La $\lambda -$ dimension des fibrés vectoriels sur une surface

PAR PATRICK TELLER

Dans ce qui suit X désigne une surface projective (non singulière, irréductible sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique nulle), E est un fibré vectoriel sur X et $\mathrm{S}^m(E)$ est la puissance symétrique d'ordre m de E.

On peut montrer [1] qu'il existe des constantes positives α , β et un entier positif m_0 tel que $\forall m \geqslant 0$, $\alpha m^{\lambda} \leqslant h^0(S^{m+m0}(E)) \leqslant \beta m^{\lambda}$; λ est alors la $\lambda -$ dimension du fibré E; λ appartient à $\{-\infty, 0, 1, ..., n+r-1\}$, n étant la dimension de X et r le rang de E.

L'étude de la notion de $\lambda -$ dimension des fibrés vectoriels sur les courbes [1] montre que les résultats les plus précis concernent les fibrés stables et semi-stables et, en particulier, apparaissent deux cas « limites »:

- Les fibrés de λ $-$ dimension maximale qui ont des propriétés très proches de celles des fibrés amples.

- Les fibrés issus de représentations du groupe fondamental et pour lesquels un calcul effectif de λ est envisageable.

Il est donc nécessaire de définir une notion de stabilité pour les fibrés sur une surface.

Si H est un faisceau en droites inversible sur X on considrera la notion de H-stabilité définie par Mumford et Takemoto [12]:

Un fibré E sera dit H-stable (resp. H-semi stable) si quel que soit le sous-faisceau cohérent, sans torsion, F de E on a $\frac{d(E,H)}{\mathrm{r(E)}} > \frac{d(F,H)}{r(F)}$ (resp. $\geqslant$), où d(F,H)=$\mathrm{c}_1(F).\mathrm{c}_1(H)$.

Nous établirons que les fibrés semi-stables ayant une $\lambda -$ dimension maximale sont caractérisés par

$$\begin{cases} c_1(E).c_1(H) > 0 \\ c_1^2(E) - c_2(E) > 0 \end{cases}.$$

1 Résultats préliminaires

Soit E un fibré vectoriel sur X, on sait que la λ $-$ dimension de E sur X, $\lambda(E, X)$, est égale à $\lambda(O_{\mathbb{P}(E)}(1), \mathbb{P}(E))$[11]; pour les propriétés générales de la $\lambda -$ dimension on se reportera à [6] et [11].

Rappelons les résultats suivants:

Lemme 1.

Soit X une surface et E un fibré vectoriel sur X, de classes de Chern c_1=$c_1(E)$ *et* c_2=$c_2(E)$, *de rang r sur X.*

$\chi(S^m(E))$=$\frac{m(m+1)...(m+r-1)}{(r+1)!}(c_1^2 - c_2) + o(m^{r+1})$

$c_1(S^m E)$=$\frac{m(m+1)...(m+r-1)}{r!}c_1(E)$

rang$(S^m E)$=$\binom{m+r-1}{r-1}$

Proposition 2. *[9], [10]*

Soit un fibré vectoriel H-semi-stable sur X (resp. h stable) alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $S^n(E)$ *est semi-stable (resp. H stable).*

Le premier résultat est obtenu par Maruyama à l'aide de techniques analogues à celles utilisées par Gieseker dans le cas des courbes; le second utilise un résultat de Donaldson [3] démontré par des méthodes de géométrie différentielle très puissantes mais dont on peut présenter une démonstration plus élémentaire [13].

Proposition 3. *[12]*

Soit E un fibré vectoriel semi-stable sur une surface X.

$c_1(E).c_1(H)=0 \Longrightarrow h^0(E,X) \leqslant \mathrm{rang}(E)$

Corollaire 4.

Soit E un fibré vectoriel semi-stable de rang r

1) $c_1(E).c_1(H)<0 \Longrightarrow K(E,X)=-\infty$

2) $c_1(E).c_1(H)=0 \Longrightarrow K(E,X) \leqslant r-1$

Démonstration.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}, S^n(E)$ est de degré strictement négatif et semi-stable donc il n'a pas de sections globales.

2) On utilise les propositions 2 et 3 ainsi que le rang de $S^n(E)$ qui est asymptotiquement équivalent à n^{r-1}. □

La proposition suivante est technique.

Proposition 5.

Soit E un fibré vectoriel semi-stable de rang r sur X.

$d(E,H)>r.d(K,H) \Longrightarrow h^2(E)=0$ (où K désigne le diviseur canonique de X).

Démonstration.

$H^2(E) \simeq \mathrm{Hom}(E,K)$, donc si $h^2(E) \neq 0$ il existe un morphisme non nul $f: E \longrightarrow K$; désignons par A son noyau alors le rang de A est génériquement r-1 et $d(A,H) \geqslant d(E,H)-d(K,H)$.

D'où la semi-stabilité entraîne :

$\frac{d(E,H)}{r} \geqslant \frac{d(A,H)}{r-1}$, d'où $\frac{d(E,H)}{r} \geqslant \frac{d(E,H)-d(K,H)}{r-1}$ qui équivaut à $d(E,H) \leqslant r.d(K,H)$. □

On résumera donc ce paragraphe dans le théorème suivant:

Théorème 6.

Soit un fibré vectoriel E H-semi-stable de rang r

$$\begin{cases} c_1(E).c_1(H)>0 \\ c_1^2(E)-c_2(E)>0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda(E)=r+1.$$

Démonstration.

D'après la proposition 5, pour $m \ggg h^2(S^m(E))=0$ alors $h^0(S^m(E)) \geqslant \chi(S^m(E)$ et on conclut à l'aide du lemme 1. □

2 Le Théorème fondamental

Proposition 7. *[3]*

Soit X une surface projective et E un fibré vectoriel de rang r sur X; soit ζ *la classe de* $O_{\mathbb{P}}(E)(1)$ alors $\forall k \leqslant r$, *si y est un cycle de dimension k sur X*

$(y.\phi_k(E))_X = (\pi^*(y).\zeta^{k+r-1})_{\mathbb{P}(E)}$, *où* ϕ_k *désigne la k-ième classe de Chern inverse et* π *est la projection de* $\mathbb{P}(E)$ *sur X.*

Théorème 8.

Soit E un fibré vectoriel de rang r sur une surface X (sur $\mathbb{C}$*)*

$$\begin{cases} c_1^2(E) - c_2(E) < 0 \Longrightarrow \lambda(E, X) \leqslant r - 1 \\ c_1^2(E) - c_2(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(E, X) \leqslant r \end{cases}$$

Démonstration.

On sait que $\lambda(E, X) = \lambda(O_{\mathbb{P}(E)}(1), \mathbb{P}(E))$[11].

Nous allons construire une suite V_k (pour k=1...,p$\leqslant r$) de sous-variétés de $\mathbb{P}(E)$, de codimensions croissantes, obtenues en quotientant successivement par des faisceaux de la forme $O_{\mathbb{P}(E)}(t_k)$.

Si $\forall m \in \mathbb{N}, O_{\mathbb{P}(E)}(m)$ n'a pas de section globales autres que des diviseurs de zéro alors $\lambda \leqslant 0$ et le résultat est établi.

Si il existe $t_1 \in \mathbb{N}$ tel que $O_{\mathbb{P}(E)}(t_1)$ admet une section globale s_1 qui n'est pas un diviseur de zéro, alors celle-ci détermine une sous-variété V_1 qui sera normale si s_1 est une section générique (théor ème de Bertini) ce qui permet de définir la dimension de Kodaira d'un fibré sur V_1:

De la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}(E)}(-t_1) \overset{s_1}{\longrightarrow} O_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow O_{V_1} \longrightarrow 0$$

on déduit, pour tout m, la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}(E)}(m - t_1) \overset{s_1}{\longrightarrow} O_{\mathbb{P}(E)}(m) \longrightarrow O_{V_1}(m) \longrightarrow 0$$

ce qui permet de déduire l'inégalité: $\lambda(E, X) \leqslant \max\{0, \lambda(O_{V_1}(1), V_1) + 1\}$.

Répétons cette construction autant que possiblr, ce qui donne une suite décroissante de sous-variétés normales V_1,...,V_p et, d'après la construction, $[V_1] = t_1\zeta$,$[V_2] = t_1t_2\zeta^2$...,$[V_p] = t_1....t_p\zeta^p$.

Si p$\leqslant r - 1$, ceci signifie que $\lambda(E, X) \leqslant r - 1$.

Si p>r-1 considérons V_{r-1} plus en détail:

$[V_{r-1}] = t_1....t_{r-1}\zeta^{r-1} = T\zeta^{r-1}$ (T>0).

D'après la proposition 7

$\zeta^{r-1}.\pi^*(\mathrm{pt}) = 1$, donc $V_{r-1} \overset{\pi'}{\longrightarrow}$ X est un morphisme fini et $\pi'^*(H)$ est un fibré en droites ample sur V_{r-1}; il faut distinguer ici deux cas:

1er cas: $c_1(E)^2$-$c_2(E) = \phi_2(E) < 0$.

Dans ce cas considérons la courbe V_r définie sur V_{r-1} par une section non diviseur de zéro de $L=O_{V_{r-1}}(t_{r-1})$, on a $(V_r.V_r)_{V_{r-1}}(\zeta)^r_{\mathbb{P}(E)}=(\phi_2(E))_X = c_1(E)^2\text{-}c_2(E)$, qui est strictement négatif.

Par suite, d'après un théorème de Grauert [5] V_r est contractible à un espace analytique.

On peut alors en déduire que si $V_r = \sum \alpha_i E_i$, où les E_i sont des courbes irréductibles , $(E_i,E_j)_{(i,j)}$ est une matrice définie négative [7] et alors, quel que soit m $|mV_r|=mV_r$ et $\lambda(O_{V_{r-1}}(t_{r-1}), V_{r-1}) = \lambda(L, V_{r-1})=0$.

On en déduit $\lambda(E,X) \leqslant r-1$.

2ème cas: $c_1(E)^2\text{-}c_2(E)=\phi_2(E)=0$.

Posons $H'=\pi'^*(H)$.

Considérons $L=O_{V_{r-1}}(t_{r-1})$ et $L_n=(L^n \otimes H'^{-1})$, alors $L_n.L_n=H'^2-2nL.H' < 0$ pour n$\gg$, donc on peut appliquer à L_n le résultat du 1er cas: $\lambda(L_n, V_{r-1})=0$.

Revenant à la suite exacte $0 \longrightarrow L^n H'^{-1} \longrightarrow L^n \longrightarrow L^n|_{H'} \longrightarrow 0$, où H' désigne aussi la courbe définie par le fibré H', on a pour n $h^0(L^n) \leqslant h^0(L^n H'^{-1}) + h^0(L^n|_{H'})$.

Le premier terme $L^n H'^{-1}$ est égal à L^1 et, comme H' est de dimension 1, $\lambda(L^n|_{H'}, H') \leqslant 1$, d'où

$\lambda(L_n, V_{r-1}) \leqslant 1$ et par suite $\lambda(E,X) \leqslant r$. □

On peut résumer les résultats des deux paragraphes dans le tableau:

E	$c_1(H).c_1(E)<0$	$c_1(H).c_1(E)=0$	$c_1(H).c_1(E)>0$	$c_1(H).c_1(E)>0$	$c_1(H).c_1(E)>0$
			$c_1^2(E)-c_2(E)<0$	$c_1^2(E)-c_2(E)=0$	$c_1^2(E)-c_2(E)>0$
$\lambda(E,X)$	$-\infty$	$\leqslant r-1$	$\leqslant r-1$	$\leqslant r$	$r+1$

D'où

Théorème 9.

Soit E un fibré H-semi-stable sur X

$$\lambda(E,X) \leqslant r{+}1 \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1(H).c_1(E) > 0 \\ c_1^2(E) - c_2(E) > 0 \end{cases}$$

Ce résultat réclame quelques remarques:

- Sakai [11] avait déjà établi ce résultat sous l'hypothèse plus restrictive suivante: $O_{\mathbb{P}(E)}$(m) est engendré par ses sections globales pour m assez grand.

- Ces deux inégalités sont nécessaires pour que le fibré soit ample, mais elles ne sont pas suffisantes même sous l'hypothèse de stabilité [9].

Ce résultat, analogue à un résultat sur les courbes [1] montre que la classe des fibrés semi-stables de λ − dimension maximale contient celle des fibrés amples mais est, contrairement aux fibrés amples, susceptible de caractérisation numérique.

3 Exemples

Dans le tableau précédent apparaît la valeur r et on peut se demander si cette valeur est effectivement atteinte, les exemples suivants, dans le cas $X=\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ et r=2, montrent que c'est le cas.

1. Soit $E=T_X(-1)=O$, $c_1(E)=c_2(E)=1$

On a la suite exacte $0 \longrightarrow O(-1) \longrightarrow O^3 \longrightarrow E \longrightarrow 0$ [8]

d'où pour tout m la suite exacte $0 \longrightarrow O(-1) \otimes S^{m-1}(O^3) \longrightarrow S^m(O^3) \longrightarrow S^m(E) \longrightarrow 0$

et, par suite, la suite exacte $0 \longrightarrow H^0(S^m(O^3)) \longrightarrow H^0(S^m(E)) \longrightarrow H^1(O(-1) \otimes S^{m-1}(O^3))$, or $O(-1) \otimes S^{m-1}(O^3) = \binom{m+1}{m-1} O(-1)$ et $H_1(O(-1))=0$

donc $H^0(S^m(O^3)) \simeq H^0(S^m(E))$, qui est donc un polynôme de degré 2.

2. Il en est de même dans le cas du fibré E' défini par l'extension

$0 \longrightarrow O(-2) \longrightarrow O^3 \longrightarrow E' \longrightarrow 0.$

3. D'autre part, si E admet une filtration en droites L_i alors

si $c_t(L_i)=1+a_i t$ alors $c_1(E)=\sum a_i$ et $c_2(E)=\sum_{i<j} a_i a_j$, d'où $c_1{}^2\text{-}c_2=\sum a_i^2 + \sum_{i<j} a_i a_j = \frac{1}{2}\sum a_i^2 + \frac{1}{2}(\sum a_i)^2$, qui n'est nul que si et seulement si les a_i sont tous nuls, auquel cas $c_1=c_2=0$; dans ce cas on peut montrer à l'aide de résultats élémentaires [4] que $\lambda(E,X) \leqslant r-1$.

4 Bibliographie

[1] J. Bertin, P. Teller: invariants symétriques et fibrés vectoriels sur les courbes; Math. Annalen 264, 423-436 (1983)

[2] F.B. Bogomolov: Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties; Math. USSR. (zvestija) vol 13 (n°3) 499-555 (1979)

[3] D. Gieseker: P-ample bundles and their Chern Classes; Nagoya Math. Journal. Vol n°3, 51-116 (1971)

[4] H. Grauert: Uber Modifikationen und exceptionnelle analytische Menge; Math. Annalen 146, 331-368 (1962)

[5] R. Hartshorne: Algebraic Geometry; Graduate texts in Mathematics 52, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York. (1977)

[6] S. Itaka: on Dimension of algebraic varieties; J. Math. Soc. Japon, vol 23, 356-373 (1961)

[7] S. Itaka: Algebraic Geometry; Graduate texts in Mathematics 76. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York. (1981)

[8] J. Le Potier: Stabilité et amplitude sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, in « Vector Bundles and Differential Equations » edited by A.Hirschowitz Birkhauser Verlag, (1980)

[9] M. Maruyama: The theorem of Grauert-Mullich-Spindler; Math. Annalen. 255, 317-333 (1981)

[10] V.B. Mehta, D. Ramanathan; Restriction of stable sheaves and representations of the fundamental group; Inventiones Mathematicae 77, 163-172 (1984)

[11] F. Sakai: symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties, in « Algebraic Geometry » Lecture Notes in Mathematics, 732. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York. (1978)

[12] F. Takemoto: Stable vector bundles on algebraic surfaces; Nagoya Math. Journal, Vol 47, 29-48 (1972)

[13] P. Teller: Notes personnelles

Paris 1985