, Itaka [8] a introduit la L-dimension de X: si $h^0(L^n)>0$ pour un entier $n>0$, $K(L,X) = \deg \operatorname{tr}\left\{\bigoplus_{n\geqq 0} H^0(L^n)\right\} - 1$, sinon $K(L,X) = -\infty$. Ainsi si $K(L,X) \geqq 0$, $K(L,X)$ est majoré par $\dim(X)$. Alternativement, on peut caractériser $K(L,X)$ par le comportement asymptotique de $h^0(L^n)$ quand $n \mapsto \infty$. Soit une fonction $f: N^* \to N$ ($N^* = N - \{0\}$), disons que f est asymptotiquement équivalente à n^K (en abrégé $f \sim n^K$), s'il existe des constantes α, β positives, un entier positif m_0 de telle sorte que pour tout n assez grand on ait

$$\alpha n^K \leqq f(n m_0) \leqq \beta n^K.$$

Notons que K est bien défini et si $f(n)=0$ pour tout $n>0$, $K=-\infty$.

Maintenant considérons un fibré vectoriel E de rang r sur X. Sakai [11] définit la λ-dimension de E comme étant la L-dimension du fibré projectif $\mathbb{P}(E)$, L étant le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. Par suite si $\lambda \geqq 0$, λ est un entier compris entre 0 et $n+r-1$. Soit $p: \mathbb{P}(E) \to X$ la projection, on a $p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(n)) \cong S^n(E)$, alors la λ-dimension de E est caractérisée par:

$$h^0(S^n(E)) \sim n^\lambda.$$

Les propriétées de la L-dimension établies par Itaka (loc. cit.) s'énoncent de manière analogue pour la λ-dimension, voir Sakai (loc. cit.).

Dans la suite nous supposerons que X est une courbe complètè lisse, de genre g. Si E est un fibré de rang r sur X, l'invariant λ de E prend une des valeurs $\{-\infty, 0, 1, \ldots, r\}$. Les informations numériques sur $S^m(E)$ sont faciles à obtenir.

Lemme 1.1. *Soit E un fibré vectoriel de* rang r *et de degré d sur X,*

(i) $$\operatorname{rang} S^m(E) = \binom{m+r-1}{r-1}$$

(ii) $$\deg(S^m(E)) = \frac{dm}{r}\binom{m+r-1}{r-1}.$$

Il est facile de déduire du lemme 1.1 et du théoréme de Riemann-Roch la proposition suivante, qui sera généralisée dans le Par. 2.

Proposition 1.2. *Si E est un fibré vectoriel de* rang r *et de degré $d>0$, alors $\lambda(E)=r$.*

Preuve. Par le théorème de Riemann-Roch, nous avons

$$\chi(S^m(E)) = h^0(S^m(E)) - h^1(S^m(E)) = \deg S^m(E) + \operatorname{rang} S^m(E)(1-g).$$

En vertu du lemme 1.1, $\deg S^m(E)$ est un polynôme en m de degré r et $\operatorname{rang} S^m(E)$ un polynôme en m de degré $r-1$, par suite
$h^0(S^m(E)) \geqq$ un polynôme en m de degré $r \geqq \alpha m^r$ pour un $\alpha > 0$. On conclut que $\lambda = r$.

En particulier, si E est ample, $\lambda = r$. Rappelons que E est ample si et seulement si tout fibré quotient de E (y compris E lui-même) est de degré strictement positif [7]. La proposition suivante sera souvent utilisée dans la suite, voir [1].

Proposition 1.3. *Soit $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels, il existe une filtration de $S^m(E)$:*

$$S^m(E) = E_0 \supset E_1 \supset \ldots \supset E_{m+1} = 0 \quad avec \quad E_p/E_{p+1} \cong S^p(E') \otimes S^{m-p}(E'').$$

De cette proposition on déduit la majoration

$$h^0 S^m(E) \leqq \sum_{p=0}^{m} h^0(S^p(E') \otimes S^{m-p}(E''))$$

qui est une égalité si la suite est scindée. Si E' et E'' sont de rang un, on a $E_j = S^{m-j}(E) \otimes E'^j$. Comme exemple on peut traiter le cas $g=0$ sans difficulté. Alors $X = \mathbb{P}^1$ et $E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(a_r)$ avec $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_r$. On obtient

(i) Si $a_1 > 0$, $\lambda = r$,
(ii) Si $a_1 = \ldots = a_j = 0 > a_{j+1}$, $\lambda = j-1$,
(iii) Si $a_1 < 0$, $\lambda = -\infty$.

2. Fibrés de λ-dimension maximum

Pour un fibré vectoriel E sur une courbe X, nous poserons $\mu(E) = \deg(E)/\operatorname{rang}(E)$. Alors rappelons que E est stable (resp. semi-stable) si pour tout sous-fibré F. $\mu(F) < \mu(E)$ (resp. $\leqq$). Nous avons besoin des résultats connus suivants.

Lemme 2.1. *Soit E un fibré semi-stable de degré nul et de rang r, alors $h^0(E) \leqq r$.*

Preuve. Supposons $H^0(E) \neq 0$, et considérons un sous-fibré L de E de rang un avec $h^0(L) \neq 0$. Par semi-stabilité, $\deg(L) \leqq 0$, d'où $L \simeq \mathcal{O}_X$. On a donc une extension $0 \to \mathcal{O}_X \to E \to F \to 0$ avec $\deg(F) = 0$. Il est facile de voir que F est semi-stable; vu que $h^0(E) \leqq h^0(F) + 1$, on conclut par récurrence sur r.

Lemme 2.2. *Soit E un fibré de rang r, semi-stable (resp. stable) sur la courbe X, si $\mu(E) > 2g-2$ (resp. $\geqq$), alors $H^1(E) = 0$.*

Preuve. Par dualité $H^1(E) \neq 0$ équivaut à $H^0(\Omega \otimes E^*) \neq 0$. Comme $\Omega \otimes E^*$ est semi-stable (resp. stable), on obtient $\mu(\Omega \otimes E^*) = 2g - 2 - \mu(E) \geqq 0$ (resp. >0). D'où l'assertion.

Le résultat suivant est important pour nous, il est dû à Hartshorne si $k = \mathbb{C}$ [7], et à Gieseker en général [3, Théorème 1.2].

Théorème 2.3. *Soit E un fibré semi-stable sur une courbe lisse X,*
(i) *$S^m(E)$ est semi-stable pour $m > 0$.*
(ii) *Si $\deg(E) > 0$, E est ample.*

Nous avons vu si $X = \mathbb{P}^1$ que $\lambda(E)$ est maximum si et seulement si E admet un facteur de rang un de degré strictement positif. Le résultat principal de cette section est la généralisation de ce fait a une courbe de genre arbitraire.

Théorème 2.4. *Soit E un fibré de rang r sur une courbe X. Si E contient un sous-fibré de degré strictement positif, alors $\lambda(E) = r$.*

Preuve. Elle reprend l'idée d'une construction plus générale de Harder et Narasimhan que nous allons utiliser par la suite. Soit F un sous-fibré de E, de degré strictement positif et de rang minimum pour cette propriété, alors F est stable. En effet, si F n'était pas stable il devrait contenir un sous-fibré de degré strictement positif, ce qui contredit la minimalité du rang de F.

Posons $G = E/F$ et $t = \text{rang}(G)$. Soit l'extension $0 \to F \to E \to G \to 0$ et considérons la filtration de $S^m(E)$ associée, dont les quotients sont les fibrés $S^p(F) \otimes S^{m-p}(G)$ (1.3).

Nous désirons trouver un entier N tel que si $p \geqq N$, $h^1(S^p(F) \otimes S^{m-p}(G)) = 0$. De manière précise, on a le lemme:

Lemme 2.4. *Pour tout $m > 0$, il existe un entier $N(m)$ tel que pour $N(m) \leqq p \leqq m$, on ait $h^1(S^p(F) \otimes S^{m-p}(G)) = 0$; de plus il existe un réel α avec $0 \leqq \alpha < 1$ tel que $N(m) \sim \alpha m$ lorsque $m \to \infty$.*

Preuve du lemme. On considère une filtration $0 = G_{t+1} \subset G_t \subset \ldots \subset G_1 = G$ où les quotients $L_i = G_i/G_{i+1}$ sont de rang un; posons $\deg(L_i) = \chi_i$. Le fibré $S^{m-p}(G)$ admet une filtration dont les quotients sont les $L_1^{e_1} \ldots L_t^{e_t}$ avec $\sum_{j=1}^{t} e_j = m - p$ (1.3).

Alors le fibré $S^p(F) \otimes S^{m-p}(G)$ admet une filtration dont les quotients sont les $S^p(F) \otimes L_1^{e_1} \ldots L_t^{e_t}$ avec $\sum_{j=1}^{t} e_j = m - p$. Pour annuler $h^1(S^p(F) \otimes S^{m-p}(G))$ il suffit d'annuler pour tout t-uple $(e_1, \ldots, e_t)$ avec $e_1 + \ldots + e_t = m - p$, les

$H^1(S^p(F)\otimes L_1^{e_1}\dots L_t^{e_t})$. Nous avons en utilisant le lemme 1.1

$$\mu(S^p(F)\otimes L_1^{e_1}\dots L_t^{e_t})=\mu(S^p(F))+\mu(L_1^{e_1}\dots L_t^{e_t})=p\mu+\sum_{j=1}^{t} e_j\chi_j \quad [\text{où } \mu=\mu(F)].$$

Le fibré $S^p(F)$ étant semi-stable (loc. cit.) nous aurons $h^1(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G))=0$ si pour tout $(e_1,\dots,e_t)$ avec $e_1+\dots+e_t=m-p$, $p\mu+\sum_{j=1}^{t} e_j\chi_j\geqq 2g-1$ (2.2).

Soit $-a=\min(\chi_j)_{j=1\dots t}$, alors $\sum_{j=1}^{t} e_j\chi_j\geqq -a\left(\sum_1^t e_j\right)=-a(m-p)$; il suffit donc d'avoir $p\mu-a(m-p)\geqq 2g-1$ pour que $h^1(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G))=0$. Mais

$$p\mu-a(m-p)\geqq 2g-1 \Leftrightarrow p(a+\mu)\geqq 2g-1+am \Leftrightarrow p\geqq \frac{2g-1+am}{a+\mu}.$$

Remarquons que $\frac{am+2g-1}{a+\mu}\sim\frac{a}{a+\mu}m$ pour $m\to\infty$. Il suffit alors de poser $\alpha=\frac{a}{a+\mu}$; notons que par hypothèse $\mu>0$.

Si tous les χ_j sont strictement positifs, G est extension de fibrés amples donc est ample. Comme F est semi-stable de degré positif, F est ample par un résultat de Gieseker [3, Théorème 1.2]; par suite E est ample, donc $\lambda(E)=r$ (1.2). Ainsi on peut supposer dans la suite $a\geqq 0$, d'où $0\leqq\alpha<1$.

Revenons à la démonstration du théorème. Dans la filtration canonique de $S^m(E)$, on a les suites exactes

$$0\to F_{p+1}\to F_p\to S^p(F)\otimes S^{m-p}(G)\to 0.$$

Supposons $m\geqq p\geqq N(m)$ où $N(m)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{am+2g-1}{a+\mu}$, alors $H^1(F_{p+1})\to H^1(F_p)$ est une surjection, d'où en itérant $H^1(S^m(F))\to H^1(F_p)$ est une surjection, et comme $H^1(S^m(F))=0$, on obtient $H^1(F_p)=0$.

De cela on obtient les inégalités:

$$h^0(S^m(E))\geqq\sum_{N(m)\leqq p\leqq m} h^0(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G))=\sum_{N(m)\leqq p\leqq m}\chi(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G)).$$

Par le théorème de Riemann Roch et le lemme 1.1,

$$\begin{aligned}\chi(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G)) &= \deg(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G))-(g-1)\operatorname{rang}(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G))\\ &= \operatorname{rang}(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G))\,\{\mu(S^p(F)\otimes S^{m-p}(G)-(g-1)\}\\ &= \binom{p+s-1}{s-1}\binom{m-p+t-1}{t-1}(p\mu(F)+(m-p)\mu(G)-g+1)\\ &\quad\cdot[s=\operatorname{rang}(F)].\end{aligned}$$

Donc

$$h^0S^m(E)\geqq\sum_{N(m)\leqq p\leqq m}\binom{p+s-1}{s-1}\binom{m-p+t-1}{t-1}(p\mu(F)+(m-p)\mu(G)-g+1).$$

Posons pour la suite des calculs $q=m-p$, d'où $0\leqq q\leqq m-N(m)\sim(1-\alpha)m$, $m\to\infty$; avec $0<1-\alpha\leqq 1$, par suite

$$h^0S^m(E)\geqq \sum_{0\leqq q\leqq N'(m)} \binom{m-q+s-1}{s-1}\binom{q+t-1}{t-1}((m-q)\mu(F)+q\mu(G)-g+1)$$

où $N'(m)=m-N(m)$.

Remarquons que sous certaines conditions $(m-q)\mu(F)+q\mu(G)\geqq q$; en effet

$$(m-q)\mu(F)+q\mu(G)\geqq q \Leftrightarrow q(-\mu(F)+\mu(G)-1)\geqq -m\mu(F) \Leftrightarrow q\leqq \frac{m\mu(F)}{\mu(F)-\mu(G)+1}$$

si $\mu(F)-\mu(G)+1>0$, sinon l'inégalité est satisfaite pour tout q. Nous pouvons supposer $\mu(G)\leqq 0$ sinon le degré de E serait positif et trivialement $\lambda(E)=r$ (1.2). Par suite $0<\dfrac{\mu(F)}{\mu(F)-\mu(G)+1}<1$; et si on pose

$$N''(m)=\inf\left(\left[\frac{m\mu(F)}{\mu(F)-\mu(G)+1}\right], N'(m)\right),$$

alors $h^0S^m(E)\geqq \sum_{0\leqq q\leqq N''(m)} \binom{m-q+s-1}{s-1}\binom{q+t-1}{t-1}(q-g+1)$. Evaluons la somme

$$\sum_{0\leqq q\leqq N''(m)} \binom{m-q+s-1}{s-1}\binom{q+t-1}{t-1}q;$$

d'une part $q\binom{q+t-1}{t-1}=\dfrac{qt}{q+t}\binom{q+t}{t}$ et d'autre part comme $q\leqq N''(m)\sim\varepsilon m$ avec $0<\varepsilon<1$, on a pour m assez grand, $m-q\geqq\beta m$, β étant une constante strictement positive. On obtient que pour m assez grand $\binom{m-q+s-1}{s-1}\geqq\gamma m^{s-1}$ avec $\gamma>0$, donc:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqq q\leqq N''(m)} \binom{m-q+s-1}{s-1}\binom{q+t-1}{t-1}q &\geqq \gamma m^{s-1}\sum_{0\leqq q\leqq N''(m)} q\binom{q+t-1}{t-1}\\ &\geqq \gamma' m^{s-1}\sum_{0\leqq q\leqq N''(m)}\binom{q+t}{t}\sim\gamma' m^{s-1}\binom{N''(m)+t+1}{t+1}\sim\delta m^{s-1}m^{t+1}=\delta m^r\end{aligned}$$

car $N''(m)\sim\varepsilon m$. Donc le terme $\sum_{0\leqq q\leqq N''(m)} \binom{m-q+s-1}{s-1}\binom{q+t-1}{t-1}q$ est supérieur ou égal à une expression équivalente à δm^r; quant au second terme de la caractéristique d'Euler,

$$\sum_{0\leqq q\leqq N''(m)} \binom{m-q+s-1}{s-1}\binom{q+t-1}{t-1}(g-1),$$

on peut le majorer par cm^{r-1} pour une certaine constante c positive; ce terme est donc négligeable devant le premier. On peut donc conclure que $\lambda(E)=r$.

2.5. Introduisons la notation suivante: $d^*(E)=\sup\{\deg(F), F \text{ sous-fibré de } E\}$, les degrés des sous-fibrés de E étant bornés, cette définition a un sens. Le théorème 2.5 devient: $d^*(E)>0$ implique $\lambda(E)=r$.

Dans le même ordre d'idée, il n'est pas difficile de voir que si $E = F \oplus \mathcal{O}_X$, alors $\lambda(E) = \lambda(F) + 1$; en fait la fonction $h^0(S^m(E))$ est l'intégrale de 0 à m de $h^0 S^m(F)$.

3. Relation avec l'amplitude

Nous avons fait allusion au début de la démonstration du théorème 2.4 à la filtration de Harder et Narasimhan. De manière précise, si E est un fibré de rang$r$, non semi-stable, il existe une filtration $0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_t = E$, où $E_{i-1} \neq E_i$ et qui vérifie

(i) pour tout i, $1 \leqq i \leqq t$, E_i/E_{i-1} est semi-stable.

(ii) $\mu(E_1) > \mu(E_2/E_1) > \ldots > \mu(E_t/E_{t-1})$.

Cette filtration, jointe aux résultats de Hartshorne-Gieseker (2.3) est l'ingrédient essentiel du résultat suivant qui précise le comportement de l'invariant λ pour E non semi-stable de degré négatif ou nul.

Théorème 3.1. *Soit E un fibré vectoriel de* rang$r$ *sur X et de degré inférieur ou égal à zéro, dont tous les sous-fibrés sont de degré inférieur ou égal à* $0 (d^* \leqq 0)$.

(i) *Si E_1 est le premier terme de la filtration de Harder-Narasimhan de E,* $\lambda(E) = \lambda(E_1)$.

(ii) *Si E est semi-stable, on a* $\lambda(E) \leqq r-1$ *si* $\deg(E) = 0$ *et* $\lambda(E) = -\infty$ *si* $\deg(E) < 0$.

Preuve. Prouvons d'abord (ii). E étant semi-stable, le fibré $S^m(E)$ est semi-stable pour $m > 0$ et $\deg S^m(E) = \frac{m}{r}\binom{m+r-1}{r-1}\deg(E)$. Si $\deg(E) = 0$ alors $\deg S^m(E) = 0$, ainsi par (2.1) $h^0 S^m(E) \leqq \operatorname{rang} S^m(E) = \binom{m+r-1}{r-1} \sim m^{r-1}$. D'uù $\lambda(E) \leqq r-1$. Si $\deg(E) < 0$, alors $\deg S^m(E) < 0$ d'où $h^0 S^m(E) = 0$.

(i) Remarquons que d'après l'hypothèse du théorème $\mu(E_1) \leqq 0$ et pour tout $i \geqq 2$, $\mu(E_i/E_{i-1}) < 0$. Par suite pour $i \geqq 2$, $(E_i/E_{i-1})^\vee$ est semi-stable de degré strictement positif, donc ample (Théorème 2.3). Si on pose $G = E/E_1$, le fibré dual $G^\vee$ est extension successives de fibrés amples, donc est ample.

Posons $F = E_1$, on a une extension $0 \to F \to E \to G \to 0$ avec $G^\vee$ ample et F semi stable de degré négatif ou nul. En considérant la filtration canonique de $S^m(E)$, on en déduit

$$h^0(S^m(E)) \leqq \sum_{p=0}^{m} h^0(S^p(F) \otimes S^{m-p}(G)).$$

Si pour $p \neq m$, $h^0(S^p(F) \otimes S^{m-p}(G)) \neq 0$, on en déduit l'existence d'un morphisme non trivial $S^{m-p}(G^\vee) \to S^p(F)$. L'image de ce morphisme est un fibré quotient du fibré ample $S^{m-p}(G^\vee)$, donc ample [6], ceci est en contradiction avec le fait que $S^p(F)$ est semi-stable de degré négatif ou nul. L'inégalité précédente se réduit à $h^0 S^m(E) \leqq h^0 S^m(F)$ d'où en fait l'égalité et par suite $\lambda(E) = \lambda(F)$.

Comme corollaire on obtient la réciproque du théorème 2.4.

Corollaire 3.2. *Soit E un fibré vectoriel de* rang$r$ *sur une courbe X,*

(i) $\lambda(E) = r$ *(maximum) si et seulement si E contient un sous-fibré de degré positif.*

(ii) *Si E est semi-stable, $\lambda(E) = r$ implique E ample.*

Preuve. (i) Il s'agit de voir que si $\lambda(E)=r$, E contient un sous-fibré de degré positif. On peut supposer $\deg(E)\leqq 0$. Si l'on est dans les conditions du théorème 3.1, on a $\lambda(E)<r$, par suite il est nécessaire que $d^*(E)$ soit positif strictement.

(ii) Si E est semi-stable et $\lambda(E)=r$, certainement $\deg(E)>0$, on conclut par (2.3).

En résumé on a le tableau

a) $d^*>0$ implique $\lambda=r$ (maximum),

b) $d^*=0$ implique $\lambda\leqq r-1$,

c) $d^*<0$ implique $\lambda=-\infty$.

Le dernier point parce que $\lambda(E)=\lambda(E_1)$, E_1 semi-stable de degré négatif.

On peut demander si la borne en b) est atteinte, quelles sont les valeurs de λ obtenues si E est (semi)stable. C'est essentiellement une question de théorie des invariants (du moins si $k=\mathbb{C}$), nous la réservons au dernier paragraphe.

On pourra comparer le (ii) du corollaire 3.2 avec le résultat de Hartshorne-Gieseker cité en (ii) du théorème 2.3. On notera qu'il n'est pas difficile de produire des fibrés non amples avec λ maximum. Reprenons un exemple d'Hartshorne: si $g\geqq 2$ est extension non triviale de $\mathcal{O}_X$ par le faisceau canonique K. Alors E est indécomposable de degré $2g-2$, donc $\lambda=2$ et E n'est pas ample, car il admet $\mathcal{O}_X$ comme quotient.

4. Fibrés de rang deux

Dans ce paragraphe, nous allons examiner plus en détail le cas b) du tableau précédent, si E est de rang deux. Supposons E donné par une extension $0\to L\to E\to M\to 0$ où L et M sont de rang un, et soit $\{E_p\}$ la filtration canonique de $S^m(E)$ décrite en 1.3. La proposition suivante est peut-être connue; n'ayant pas de référence à proposer, nous en donnons une démonstration directe (sans suite spectrale).

Proposition 4.1. *Supposons l'extension* $0\to L\to E\to M\to 0$ *non triviale, alors pour tout* $p=0,\dots,m$, *l'extension* $0\to E_{p+1}\to E_p\to L^p\otimes M^{m-p}\to 0$ *est non triviale.*

Preuve. Comme $S^m(E\otimes L)\cong S^m(E)\otimes L^m$ si L est de rang un, on peut supposer $M=\mathcal{O}_X$ quitte à tensoriser l'extension étudiée. Alors $E_p=S^{m-p}(E)\otimes L^p$ et l'extension $0\to E_{p+1}\to E_p\to L^p\to 0$ est au facteur L^p près, l'extension

$$0\to S^{q-1}(E)\otimes L\to S^q(E)\to\mathcal{O}_X\to 0$$

avec $q=m-p$; c'est-à-dire il suffit de considérer le cas $p=0$.

Choisissons un recouvrement $\{U_i\}$ de X tel que sur U_i, on ait $L_{|U_i}=\mathcal{O}_{U_i}e_i$ et $E_{|U_i}=\mathcal{O}_{U_i}e_i\oplus\mathcal{O}_{U_i}f_i$ avec sur $U_i\cap U_j$ les relations

$$e_i=s_{ji}e_j$$

et

$$f_i=f_j+b_{ji}e_j,\qquad s_{ji}\in\Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}_X^*),\qquad b_{ji}\in\Gamma(U_i\cap U_j,\mathcal{O}_X).$$

Alors l'extension de départ est triviale s'il existe des sections $a_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{O}_X)$ avec sur $U_i\cap U_j$, $a_j=a_is_{ji}+b_{ji}$.

Le fibré $S^m(E)$ a pour base locale sur U_i les sections $\omega_i^\alpha := e_i^\alpha f_i^\beta$ où $\alpha = 0, \ldots, m$ et $\beta = m - \alpha$. Alors le sous-fibré $E_1 = S^{m-1}(E) \otimes L$ est engendré localement sur U_i par les sections ω_i^α avec $\alpha > 1$. Notons les relations de transition

$$\omega_i^\alpha = \sum_{j=0}^{m-\alpha} \binom{m-\alpha}{\gamma} s_{ji}^\alpha b_{ji}^\gamma \omega_j^{\alpha+\gamma}.$$

Si l'extension $0 \to E_1 \to S^m(E) \to \mathcal{O}_X \to 0$ est triviale, il existe des sections $\delta_i \in \Gamma(U_i, E)$ avec $\delta_i \equiv \omega_i^0 (\operatorname{mod} E_1)$ et $\delta_i = \delta_j$ sur $U_i \cap U_j$.

Ecrivons $\delta_i = \sum_{\alpha=0}^{m} c_i^\alpha \omega_i^\alpha$ avec $c_i^\alpha \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ et $c_i^0 = 1$. Si on développe δ_i sur la base $\{\omega_j^\alpha\}$ en utilisant les formules de transition ci-dessus, l'égalité $\delta_i = \delta_j$ sur $U_i \cap U_j$ donne par comparaison des coefficients de ω_j^1

$$m b_{ji} + c_i^1 s_{ji} = c_j^1$$

si on pose $a_i = \frac{1}{m} c_i^1$ (k est de caractéristique zéro!), on obtient sur $U_i \cap U_j$, $a_j = b_{ji} + a_i s_{ji}$, c'est-à-dire $1 \in \Gamma(\mathcal{O}_X)$ se relève dans $\Gamma(E)$, contradiction.

Proposition 4.2. *Soit* $0 \to L \to E \to M \to 0$ *une extension non triviale avec* $\deg(L) = \deg(M) = 0$. *Si* L *est d'ordre fini dans* $\operatorname{Pic}(X)$, $\lambda(E) = 0$, *sinon* $\lambda(E) = -\infty$.

Preuve. Avec les notations précédentes, on a pour $p = 0, \ldots, m-1$ une suite exacte de cohomologie $0 \to H^0(E_{p+1}) \to H^0(E_p) \to H^0(L^p \otimes M^{m-p}) \to \ldots$. Comme $L^p \otimes M^{m-p}$ est de degré zéro, on a $H^0(L^p \otimes M^{m-p}) = 0$ si $L^p \otimes M^{m-p} \not\cong \mathcal{O}_X$. Sinon si $L^p \otimes M^{m-p} \cong \mathcal{O}_X$, de la proposition 4.1 on tire $H^0(E_{p+1}) \simeq H^0(E_p)$. Par suite, on obtient $H^0(S^m(E)) = H^0(E_1) = \ldots = H^0(E_m)$, mais $E_m = L^m$ d'où $H^0(S^m(E)) = H^0(L^m)$. Si $H^0(L^m) \neq 0$ pour un $m > 0$, alors $L^m \cong \mathcal{O}_X$ et $h^0(L^m) = 1$, d'où le résultat.

A ce stade, nous avons de bonnes informations sur l'invariant λ, mais il reste à savoir pour quels types de fibrés on a $\lambda = 1$. Le cas décomposable est facile à traiter. Supposons $E = L \oplus M$ et $\deg(M) \leqq \deg(L)$, alors $\lambda = 2$ si et seulement si $\deg(L) > 0$. Si $\deg(L) = 0$ et $\deg(M) < 0$, $\lambda = 0$ si L est d'ordre fini dans $\operatorname{Pic}(X)$ sinon $\lambda = -\infty$; si $\deg(L) < 0$, $\lambda = -\infty$. Supposons $\deg(L) = \deg(M) = 0$, alors $\lambda = 0$ si et seulement si L et M sont d'ordre fini dans $\operatorname{Pic}(X)$, tandis que s'il n'existe pas de relation non triviale entre L et M, $\lambda = -\infty$.

Résumons la discussion qui précède par un tableau qui illustre le cas E indécomposable pour $g = 1$. Notons pour $p \geqq 1$, F_p le fibré extension non triviale de F_{p-1} par $\mathcal{O}_X$ si $p \geqq 2$ et $F_1 = \mathcal{O}_X$. Atiyah [1] a montré que $S^m(F_2) = F_{m+1}$ et que $h^0(F_m) = 1$; en particulier $\lambda(F_2) = 0$.

λ	
$-\infty$	$\deg(E) < 0$ ou $E \cong F_2 \otimes L$ avec L pas d'ordre fini dans $\operatorname{Pic}^0(X)$.
0	$E \cong F_2 \otimes L$ avec L d'ordre fini dans $\operatorname{Pic}^0(X)$
1	jamais.
2	$\deg(E) > 0 \Leftrightarrow E$ ample.

On notera qu'il n'existe pas de fibré indécomposable avec $\lambda = 1$, contrairement au cas $g \geqq 2$, ou nous allons construire pour tout $g \geqq 2$ et tout $r \geqq 2$, un fibré stable de rang r, de degré zéro avec $\lambda = r - 1$.

5. Invariants symétriques

Dans ce paragraphe, nous supposons $k=\mathbb{C}$.

Nous avons vu qu'un fibré stable de rang r et de degré zéro. a un λ-invariant majoré par $r-1$. Le problème maintenant est de voir si cette borne est effectivement atteinte. Par une procédure bien connue. on peut construire des fibrés vectoriels sur une surface de Riemann $X=Y/\Pi$. où Y est le disque unité et Π un groupe proprement discontinu d'automorphismes analytiques de Y. via des représentations de Π. Soit $\varrho:\Pi\to \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$ une représentation de Π: il y a une structure évidente de Π-fibré sur le fibré trivial $Y\times\mathbb{C}^r$, que nous noterons alors $E_\Pi(\varrho)$. On associe à $E_\Pi(\varrho)$ le fibré sur X dont les sections sur un ouvert U. sont les sections Π-invariantes de $E_\Pi(\varrho)$ au-dessus de $p^{-1}(U)$, p étant la projection $Y\to X$. Le fibré ainsi fabriqué sera noté E_ϱ, et appelé le fibré sur X associé à la représentation ϱ. Dans la suite nous supposerons que le morphisme p est ramifié au plus en un point $x_0\in X$ et que le stabilisateur d'un quelconque point de Y au-dessus de x_0 est d'ordre N.

Si X est une surface de Riemann compacte de genre $g\geqq 2$, et $x_0\in X$, $N\geqq 1$, il existe un revêtement simplement connexe $p:Y\to X$, ramifié en x_0 seulement, avec l'ordre N. Fixons $y_0\in p^{-1}(x_0)$, et soit τ un caractère de $\Pi_{y_0}\cong Z/NZ$; une représentation ϱ est de type τ si pour $\alpha\in\Pi_{y_0}$, $\varrho(\alpha)=\tau(\alpha)\cdot I$.

Narasimhan et Seshadri ont montré que tout fibré indécomposable de rang N et degré q avec $-N<q\leqq 0$, est de la forme E_ϱ pour une représentation ϱ de la forme précédente. De plus le fibré E_ϱ est stable si et seulement si la représentation ϱ est irréductible et unitaire. Deux tels fibrés stables sont isomorphes si et seulement si les représentations correspondantes sont équivalentes. Nous utiliserons essentiellement le cas particulier suivant [9]:

Théorème 5.1. *Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g\geqq 2$. Un fibré vectoriel de degré zéro sur X est stable si et seulement si il provient d'une représentation unitaire et irréductible du groupe fondamental $\pi_1(X)$ de X.*

Le théorème permet de relier le problème du comportement asymptotique de $h^0(S^m(E))$ avec la théorie des invariants symétriques. En effet avec les notations précédentes, $V^\Pi\cong H^0(X,E_\varrho)$.

Maintenant soit $\varrho:G\to\mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire complexe de dimension finie d'un groupe G, et soit R l'algèbre graduée des invariants symétriques de V:

$$R=\bigoplus_{m\geqq 0} S^m(V)^G.$$

On peut s'intéresser au comportement asymptotique de la fonction $m\mapsto\dim_{\mathbb{C}}(S^m(V)^G)$. Dans le cas où l'algèbre R est de type fini. il est classique que pour un m_0 convenable, la fonction $\dim(S^{mm_0}(V)^G)$ est polynomiale en m pour $m\gg 0$, pour un polynôme de degré égal à dim Krull$(R)-1$.

Un théorème classique de Hilbert, E. Noether et Weyl établit que c'est bien le cas si G est fini ou un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$. Si G est fini. l'anneau R^G a pour dimension de Krull $\dim V$.

Rappelons que le groupe fondamental $\pi_1(X)$ d'une surface de Riemann compacte de genre $g\geqq 2$ est le groupe défini par $2g$ générateurs $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$ et par l'unique relation $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdot\ldots\cdot a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}=1$.

Théorème 5.2. *Soit X une courbe de genre $g \geqq 2$ définie sur $\mathbb{C}$.*

(i) *Il existe un fibré stable de* rang $r \geqq 2$ *de degré zéro avec $\lambda = r-1$.*

(ii) *Il existe un fibré stable de* rang $r \geqq 2$ *de degré zéro avec $\lambda = -\infty$.*

Preuve. Pour définir une représentation unitaire de $\Pi_1(X)$, il suffit de prendre des matrices unitaires $A_1, \ldots, A_g$ et de définir un homomorphisme $\varrho: \Pi_1(X) \to U(n)$ par $\varrho(a_i) = A_i$ et $\varrho(b_i) = I$, $i = 1 \ldots g$. On peut même supposer $A_3 = \ldots = A_g = I$. Par suite, il suffit de trouver des sous-groupes G de $U(n)$ ayant un système de générateurs formé de deux éléments et agissant de manière irréductible sur $\mathbb{C}^n$.

(i) Considérons la représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_{r+1}$ dans l'hyperplan de $\mathbb{C}^{r+1}$ d'équation $\sum_{i=1}^{r+1} z_i = 0$. Il est clair que cette représentation est irréductible et comme toute représentation d'un groupe fini, équivalente à une représentation unitaire. Le groupe $\mathfrak{S}_{r+1}$ étant engendré par deux éléments, la conclusion vient alors du théorème fondamental de la théorie des invariants rappelé ci-dessus. Ici pour le fibré vectoriel de rang r associé, $\lambda = r-1$.

(ii) Considérons les matrices unitaires A_1 et A_2 définies par:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 & & \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & \omega_r \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A_2 est la matrice de la permutation circulaire des vecteurs de la base canonique. Les scalaires ω_α sont: $\omega_\alpha = \exp(2i\pi\theta_\alpha)$, avec $\theta_\alpha \in R/\mathbb{Z}$ et $\theta_1, \ldots, \theta_r$ linéairement indépendants dans $R/\mathbb{Z}$. Il est clair que le sous-groupe G de $U(r)$ engendré par A_1 et A_2 agit de manière irréductible sur $\mathbb{C}^r$. Un invariant de A_1 dans $\mathrm{Sym}^m(\mathbb{C}^r)$, i.e. un vecteur propre de valeur propre un, est combinaison linéaire des «monômes» $e_1^{\alpha_1} \ldots e_r^{\alpha_r}$ avec $\omega_1^{\alpha_1} \ldots \omega_r^{\alpha_r} = 1$, soit $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \theta_j = 0$ dans $R/\mathbb{Z}$. Vu notre hypothèse sur les θ_j, on conclut de suite que $\mathrm{Sym}^m(\mathbb{C}^r)^G = 0$ pour $m \geqq 1$, et par suite pour le fibré associé, $\lambda = -\infty$.

Il semble a peu près clair que pour tout $\lambda \in \{-\infty, 0, \ldots, r-1\}$, il existe un fibré semi-stable de degré zéro et $\lambda(E) = \lambda$, la question est beaucoup moins évidente si on impose à E d'être stable. Nous donnons ci-dessous deux tables qui indiquent le rang et l'invariant λ du fibré associé à la représentation adjointe d'un groupe de Lie compact simple pour la première, et a une des représentations irréductible notées $R_1, R_2, \ldots, (\dim R_d = d+1)$, du groupe compact SU(2) pour la deuxième. Par complexification on tombe sur un groupe algèbrique complexe simple, resp. SL(2).

Dans le cas d'un groupe algèbrique simple, on utilise le théorème de restriction de Chevalley: $k[g]^G \simeq k[h]^W$, g étant l'algèbre de Lie de G, h l'algèbre de Lie d'un tore maximal et W le groupe de Weyl correspondant, et alors les tables de Bourbaki [2]. Pour SL(2), on utilise les renseignements (classiques) sur l'algèbre des invariants de $\mathrm{Sym}(R_d)$ données dans Springer [12].

Proposition 5.3. *Soit X une courbe de genre $g \geqq 2$,*

(i) *Il existe un fibré stable E (de degré zéro), de* rang 2 *avec $\lambda(E) = 0$.*

(ii) *Il n'existe pas de fibré stable E de* rang 3 *avec $\lambda(E) = 1$.*

Table 1

	Type	rang (E)	λ
$(l>2)$	A_l	$l(l+2)$	$l-1$
$(l>2)$	B_l	$l(2l+1)$	$l-1$
	C_l	$l(2l+1)$	$l-1$
	D_l	$l(2l-1)$	$l-1$
	E_6	78	6
	E_7	133	7
	E_8	248	8

Table 2

d	rang (E)	λ
1	2	$-\infty$
2	3	0
3	4	0
4	5	1
>5	$d+1$	$d-3$

Preuve. Notons d'abord que (i) montre que toute valeur possible de λ est effectivement obtenue par un fibré stable de rang2.

(i) Soit α un complexe de module un qui n'est pas une racine de l'unité, et soit G le sous-groupe de $SU(2)$ engendré par les deux matrices unitaires

$$A_1=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha^{-1}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Il est clair que G agit de manière irréductible dans $\mathbb{C}^2$. Si on identifie $\mathrm{Sym}(\mathbb{C}^2)$ avec l'anneau $\mathbb{C}[x,y]$, il est clair que le sous-anneau des polynômes invariants par G est $\mathbb{C}[(xy)^2]$. Ainsi pour le fibré associée à la représentation définie par A_1 et A_2, on a $\lambda=0$.

(ii) Il suffit de montrer que si G est un sous-groupe connexe ou non de $U(3)$ qui agit de manière irréductible sur $V=\mathbb{C}^3$, alors $\dim \mathrm{Sym}(V)^G \neq 2$. On peut prendre l'adhérence de Zariski de G dans $GL(3)$, l'algèbre des invariants n'est pas modifiée, donc se ramener à G sous-groupe réductif de $GL(3)$. Soit G_0 la composante connexe de l'élément neutre de G; il y a deux cas selon que G_0 est un tore ou non.

(a) G_0 n'est pas un tore

Comme G_0 est réductif, il existe un morphisme de noyau fini $SL(2)\to G_0$ (considérer une coracine). Par suite, on obtient une action de $SL(2)$ sur V et $\mathrm{Sym}(V)^G\subset \mathrm{Sym}(V)^{SL(2)}$. Tout caractère de $SL(2)$ étant trivial, la représentation V est soit irréductible, soit se décompose en deux représentations irréductibles, l'une étant de dimension deux; soit $V=V_1\oplus V_2$, $\dim V_i=i$. Soit (x_0,x_1,x_2) une base de V avec $x_0\in V_1$, x_1 et $x_2\in V_2$. On a $\mathrm{Sym}(V_2)^{SL(2)}=\mathbb{C}$, d'où $\mathrm{Sym}(V)^{SL(2)}=\mathbb{C}[x_0]$. On ne peut donc avoir $\dim \mathrm{Sym}(V)^G = 2$. Si V est une représentation irréductible de SL_2, on a en consultant la table 2 ci-dessus, $V \cong R_2$ et $\dim \mathrm{Sym}(V)^{SL_2} = 1$.

(b) G_0 est un tore

b.1 $\dim G_0 = 1$. La représentation V de G_0 se décompose en sous-espaces propres: $V = \bigoplus_i V_i$ et G_0 agit sur V_i par l'intermédiaire d'un caractère χ_i avec $\chi_i \neq \chi_j$ si $i \neq j$.

Si $V = V_1$, supposons que $\xi \in \mathrm{Sym}^t(V)^G$ et $\xi \neq 0$. Pour tout $g \in G_0$, $g\xi = \chi(g)^t \xi$ d'où $\chi(g)^t = 1$ et χ serait trivial, ce qui est absurde. Supposons maintenant $V = V_1 \oplus V_2$, avec $\dim V_i = i$. Si $s \in G$, s normalise G_0, d'où s permute les sous-espaces propres V_i, et pour une raison de dimension, $sV_i = V_i$. Ainsi V ne serait pas un G-module irréductible. Finalement supposons $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ où $\dim V_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. On choisit une base e_i de V_i, alors un élément de G_0 est représenté par une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} t^{a_1} & & \\ & t^{a_2} & \\ & & t^{a_3} \end{pmatrix}$$

avec $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ et $t \in \mathbb{C}$. Si s normalise G_0, on voit immédiatement qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, 3\}$ telle que $se_1 = \lambda_i e_{\sigma(i)}$. Alors la matrice de permutation associée à σ que l'on note encore σ normalise G_0. La conjugaison par σ induit un automorphisme du tore $G_0 \cong \mathbb{C}^*$, donc de la forme $t \to t^{\pm 1}$, et en fait $t \to t^{-1}$ si $\sigma \neq 1$. Supposons $j = \sigma(i) \neq i$; on a pour tout $t \in G_0$, $\sigma t \sigma^{-1}(e_j) = t^{a_i} e_j = t^{-a_j} e_j$, d'où $a_i + a_j = 0$. Comme les a_i sont distincts, on voit que σ ne peut être qu'une transposition. Ainsi si T désigne le sous-groupe de $SL(3)$ formé des matrices diagonales, on a $N(G_0) = T$ ou un produit semi-direct $T \times Z_2$. Ce dernier cas arrive si par exemple $a_1 + a_2 = 0$, alors le sous-espace V_3 est G-stable.

Dans les deux cas on a une contradiction.

b.2 $\dim G_0 = 2$. C'est-à-dire $G_0 = T$, dans ce cas $\mathrm{Sym}(V)^T$ est un anneau de polynômes en une indéterminée, d'où on ne peut avoir $\dim \mathrm{Sym}(V)^G = 2$.

5.4. On peut noter que la complexification du groupe G qui apparaît dans la proposition 5.3, (ii) est le normalisateur $N(T)$ du tore maximal standard T de $SL(2)$; il n'est pas semi-simple. De manière plus précise, M. Brion nous a signalé le résultat suivant: pour tout entier $n \geqq 2$ et pour tout entier $d \leqq n-2$, il existe un espace vectoriel V de dimension n et un sous-groupe semi simple G de $GL(V)$ tels que $\dim \mathrm{Sym}(V)^G = d$, le cas $d = n-1$ étant exclu. Le groupe G n'est pas en général simple et V non nécessairement un G-module irréductible. En fait ceci confirme le fait que pour toute valeur de $\lambda (\lambda \leqq r)$, il existe un fibré semi-stable d'invariant λ. Quant aux valeurs de λ prises par les fibrés stables, ce qui reviendrait à supposer la représentation V irréductible, nous n'en savons rien.

Pour conclure, nous allons préciser l'assertion (ii) du théorème 5.2. Notons pour $r \geqq 2$, $M(r)$ la variété des modules des fibrés stables de rang r et de degré zéro sur X.

Proposition 5.4. *Il existe un sous-ensemble Y de $M(r)$, qui est réunion dénombrable de sous-variétés propres, tel que si E_α est un fibré qui correspond a un point α n'appartenant pas à Y, alors $\lambda(E_\alpha) = -\infty$. En particulier l'ensemble des points α avec $\lambda(E_\alpha) = -\infty$ est partout dense.*

Preuve. D'après [10, p. 141] et les suivantes, on peut mettre les fibres stables de rang r fixé et de degré zéro dans une famille algébrique. De manière précise, il existe une variété irréductible et lisse R et un fibré E de rang r sur $X \times R$, tel que pour tout $\alpha \in R$, le fibré $E_\alpha = E/X \times \{\alpha\}$ soit stable de degré zéro et tout fibré stable de rang r et de degré zéro est représenté dans cette famille. De plus, il existe une action d'un groupe $\mathrm{PGL}(N)$ sur R telle que E_α est isomorphe à E_β si et seulement si α et β sont dans une même orbite. $M(r)$ est le quotient de R par $\mathrm{PGL}(N)$. Par semi-continuité supérieure de la cohomologie, l'ensemble Z_m des points α de R avec $h^0(S^m(E_\alpha)) > 0$ est un fermé propre de R (cf. 5.2) et $\mathrm{PGL}(N)$-invariant. Par suite il correspond à un fermé propre Y_m du quotient $M(r)$. Alors on prend $Y = \bigcup_{m \geqq 1} Y_m$. Que le complémentaire de Y soit partout dense résulte du théorème de Baire.

Remerciement. Nous remercions M. Brion pour des indications intéressantes sur la théorie des invariants.

Bibliographie

1. Atiyah, M.F.: Vector bundles on an elliptic curve. Proc. Lond. Math. Soc. **27**, 414–452 (1957)
2. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie. Chaps. 4–6
3. Gieseker, D.: *p* ample bundles and their chern classes. Nagoya. Math. J. **43**, 91–116 (1971)
4. Gieseker, D.: On a theorem of Bogomolov on chern classes of stable bundles. Am. J. Math. **101**, 77–85 (1979)
5. Green, M., Griffiths, P.: Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In: Chern Symposium 1979, pp. 41–79. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1980
6. Hartshorne, R.: Ample vector bundles. Publ. Math. IHES **29** (1966)
7. Hartshorne, R.: Ample vector bundles on curves. Nagoya Math. J. **43**, 73–89 (1971)
8. Itaka, S.: On *D*-dimension of algebraic varieties. J. Math. Soc. Jpn. **23**, 356–373 (1971)
9. Narasimhan, M.S., Seshadri, C.S.: Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. Math. **82**, 540–567 (1965)
10. Newstead, P.: Introduction to moduli problems and orbit spaces. Tata institute, Bombay (1978)
11. Sakai, F.: Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties. In: Algebraic geometry Lecture Notes in Mathematics, Vol. 732. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978
12. Springer, T.A.: Invariant theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 585. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1977

Reçu le 18 octobre 1982