LAP

Résumé

La forme échelonnée, réduite d'une matrice carrée A$\in\mathcal{M}_n(K)$ fournit immédiatement et à un « coût » très faible le Théorème du Rang; elle permet aussi d'établir que toute matrice carrée est équivalente à un projecteur.

Patrick Teller début Juin 2021

Avertissement 1.

Dans tout ce qui suit on parlera de noyau et d'image d'une matrice, ce qui ne causera aucune ambiguité.

On parlera de forme échelonnée pour désigner une forme obtenue par opérations élémentaires sur les lignes.

Définition 2. *Matrice échelonnée, réduite, à diagonale directrice*

Une matrice carrée sera dite ERDD lorsqu'elle est échelonnée, réduite et lorsque les pivots sont tous sur la diagonale principale

Théorème 3. *Théorème du rang (immédiat avec la forme échelonnée réduite)*

Démonstration.

Soit A$\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée et réduite, le rang de A est égal au nombre de lignes possédant des pivots, la dimension du noyau de A est égale au nombre de variables directrices, c'est à dire au nombre de colonnes sans pivots. □

Proposition 4.

Une matrice triangulaire supérieure A est un projecteur si et seulement si elle est ERDD.

Démonstration.

Soit A=$(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ERDD; soit N=$\{i_1,i_2,\ldots,i_q\}$ les numéros des colonnes contenant un 1 sur la diagonale et N' son complémentaire, les numéros des colonnes contenant un 0 sur la diagonale.

Suivant la définition de matrice échelonnée, réduite

$\forall\ j\in N,\ \forall i\neq j,\ a_{i,j}=0$

$\forall\ j\in N,\ \forall k<j,\ a_{j,k}=0$

$\forall\ j\notin N,\ \forall k,\ a_{j,k}=0$

Les valeurs propres sont donc incluses dans {0,1}; la multiplicité algébrique de 1 est q, celle de 0 est n-q; comme $\forall\ j\in N,\ \forall i\neq j,\ a_{i,j}=0$ chacun des vecteurs e_j où $j\in N$ est vecteur propre donc la multiplicité géométrique de 1 est aussi q.

La multiplicité géométrique de 0 est égale à la dimension de Ker(A), celle-ci est égale à n-rang(A)=n-rang(^tA)=dim(Ker(^tA)), et comme $\forall\ j\notin N,\ \forall k,\ a_{j,k}=0$ chacun des vecteurs e_j où $j\in N'$ est vecteur propre pour ^tA d'où la dimension de Ker(^tA) est supérieure ou égale à n-q, et comme la multiplicité géométrique est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique, donc elle est égale à n-q.

En résumé A est diagonalisable et spec(A)={0,1}, donc A est un projecteur.

Réciproquement si A est triangulaire supérieure et un projecteur:

Sa diagonale est constituée de 1 et de 0; elle est diagonalisable donc les multiplicités algébrique et géomtrique de 1 sont égales, d'où les colonnes contenant un 1 sur la diagonale ont tous les autres termes nuls.

De même ${}^tA$ est diagonalisable d'où les lignes de A qui contiennent un 0 ont tous les autres termes nuls.

D'où A est ERDD. □

Théorème 5. *$LA{=}P$*

Soit $A{\in}\mathcal{M}_n(K)$, il existe une matrice inversible L telle que LA est un projecteur.

Démonstration.

Soit $A{\in}\mathcal{M}_n(K)$ une suite d'opérations élémentaires sur les lignes la transforme en matrice échelonnée réduite, une permutation de lignes la transforme en matrice ERDD.

D'où une matrice inversible L et une matrice de projection P telles que $LA{=}P$.

Si on se limite à la forme échelonnée, réduite, A est équivalente à un projecteur. □

(inspiré par « Subspaces and Echelon Form », David C. Lay, The College Mathematics Journal, vol 24, nө1, january 1993)