La vie des Matrices fractales

PAR PATRICK TELLER

25 septembre 2022

On supposera connues les définitions générales concernant les Matrices de Weyr et les Matrices fractales. [1]

Soit $0<n_2\leqslant n_1$ deux entiers naturels, $F(n_1,n_2)$ l'Algèbre fractale associée, W la matrice de Weyr nilpotente associée et une matrice fractale A.

Le phénomène suivant a pu être remarqué:

S'il existe un couple d'indices (i_1, j_1) avec $0<i_1<j_1\leqslant n_2$ tel que pour tout $k\in\{0,\ldots, n_1-1\}$ $(A^k)_{(i_1,j_1)}=0$, alors $\chi(A)_{(i_1,j_1+n_1)}=0$, où χ désigne le polynôme caractéritique du bloc $A_{1,1}$.

Sur le plan visuel on considère une case (i_1+n_1, j_1+n_1) du bloc $A_{2,2}$, on suppose qu'elle est nulle dans les matrices A^k pour tout $k\in\{0,\ldots,n_1-1\}$, (et avec elle la case (i_1, j_1)) alors la case (i_1, j_1+n_1) est nulle dans la matrice $\chi(A)$; on dira que le zéro de la case (i_1, j_1) s'est décalqué sur la case (i_1, j_1+n_1) de la matrice $\chi(A)$.

Exemple:

$$\text{Soit } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & -4 & 7 & -8 & -10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que les puissances de A ont bien des zéros en position (2,1), (2,3), (4,1),(4,2), (4,3) et dans les lignes 5 à 7 et colonnes 1 à 4.

Le polynôme caractéristique de $A_{1,1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est égal à $\chi(t) = (t-7)^2t^2$ et $\chi(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -462 & -182 & -1386 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3234 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -924 & -364 & -2772 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ceci concerne les cases (2,1+4), (2,3+4), et les cases des trois dernières lignes-trois dernières colonnes.

L'interprétation « naturelle » de la nullité d'un terme $a_{i,j}$ d'une matrice A^k consiste à énoncer le fait que $f^k(e_j)$ appartient à $\mathrm{Vect}(e_u, u\neq i)$, malheureusement on ne voit pas où interviendrait là un polynôme caractéristique.

En fait l'explication est fournie par le Théorème suivant.

1 Le Théorème qui éclaire tout

Rappelons que l'Algèbre commutative $\mathbf{C}[A, W]$ engendrée par A et W admet comme famille génératrice la famille (I,A,..,A^{n_1-1}, W, WA, $\ldots$, WA^{n_2-1}). [1]

Théorème 1.

Si χ désigne le polynôme carastéritique du bloc $A_{1,1}$ la matrice $\chi(A)$ appartient à l'idéal $W\mathbf{C}[A, W]$

Démonstration.

*Comme A est triangulaire par blocs $\chi(A)$ s'*écrit $\begin{vmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ *et appliquant le rappel* $\chi(A)$ est égal à $Q(A) + \mathrm{WR}(A, W)$, *où Q est un polynôme de degré strictement inérieur à n_1 et R est un polynôme en deux variables.*

Comme le bloc $(\mathrm{WR}(A, W))_{1,1}$ *est nul on en déduit que le bloc* $(Q(A))_{1,1}$ est nul.

Or comme A est triangulaire par blocs $(Q(A))_{1,1} = Q(A_{1,1})$ est nul.

Dans le cas où $A_{1,1}$ est cyclique on peut alors déduire que Q est un polynôme annulateur de $A_{1,1}$, donc un multiple de son polynôme caractéristique, or le polynome cactéristique est de degré n_1 alors que le degré de Q est strictement inférieur à n_1, d'où Q est le polynôme nul.

Par suite $\chi(A) = \mathrm{WR}(A, W)$.

Dans le cas général:

M est alors la limite d'une suite de matrices cycliques (M_n).

Pour tout n $\chi_{M_{n_{1,1}}}(M_n)$ appartient à $W\mathbb{C}[W,M_n]$; $\chi_{M_{n_{1,1}}}$ tend vers $\chi_{M_{1,1}}$ par continuité du polynôme caractéristique en fonction de sa matrice, d'où $\chi_{M_{n_{1,1}}}(M_n)$ tend vers $\chi_{M_{1,1}}(M)$; nous allons montrer que la limite $\chi_{M_{1,1}}(M)$ appartient à $W\mathbb{C}[W,M]$.

L'appartenance d'un vecteur V à un sous-espace engendré par une famille finie $\{V_1, \ldots, V_q\}$ peut s'exprimer par le fait qu'il existe une sous-famille libre de celle-ci dont le rang est conservé lors de l'ajout de V.

W étant nilpotente d'indice t et les matrices M_n appartenant à F, une famille génératrice $\mathcal{G}_n$ de $W\mathbb{C}[W,M_n]$ sera constituée par les matrices $W^p M_n^q$ pour $0 \leqslant p \leqslant t-1$ et $0 \leqslant q \leqslant \dim(F)$; l'appartenance de $\chi_{M_{n_{1,1}}}(M_n)$ à $W\mathbb{C}[W,M_n]$ pour tout n peut se lire comme suit: quel que soit n il existe une sous famille de $\mathcal{G}_n$ dont le rang est conservé quand on lui ajoute $\chi_{M_{n_{1,1}}}(M_n)$.

Comme l'ensemble des couples (p,q) considéré est fini on peut, quitte à se limiter à une sous-suite, considérer qu'il existe un ensemble d'indices $I = \{p_i, q_j\}$ tel que pour tout n le rang de $\{W^p M_n{}^q, (p,q) \in I'\}$ est égal à celui de $\{W^p M_n{}^q, (p,q) \in I'\} \cup \{\chi_{M_{n_{1,1}}}(M_n)\}$, or ces matrices ont toutes une limite d'où le rang de $\{W^p M^q, (p,q) \in I'\}$ est égal à celui de $\{W^p M_n{}^q, (p,q) \in I'\} \cup \{\chi_{M_{1,1}}(M)\}$.

Ce qui établit que dans le cas général $\chi_{M_{1,1}}$*(M) appartient à* $W\mathbb{C}[W,M]$.

$\chi(A)=\mathrm{WR}(A,W)$. □

Proposition 2. *De l'action de W*

Soient $A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ 0 & B_{2,2} \end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *si* $B=AW$

i) $B_{1,1}=B_{2,2}=0$

ii) Si on note $A_{1,1}=\begin{pmatrix} A_{2,2} & a_{1,2} \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}$ *et* $B_{1,2}=\begin{pmatrix} B'_{1,2} \\ B''_{1,2} \end{pmatrix}$, *alors* $B_{1,2}=\begin{pmatrix} A_{2,2} & \\ 0 & \end{pmatrix}$

Démonstration.

Il suffit de remarquer que $W_{1,2}=\begin{pmatrix} I_{n_2} & \\ 0 & \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que si le terme de la ligne i_1 *et de la colonne* j_1 *de la matrice* $A_{2,2}$ *est nul, il en est de même de celui de* $B_{1,2}$ $B_{1,2}$ *donc de celui de la ligne* i_1 *et de la colonne* j_1+n_1 *de la matrice B.* □

Remarque 3.

On peut étendre cette propriété au cas de matrices fractales associées à des suites $(\mathrm{n}_1,\ldots,n_t)$.

D'où la propriété:

Si on suppose que pour tout k de $\{0,\ldots,n_1-1\}$ $(A^k)_{(i_1,j_1)}$ alors R(A,W)(i_1,j_1)=0, d'où le terme de la ligne i_1 et de la colonne $\mathrm{j}_1+\mathrm{n}_1$ de WR(A,W), c'est à dire de $\chi(A)$, est nul.

Références:

[1] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra,

Oxford University Press, 2011.