Jordan, une simple affaire de matrices

PAR PATRICK TELLER

Il y a une telle quantité de démonstrations de la forme de Jordan pour une matrice nilpotente (d'ou découle immédiatement le cas général d'une matrice à polynome minimal scindé); cette note, inspirée par [1], propose une démonstration purement matricielle (comme [1]), considérablement allégée et plus facile d'accès, compréhensible par un étudiant de première année.

1 La matrice J_n, ses puissances et son action à gauche

Définition 1. *La matrice J_n*

Soit n un entier naturel on désigne par J_n la matrice nilpotente d'ordre n $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & . \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 2. *L'action de J_n à gauche*

Soit $M=\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ L_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ J_n M=\begin{pmatrix} 0 \\ L_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ L_{n-1} \end{pmatrix}$ *et* $\forall k \in [\![1, \ldots., n-1]\!], J_n^k M=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ \ldots \\ L_{n-k} \end{pmatrix}$

2 Les puissances d'une matrice triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$

Proposition 3.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & B_k \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$*, ou* $B_k = A^{k-1}B + A^{k-2}\mathrm{BC} + \ldots. + \mathrm{BC}^{k-1}$

Corollaire 4.

Si, de plus, $\begin{pmatrix} J_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^n = 0$ *alors* $J_n^{n-1}B + J_n{}^{n-2}\mathrm{BC} + \ldots. + \mathrm{BC}^{n-1} = 0.$

Corollaire 5.

Si on pose $B=\begin{pmatrix} B_1 \\ \ldots\ldots \\ B_n \end{pmatrix}$ *la dernière relation se lit* $B_1 + B_2 C + \ldots. + B_n C^{n-1} = 0$ *(*)*

3 Premier changement de base

Soit une matrice nilpotente $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ d'ordre de nilpotence n; il existe un vecteur x tel que $\mathrm{M}^{n-1}x \neq 0$ d'où la famille (x,Mx,..,n$\mathrm{M}^{-1}x$) est libre, on la complète en une base d'où l'existence d'une matrice inversible $\mathrm{Q} \in \mathcal{GL}_m(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}\mathrm{MQ} = \begin{pmatrix} J_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On établit facilement que C est ausssi nilpotente et d'ordre de nilpotence inférieur ou égal à n (proposition 3).

4 Recherche d'un second changement de base

Changer de supplémentaire de Vect(x,Mx,..,n$\mathrm{M}^{-1}x$) revient à rechercher une nouvelle matrice de changement de base sous la forme $\begin{pmatrix} I_n & T \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}$, nous le ferons avec l'objectif d'obtenir une matrice diagonale par blocs: $\begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Pour cela il est nécessaire et suffisant que -TC=-JT+B, c'est à dire JT=B+TC(**); raisonnons ligne par ligne en posant B=$\begin{pmatrix} B_1 \\ \dots\dots \\ B_n \end{pmatrix}$,T=$\begin{pmatrix} T_1 \\ \dots \\ T_n \end{pmatrix}$.

(**)$\Longleftrightarrow\begin{cases} 0=B_1+T_1C \\ T_1=B_2+T_2C \\ \dots. \\ T_k=B_{k+1}+T_{k+1}C \\ \dots. \\ T_{n-1}=B_n+T_nC \end{cases}$; le théorème de Frobenius-Ceccioni (qui nous ne pouvons utiliser car il nécessite la forme de Jordan ou la forme canonique) nous apprend que s'il existe des solutions celles-ci ne sont pas uniques, ce qui nous permet de supposer T$_n$=0.

Alors $\begin{cases} (**) \\ T_n=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0=B_1+B_2C+\dots.+B_nC^{n-1} \\ T_1=B_2+\dots.+B_nC^{n-2} \\ \dots. \\ T_k=B_{k+1}+B_{k+2}C+\dots+B_nC^{n-k-1} \\ \dots. \\ T_{n-2}=B_{n-1}+B_nC \\ T_{n-1}=B_n \\ T_n=0 \end{cases}$.

Or $B_1+B_2C+\dots.+B_nC^{n-1}$ est nul d'après (*).

d'ou

Proposition 6.

Il existe une matrice T telle que $\begin{pmatrix} I_n & -T \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & T \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

d'où découle, par une récurrence immédiate, le théorème

Théorème 7. *(Jordan)*

Soit une matrice nilpotente $M\in\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ d'ordre de nilpotence n, il existe une unique suite décroissante $n_1=n\geqslant n_2\geqslant\dots.\geqslant n_r$ telle que M est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & J_{n_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & J_{n_r} \end{pmatrix}$

(l'unicité découle, comme le remarque [1], du fait que si $\begin{pmatrix} J_n & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} J_n & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$ les ordres de nilpotence de C et C' sont nécessairement égaux).

L'idée de base est de [1], les nombreuses simplifications sont originales.

Janvier 2018

[1] Robert E. Hartwig, *Roth's Removal Rule and the Rational Canonical Form*, American Mathematical Monthly, Avril 1996