Qu'est-ce que résoudre un système d'inéquations linéaires ?

par Patrick Teller

Une première réponse est savoir si le système possède des solutions ou pas, une réponse plus complète serait déterminer une expression explicite des solutions, lorsqu'elles existent.

La documentation existante indique trois directions essentielles:

- La méthode de Fourier-Motzkin qui consiste en une cascade d'éliminations d'inconnues, que l'on peut interpréter comme une suite de projections; elle est longue et complexe [1]

- Les méthodes « du point intérieur » [2] et de « l'ellipsoïde » [3], qui sont de meilleure complexité (théorique) que toutes les autres; elles peuvent répondre à la question de l'existence éventuelle de solutions mais elles ne fournissent pas de description de l'ensemble des solutions.

- La méthode du simplexe, sur laquelle nous nous appuyerons, est toujours évoquée de manière implicite dans le cadre de la programmation linéaire; il a été impossible de trouver de description explicite, tant elle doit paraître évidente, pourtant nous pourrons présenter une amélioration originale de cet « algorithme implicite ».

On trouvera ici une étude « autosuffisante » du problème, ce qui nous a conduit à préciser des définitions et à décrire le principe de la méthode du simplexe en programmation linéaire, et la description d'un algorithme plus simple que l'algorithme « implicite » de la méthode du simplexe (on évite l'introduction de variables artificielles dans le cas d'inéquations avec second membre strictement négatif) ;.

3) le même détermine si borné (donc Ax<=0 est un singleton) ou non borné (et Ax<=0 est non singleton) }

Malgré (ou à cause de) la richesse du domaine nous limiterons au maximum les définitions et résultats en nous limitant à ce qui est indispensable à notre objet.

Avertissement 1.

1. Pour qu'il n'y ait pas d 'ambiguité précisons que nous emploierons les termes « positif » pour « supérieur ou égal à zéro », « négatif » pour « inférieur ou égal à zéro ».

2. Nous écrirons $M \geqslant 0$, dans le cas d'une matrice ou d'un vecteur colonne pour exprimer que tous les termes sont positifs..

3. Pour des raisons de commodité « graphique » nous écrirons «égal à la matrice $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ à l'ordre des colonnes près » pour ne pas avoir à détailler les colonnes dans lesquelles on trouvera un «1 » et des zéros lorsque ce n'est pas important.

4. Les équations et les inéquations (linéaires, dans les deux cas) que nous rencontrerons s'écriront sous la forme $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ ou $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b$; dans les deux cas nous désignerons le réel b comme « la constante » de l'équation ou l'inéquation.

5. X désignera aussi bien un vecteur-colonne qu'un point de $\mathbb{R}^n$.

6. Nous désignerons du nom de colonne-unité les vecteurs colonnes contenant un « 1 » et dont les autres termes sont nuls.

1 1. Inéquations linéaires et équations linéaires

Contrairement au cas des systèmes d'équations linéaires où on peut opérer par combinaisons linéaires et raisonner par équivalence, lorsqu'il s'agit de systèmes d'inéquations on ne peut opérer que par combinaisons linéaires à coefficients positifs et par implication, sans équivalence; ce qui peut être suffisant à établir l'inexistence de solutions mais qui est insuffisant à établir leur existence.

Ceci conduit à transformer les inéquations en équations par ajout de variables d'écart, comme suit :

$\exists(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n a_{\mathrm{ij}} x_j \leqslant b_i \Longleftrightarrow \exists(x_1, \ldots x_n, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \sum_{j=1}^n a_{\mathrm{ij}} x_j + y_i = b_i$

et

$\exists(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n a_{\mathrm{ij}} x_j \geqslant b_i \Longleftrightarrow \exists(x_1, \ldots x_n, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \sum_{j=1}^n a_{\mathrm{ij}} x_j - y_j = b_i$.

Les x_j sont les coordonnées « classiques » des points dans le repère $(O, e_1, \ldots., e_m)$, y_i représente une distance orientée des points à l' hyperplan H_i d'équation $\sum_{j=1}^n a_{\mathrm{ij}} x_j = b_i$; en fait les x_j aussi représentent des distances à des hyperplans.

2 2. Qu'est-ce qu'un polyèdre ?

Un polyèdre est une intersection, naturellement convexe, de demi-espaces (limités par des hyperplans affines); par suite si on considère un système d'inéquations linéaires en n inconnues $(x_1, \ldots, x_n)$ l'ensemble des solutions, s'il est non vide, sera un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$.

Pour pouvoir nous placer dans un cadre permettant d'utiliser les techniques de la programmation linéaire, nous considérerons des systèmes d'inéquations linéaires de la forme $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{AX} \leqslant B \\ X \geqslant 0 \end{array} \right.$, où $A = (a_{\mathrm{ij}}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{mn}}(\mathbb{R})$ et $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{R})$ {, où nous supposerons que les colonnes de la matrice A sont toutes non nulles, c'est-à-dire que les variables $(x_1, \ldots, x_n)$ sont toutes actives}

L'observation d'un tel système ne permet pas a priori de déterminer ni s'il est compatible, ni l'ensemble de ses solutions, comme le manifestent les deux exemples élémentaires suivants.

Exemple 2.

S'il est facile de remarquer que le système $\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$ est compatible, parce que le couple (0,0) est évidemment solution, il n'est pas aussi immédiat (sans résolution graphique, possible vue la dimension considérée) de découvrir que le système $\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$ est compatible alors que le système $\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} \\ x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$ ne l'est pas.

Définition 3. *Sommets d'un polyèdre*

Soit un polyèdre Q défini dans $\mathbb{R}^n$ par le système d'inéquations linéaires $\left\{ \begin{array}{l} L_1(X) \leqslant b_1 \\ L_2(X) \leqslant b_2 \\ \ldots \\ L_p(X) \leqslant b_p \end{array} \right.$ *; un point X_0 de Q est un sommet de Q lorsque $\{L_i, L_i(X_0) = b_i\}$ engendre le dual de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 4. Sommets dégénérés

Il peut arriver que l'ensemble $\{L_i, L_i(X_0) = b_i\}$ ne soit pas unique et qu'un sommet possède ainsi plusieurs « descriptions »; un tel sommet est dit dégénéré.

Remarque 5. Comme le système $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$ contient, entre autres, le système $-X \leqslant 0$, qui se lit $\begin{cases} -x_1 \leqslant 0 \\ \ldots \\ \ldots. \\ -x_n \leqslant 0 \end{cases}$ alors, si B est positif, l'origine est un sommet de P.

Définition 6. *Représentation standard du polyèdre P et matrice de simplexe*

Nous appellerons représentation standard du polyèdre P la forme suivante $\begin{cases} (\ A\ \ I\ )\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$ *, qui est équivalente à la précédente, après introduction des variables d'écart* $(y_1, \ldots, y_m)$.

Nous appellerons matrice de simplexe toute matrice de la forme $(\ A\ \ I\ )$*, à l'ordre des colonnes près.*

La représentation standard est d'une part le moyen de substituer au système d'inéquations un système d'équations, plus adapté aux manipulations par combinaisons linéaires, mais d'autre part on peut l'interpréter comme une paramétrisation du polyèdre, sous contraintes de positivité des inconnues.

$$\begin{cases} (\ A\ \ I\ )\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, m\}, y_i = b_i\text{-}\sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} x_j \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}, x_j \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}, y_i \geqslant 0 \end{cases}.$$

Proposition 7. *Lorsque B est positif le paramétrage détermine aussi un sommet*

La paramétrisation ci-dessus décrit P comme l'intersection du sous-espace affine issu du sommet $(x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0,\ y_1 = b_1,\ \ldots,\ y_m = b_m)$ *et dirigé par le sous-espace vectoriel Vect(*$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} e_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2} e_i,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} a_{\mathrm{in}} e_i$*) et des demi-espaces déterminés par les contraintes* $\begin{cases} \forall j \in \{1, \ldots, n\}, x_j \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}, y_i \geqslant 0 \end{cases}$.

Lorsque le vecteur colonne B est positif la représentation standard $\begin{cases} (\ A\ \ I\ )\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$ *sera appelée représentation standard positive.*

Nous montrerons plus bas que tout polyèdre possède une représentation standard positive.

Définition 8. *Système d'inéquations linéaires résolu*

Nous considérerons le système d'inéquations linéaires $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$ résolu lorsque nous en connaîtrons une représentation standard positive.

3 3. Quelques procédures utiles

Pour la suite nous allons définir un certain nombre de procédures:

Définition 9. *La procédure de Pivotage autour du terme* $m_{\alpha\beta}$ *:Pivot(*α, β*)*

Soit $M = (m_{\mathrm{ij}}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{mp}}(\mathbb{R})$ *et* $m_{\alpha\beta} \neq 0$ *nous appellerons pivotage autour de* $m_{\alpha\beta}$ *la procédure*

pour tout j $m_{\alpha j} := m_{\alpha j} / m_{\alpha\beta}$

pour tout $i \neq \alpha$, *pour tout j* $m_{\mathrm{ij}} := m_{\mathrm{ij}} - m_{i\beta} * m_{\alpha j}$;

nous désignerons cette opération par Pivot(α, β;*M*) *ou Pivot*(α, β) *lorsqu'il n'y a aucune ambiguité.*

Dans le cas d'un système S d'équations linéaires nous employerons la même terminologie pour décrire la même opération sur les lignes des deux membres et nous la désignerons par Pivot(α, β;*S*) *ou Pivot*(α, β).

Lors du pivotage autour de $m_{\alpha\beta}$:

le terme en position (α, β) *devient égal à 1*

les autres termes de la colonne β *deviennent nuls*

si dans une colonne d'indice $\beta' \neq \beta$ *on avait un « 1 » en position* (α', β') *où* $\alpha' \neq \alpha$ *et des « 0 » ailleurs la colonne reste inchangée.*

Par suite le pivotage transforme une matrice de simplexe en matrice de simplexe.

Il va de soi que les pivotages transforment les systèmes linéaires en systèmes équivalents.

Proposition 10. *Le pivotage pour changer de sommet du polyèdre*

Considérons la représentation standard positive du polyèdre P $\left\{ \begin{array}{l} (\,A \quad I\,)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{array} \right.$ *, qui représente le polyèdre « vu depuis le sommet* $(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0, y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m)$ *», et la colonne* A_j *de la matrice A.*

Prenons dans la colonne A_j, *s'il existe, l'élément* $a_{i_0 j} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{\mathrm{ij}}}, a_{\mathrm{ij}} > 0 \right\}$, *le pivotage autour de cet élément transformera la matrice (A,I) en une matrice qui, à l'ordre des colonnes près, présentera la même structure (A',I); le choix de* $a_{i_0 j} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{\mathrm{ij}}}, a_{\mathrm{ij}} > 0 \right\}$ *nous assure que le nouveau second membre B' sera positif; ceci représentera donc une autre paramétrisation de P.*

Dans le cas général cette nouvelle paramétrisation désigne donc un nouveau sommet; dans le cas d'un sommet dégénéré il peut s'agir d'une autre désignation du même sommet.

Bien sûr l'obstacle principal à l'obtention d'une représentation standard positive réside dans les inéquations de la forme $\sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} x_j \leqslant \beta_i$ où $\beta_i < 0$.

Proposition 11. *Changement de signe dans une ligne*

Considérons la représentation standard de P $\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & \ldots & A_n & I_m & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \ldots. & \alpha_n & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{array} \right.$ *(S), où la première colonne* $\begin{pmatrix} A_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ *est à termes négatifs, et* α_1 *en particulier est strictement négatif, B est un vecteur positif, et* β *est un réel strictement négatif; la représentation n'est donc pas positive, mais l'hypothèse sur la première colonne assure que l'ensemble des solution est non vide (et même non borné).*

En effectuant Pivot($m+1, 1$;*S*) *nous obtenons une représentation standard où le second membre* $\begin{pmatrix} b_1 - \beta \frac{a_{11}}{\alpha_1} \\ b_2 - \beta \frac{a_{21}}{\alpha_1} \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m - \beta \frac{a_{m1}}{\alpha_1} \\ \frac{\beta}{\alpha_1} \end{pmatrix}$ *est positif, ce sera donc une représentation standard positive, donc un sommet du polyèdre P; il en sera de même dans le cas d'une autre colonne d'indice j.*

Nous désignerons cette opération par Changesigne(m+1,j,S), indiquant ainsi le numéro de la ligne dont il fallait modifier le signe de la constante.

Dans le cas d'un système (T) $\begin{cases} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & \ldots & A_n & I_m & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \ldots. & \alpha_n & 0 & 1 & 0 \\ C_1 & C_2 & \ldots & \ldots & C_n & 0 & 0 & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ -\beta \\ B' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$ *, où* $\begin{pmatrix} A_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$, *B et β vérifient les mêmes hypothèses qu'au-dessus et les colonnes* $(C_1, ..., C_n, B')$ *sont quelconques nous utiliserons la même terminologie pour désigner la même opération où le pivotage s'applique cette fois à l'ensemble du système.*

Remarquons que les lignes qui avaient des seconds membres positifs les conservent (par exemple les m premières), le second membre de la m+1 ième ligne devient positif et il est possible que certains seconds membres des lignes d'indice supérieur ou égal à m+2 aussi deviennent positifs.

4 4. L'algorithme, idées générales

Pour résoudre un système d'inéquations linéaires $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leqslant b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \leqslant b_2 \\ \ldots \\ \ldots. \\ \sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{mj}}x_j \leqslant b_m \end{cases}$ nous allons résoudre pas à pas les systèmes $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leqslant b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \leqslant b_2 \\ \ldots \\ \ldots. \\ \sum_{j=1}^{n} a_{p+1j}x_j \leqslant b_{p+1} \end{cases}$, où chaque fois le sous-système $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \leqslant b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \leqslant b_2 \\ \ldots \\ \ldots. \\ \sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{pj}}x_j \leqslant b_p \end{cases}$ est écrit sous forme positive, c'est à dire représente un polyèdre (non vide) de sommet O; pour cela il faut transformer le système de telle sorte que la première inéquation ait un second membre positif, puis à chaque étape lorsqu'est établie la compatibilité d'un système il sera transformé en un système équivalent à second membre positif.

5 5. Le test de la compatiblité d'une nouvelle inéquation

L'idée de base est simple:

Proposition 12. *Le lien avec la programmation linéaire*

Le système d'équations linéaires $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_p & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$ *, où* $B \geqslant 0$ *est compatible si et seulement si la restriction de la fonction affine* $f: X \longmapsto d - {}^t\mathrm{CX}$ *au polyèdre P, de représentation standard **positive*** $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$ *, prend des valeurs positives dans le polyèdre P.*

Remarque 13. La méthode du simplexe est fondée sur le fait que comme f est continue, si P est borné, elle y admet un maximum et comme f est affine ce maximum est (aussi, pas nécessairement « seulement ») atteint en un sommet; la définition des sommets, s'ajoutant à notre intuition, assure que le nombre de sommets est fini.

Proposition 14.

Considérons la matrice $\begin{pmatrix} A & I_p & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et le tableau (T)* $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & \mathrm{Ip} & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ d \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$ *où* $B \geqslant 0$ *; ce système sera appelé « tableau du simplexe » associé au polyèdre P et à la fonction affine f.*

La dernière équation se lit $y_{p+1} = d - {}^t\mathrm{CX}$ *et l'état actuel du tableau nous indique qu'au point M de coordonnées* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots, y_p = b_p$, y_{p+1} *prend la valeur d, c'est à dire la fonction f prend la valeur d.*

** Si les coefficients de* ${}^tC$ *sont tous supérieurs ou égaux à 0, f admet en M un maximum.*

*** S'il existe j tel que* $c_j < 0$ *et si* $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ $a_{\mathrm{ij}} \leqslant 0$ *alors P n'est pas borné et f n'est pas majorée.*

**** S'il existe (i,j)*$\in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$ *tels que* $c_j < 0$ *et* $a_{\mathrm{ij}} > 0$ *alors, si on considère un indice* i_0 *tel que* $m_{i_0 j} = \min\left\{\frac{b_i}{m_{\mathrm{ij}}}, m_{\mathrm{ij}} > 0\right\}$*, le pivotage Pivot*$(i_0, j)$*, et l'application éventuelle de la règle de Bland, permet un changement de sommet de P vers un autre sommet de P où f prendra une valeur supérieure ou égale.*

Démonstration.

** Si les coefficients de* ${}^tC$ *sont tous supérieurs ou égaux à 0 il suffit de remarquer que* $\forall X \geqslant 0$, $f(X) = d - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant d$.

*** S'il existe j tel que* $c_j < 0$ *et si* $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ $a_{\mathrm{ij}} \leqslant 0$ *alors pour tout* $x_j \geqslant 0$ *le point de coordonnées* $x_1 = x_2 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_n = 0$ *et* $x_j \geqslant 0$ *appartient à P, donc P n'est pas borné, et vérifie* $f(X) = d - c_j x_j$.

Avant de considérer le dernier cas il est nécessaire de rappeler que, dans le cas d'un sommet dégénéré, un pivotage peut se traduire par du « surplace », on croit avoir changé de sommet mais ce n'est pas le cas et cela peut se répéter et constituer un phénomène de cyclage; la conduite à tenir pour éviter le cyclage réside dans la règle de Bland: lors du choix d'un pivotage on chosira parmi les colonnes candidates celle de plus bas indice et parmi les lignes candidates celle de plu bas indice ([4], [5]).

**** S'il existe (i,j)*$\in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$ *tels que* $c_j < 0$ *et* $a_{\mathrm{ij}} > 0$*, alors soient* $j_0 = \min\{j, c_j < 0\}$ *et* i_0 *tel que* $a_{i_0 j} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{\mathrm{ij}}}, a_{\mathrm{ij}} > 0\right\}$*, l'application de la règle de Bland nous assure qu'il n'y aura pas de cyclage et donc qu'il existera (au bout d'un temps fini) un pivotage Pivot*(i_0, j_0) *qui permet un changement vers un autre sommet de P où f prendra comme valeur* $d - \frac{c_{j_0}}{a_{i_0 j_0}} b_{i_0} > d$. □

On en déduit alors la méthode pour l'étude du signe de f sur le polyèdre P

Proposition 15. *L'algorithme d'étude du signe de f sur le polyèdre P*

i) Si $d \geqslant 0$ *la valeur de f au sommet* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots, y_p = b_p$ *est positive, donc il existe des points de P où f est positive.*

ii) si $d < 0$

** Si les coefficients de* ${}^tC$ *sont tous supérieurs ou égaux à 0, f ne prend sur P que des valeurs strictement négatives. (I)*

*** S'il existe j tel que* $c_j < 0$ *et si* $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$ $a_{\mathrm{ij}} \leqslant 0$ *alors il existe des points de P où f est positive. (II)*

**** S'il existe (i,j)*$\in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$ *tels que* $c_j < 0$ *et* $a_{\mathrm{ij}} > 0$ *alors l'application de pivotages successifs, suivant la règle de Bland, permet un changement de sommet de P vers un autre sommet de P où f prendra une valeur strictement supérieure. (III)*

Le nombre de sommets d'un polyèdre étant fini et le maximum de f devant être atteint, s'il existe, en un sommet nous sommes donc assurés de pouvoir déterminer en un temps fini si la restriction de f à P prend des valeurs positives ou pas.

Démonstration.

P étant paramétré comme suit $\begin{cases} \forall i \in \{1, ..., m\}, y_i = b_i\text{-}\sum_{j=1}^{n} m_{\mathrm{ij}} x_j \\ \forall j \in \{1, ..., n\}, x_j \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1, ..., m\}, y_i \geqslant 0 \end{cases}$ et f(X)$=d - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

i) est évident.

ii) on suppose d<0.

* Si les réels (c_j) sont supérieurs ou égaux à 0, d, qui est la valeur prise par f au sommet O est le maximum de f et donc quel que soit le point de P f y prend une valeur strictement négative.

** S'il existe j tel que c_j<0 et si $\forall i \in \{1, ..., m\}$ $a_{\mathrm{ij}} \leqslant 0$ alors, quel que soit $x_j > 0$, le point de coordonnées (x_1=0,x_2=0, ..., $x_{j-1} = 0, x_j, x_{j+1} = 0, ..., x_n = 0$) appartient à P, et si x_j est assez grand son image par f est positive. (II)

Concrètement nous allons appliquer la procédure Changesigne(p+1,j,T) transforme le système (T) en un système équivalent dont le second membre est positif; il s'agit de la représentation standard positive du polyèdre défini par les p+1 inéquations du système (T).}

*** S'il existe (i,j_0)$\in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., p\}$ tels que c_{j_0}<0 et a_{ij_0}>0, effectuons des pivotages suivant la règle de Bland, nous obtiendrons $\begin{cases} \begin{pmatrix} A' & I_p & 0 \\ {}^tC' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ y'_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' \\ d' \end{pmatrix} \\ X' \geqslant 0 \\ Y' \geqslant 0 \end{cases}$; les pivotages nous ont donc conduits à autre sommet de P.

Si en ce sommet il est possible de savoir s'il existe ou non des points de P où f prend des valeurs positives, on peut s'arrêter, sinon on continue vers un autre sommetoù f prend une valeur strictement supérieure.

Comme le nombre de sommets de P est fini cet algorithme s'achèvera. □

Remarque 16. Il est possible d'améliorer la choix du pivotage lorsque B>0, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de risque que le sommet soit dégénéré:

Nous choisirons (i_0, j_0) comme suit

Soit J=$\{j \in \{1, ..., n + m\,/\,c_j < 0\}\}$ pour tout j$\in J$ $I(j) = \left\{ i \in \{1, ..., m\}, \frac{b_i}{m_{ij}} = \min \left\{ \frac{b_k}{m_{\mathrm{kj}}}, k \in \{1, ..., m\} / m_{\mathrm{kj}} > 0 \right\} \right\}$ et i_0(j)=min $(I(j))$.

$j_0 = \min \left\{ j \in J, \frac{-c_j b_{i_0(j)}}{m_{i_0(j)j}} = \max \left\{ \frac{-c_k b_{i_0(k)}}{m_{i_0(k)k}}, k \in J \right\} \right\}$.

Comme d'$=d - \frac{c_{j_0}}{m_{i_0 j_0}} b_{i_0}$ cela nous assurera que ce changement de sommet est, de tous ceux envisageables, celui qui apporte la meilleure croissance de f; et f acquérera une valeur positive si et seulement si $\frac{d}{c_{j_0}} \leqslant \frac{b_{i_0}}{m_{i_0 j_0}} \Longleftrightarrow \frac{b_{i_0}}{m_{i_0 j_0}} \geqslant \left| \frac{d}{c_{j_0}} \right|$.

Remarque 17.

On remarquera que, comme le pivotage transforme les sytèmes linéaires en systèmes équivalents, dans le cas (II) la procédure Changesigne(p+1,1,T), comme dans le cas des pivotages successifs du cas (III), le système $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & \mathrm{Ip} & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ d \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \\ y_{p+1} \geqslant 0 \end{cases}$ est transformé en un système équivalent $\begin{cases} \begin{pmatrix} A' & \mathrm{Ip} & 0 \\ {}^tC' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' \\ d' \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \\ y_{p+1} \geqslant 0 \end{cases}$ et, lorsque le second membre est positif, il s'agit de la représentation standard positive du polyèdre défini par ces p+1 équations.

ce que l'on peut résumer comme suit:

Théorème 18. *Le test de compatibilité d'une nouvelle inéquation*

Soit le polyèdre P de représentation standard ***positive*** $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$*, la fonction affine f:* $X \longmapsto d - {}^t\mathrm{CX}$.

Si la restriction de f à P n'est pas strictement négative il existe une suite finie de pivotages transformant le système (S) $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_p & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ d \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \\ y_{p+1} \geqslant 0 \end{cases}$ *en (S')* $\begin{cases} \begin{pmatrix} A' & I_p & 0 \\ {}^tC' & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B' \\ d' \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \\ y_{p+1} \geqslant 0 \end{cases}$*, où* $\begin{pmatrix} B' \\ d' \end{pmatrix} \geqslant 0$ *(à l'ordre des colonnes près), qui est une représentation standard positive du polyèdre P' des solutions du système (S') (ou de manière équivalente (S)).*

Remarque 19.

En fait nous allons nous retrouver devant un système de p+1+q inéquations (S) $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_p & 0 & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ d \\ B_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \\ Z \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$, $B_1 \geqslant 0$, pour lesquelles nous désirerons savoir si les p+1 premières (T) $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_p & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$ sont compatibles; si nous effectuons simplement le test sur le système (T) et conservons les q dernières équations nous obtenons un nouveau système équivalent, mais pas une forme standard parce que la colonne j_0 ne sera pas une colonne unité.

Ceci nous conduit à la définition suivante

Définition 20. *L'algorithme étendu*

Soit le système $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_p & 0 & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ d \\ B_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \\ Z \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$*,* $B_1 \geqslant 0$.

Nous allons appliquer l'algorithme décrit au-dessus au système $\begin{array}{l} \begin{pmatrix} A & I_p & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{array}$,
et chaque pivotage (qui sera déterminé par le système $\begin{pmatrix} A & I_p & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ d \end{pmatrix}$*) sera appliqué à l'ensemble du système* $\begin{pmatrix} A & I_p & 0 & 0 \\ {}^tC & 0 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_{p+1} \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ d \\ B_2 \end{pmatrix}$.

Ce qui permettra d'abord de déterminer la compatiblité du système formé par les p+1 premières inéquations et, dans ce cas, de transformer une forme standard en une autre forme standard, dans laquelle le sous-système correspondnt aux p+1 premières inéquations sera sous forme standard positive, donc représentera un polyèdre, et par suite de répéter le test...

6 6. Application à l'étude des systèmes d'inéquations linéaires

6.1 6.0 Le principe

Partant d'un système d'inéquations linéaires on le transforme au moyen de variables d'écart en un système d'équations linéaires, avec contraintes de positivité.

Dans un premier temps le système est transformé en un système d'équations de la forme $\sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}} x_j + y_i = b_i$, où l'une au moins des constantes est positive; par une permutation des lignes les équations à constante positive sont regroupées au début.

Les inéquations dont la constante est positive représentent un polyèdre non vide P_i et à la première équation à constante strictement négative $\sum_{j=1}^{n} a_{i+1,j} x_j + y_{i+1} \leqslant b_{i+1}$ sera associée la fonction affine f_{i+1}: $X \longmapsto b_{i+1}$ - $\sum_{j=1}^{n} a_{i+1j} x_j$, ce qui permet d'envisager l'application de l'algorithme étendu de la proposition 20 pour étudier la restriction de f_{i+1} à P_i.

Cet algorithme permet soit de conclure que le système est incompatible, soit d'obtenir une représentation du polyèdre déterminé par les i+1 premières inéquations; dans ce cas les inéquations dont le second membre est positif sont regroupées en tête et alors on itère pour étudier la possibilité d'ajouter la première inéquation à second membre strictement négatif...

A l'issue de l'application de l'algorithme soit le système est incompatible, soit il apparaît sous la forme équivalente d'un système $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B \\ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$, où B est positif; nous avons alors établi sa consistance et paramétrisé l'ensemble de ses solutions.

6.2 6.1 Initialisation

Soit le système (S): $\begin{cases} L_1(X) + y_1 = b_1 \\ L_2(X) + y_2 = b_2 \\ \ldots \\ L_m(X) + y_m = b_m \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$, où les $L_i(X)$ sont des formes linéaires à n variables, on supposera que quelque soit $j \in \{1, \ldots, m\}$, il existe i tel que $a_{\text{ij}} \neq 0$, ce qui signifie que chacune des inconnues est active.

Nous pouvons retranscrire ce système sous la forme du tableau suivant $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$ et nous supposerons que le cas $\begin{cases} A \geqslant 0 \\ B < 0 \end{cases}$, qui entraîne une incompatiblité triviale, est exclu.

Lemme 21. *Le système (S) est équivalent à un système (S')* $\begin{cases} L'_1(X') + y'_1 = b'_1 \\ L'_2(X') + y'_2 = b'_2 \\ \ldots \\ L'_m(X') + y'_m = b'_m \\ X' \geqslant 0 \\ Y' \geqslant 0 \end{cases}$*, où il existe un indice* $i_0 \geqslant 1$ *tel que* $\begin{cases} \forall i \leqslant i_0, b'_i \geqslant 0 \\ \forall i > i_0, b'_i < 0 \end{cases}$.

Démonstration.

S'il existe des indices i tels que $b_i \geqslant 0$, il suffit de réordonner les lignes du système.

Si $\forall i \in \{1, ..., m\}, b_i < 0$ alors, comme A n'est pas à termes positifs, il existe (i,j) tels que $a_{\text{ij}} < 0$ il suffit de pivoter autour du terme en position (i,j) pour obtenir un système équivalent avec au moins une constante positive et de réordonner les lignes. □

Le système $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_{i_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_{i_0} \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$ définit un polyèdre (non vide).

6.3 6.2 Incrémentation

Théorème 22. *Résolution d'un système d'inéquations linéaires*

Soit le système d'inéquations linéaires $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$ *; l'application de l'algorithme du simplexe étendu (proposition 20) permet de déterminer s'il possède des solutions et, dans ce cas de décrire de manière paramétrique l'ensemble des solutions.*

Démonstration.

Le processus d'initialisation, fondé sur le lemme 21, permet de remplacer le système par un système équivalent de la forme $\begin{cases} \begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$, à une permutation des colonnes près, où les seconds membres b_1, b_2, ..., b_{i_0} sont positifs et les seconds membres b_{i_0+1}, b_{i_0+2}, ..., b_m sont strictement négatifs.

Désignons les lignes de ce système par $\begin{cases} L_1(X)+y_1=b_1 \\ L_2(X)+y_2=b_2 \\ ... \\ L_{i_0}(X)+y_{i_0}=b_{i_0} \\ L_{i_0+1}(X)+y_{i_0+1}=b_{i_0+1} \\ .... \\ L_m(X)+y_m=b_m \\ X\geqslant 0 \\ Y\geqslant 0 \end{cases}$, où $\forall i\in\{1, ..., i_0\}$ $b_i\geqslant 0$ et $\forall i\in\{i_0+1,...,m\}$ $b_i<0$.

Posons k$=i_0$ et tant que le système $\begin{cases} L_1(X)+y_1=b_1 \\ L_2(X)+y_2=b_2 \\ ... \\ ... \\ L_k(X)+y_k=b_k \\ X\geqslant 0 \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_k \end{pmatrix}\geqslant 0 \end{cases}$ est compatible et écrit sous forme standard positive et que k$\leqslant m-1$, nous appliquons l'algorithme du simplexe étendu qui étudie la compatibilité du système $\begin{cases} L_1(X)+y_1=b_1 \\ L_2(X)+y_2=b_2 \\ ... \\ ... \\ L_k(X)+y_{k+1}=b_{k+1} \\ X\geqslant 0 \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_{k+1} \end{pmatrix}\geqslant 0 \end{cases}$ et remplace en cas de compatibilité le système d'origine par le système équivalent $\begin{cases} L'_1(X')+y'_1=b'_1 \\ L'_2(X')+y'_2=b'_2 \\ ... \\ L'_k(X')+y'_k=b'_k \\ L'_{k+1}(X')+y'_{k+1}=b'_{k+1} \\ .... \\ L'_m(X)+y'_m=b'_m \\ X'\geqslant 0 \\ Y'\geqslant 0 \end{cases}$, dont les k+1 équations (où t$\geqslant$1) sont compatibles sous forme standard positive.

On regroupe en tête les inéquations dont le second membre est positif, il y en a au moins k+1 (en effet certains seconds membres strictement négatifs ont pu devenir positifs) et on recommence.

Si le système d'origine est compatible l'application de la méthode du simplexe fournit une expression équivalente sous la forme $\begin{cases} \begin{pmatrix} A' & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}=B' \\ X'\geqslant 0 \\ Y'\geqslant 0 \end{cases}$, où les composantes des inconnues X' et Y' sont celles de X et Y, à l'ordre près et B est positif. □

7 7. Trois exemples

7.1 7.1 Un système compatible (cas non borné)

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leqslant 6 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 \leqslant -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 \leqslant -5 \\ (x_1, x_2, x_3) \geqslant 0 \end{cases}$ qui est transformé en $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + y_1 = 6 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 + y_2 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + y_3 = -5 \\ (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{cases}$, qui s'écrira

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	6
-4	1	1	0	1	0	-1
3	-1	1	0	0	1	-5

1. La première constante est positive donc pas besoin d'initialisation.

2. On applique le test au système

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	B
1	-2	3	1	0	6
-4	1	1	0	1	-1

; -4 est le seul terme négatif parmi (-4,1,1) donc on considère sa colonne, où il y a un (seul) terme positif 1, donc on va pivoter autour de celui-ci

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	6
-4	1	1	0	1	0	-1
3	-1	1	0	0	1	-5

devient donc

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	6
0	-7	13	4	1	0	23
0	5	-8	-3	0	1	-23

.

3. On applique le test au système

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	6
0	-7	13	4	1	0	23
0	5	-8	-3	0	1	-23

; -8 est négatif on considère sa colonne 23/13 $<$ 6/3 donc c'est le terme 13 (deuxième ligne, troisième colonne) qui sera le pivot

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	6
0	-7	13	4	1	0	23
0	5	-8	-3	0	1	-23

va devenir

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	$-5/13$	0	$1/13$	$-3/13$	0	$9/13$
0	$-7/13$	1	$4/13$	$1/13$	0	$23/13$
0	$9/13$	0	$-7/13$	$8/13$	1	$-115/13$

.

On considère maintenant le terme -7/13 de la troisième ligne, quatrième colonne; comme 23/4<9/1 le pivot sera le terme de la deuxième ligne, quatrième colonne:

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	$-5/13$	0	$1/13$	$-3/13$	0	$9/13$
0	$-7/13$	1	$4/13$	$1/13$	0	$23/13$
0	$9/13$	0	$-7/13$	$8/13$	1	$-115/13$

devient

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	$-1/4$	$-1/4$	0	$-1/4$	0	$1/4$
0	$-7/4$	$13/4$	1	$1/4$	0	$23/4$
0	$-1/4$	$7/4$	0	$3/4$	1	$-23/4$

.

La deuxième colonne est négative donc le polyèdre défini par les deux premières inéquations est non borné et lorsque x_2 tend vers $+\infty$ on trouvera des points vérifiant la troisième inéquation d'où: nous pivotons autour du terme de la troisième ligne, deuxième colonne

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	$-1/4$	$-1/4$	0	$-1/4$	0	$1/4$
0	$-7/4$	$13/4$	1	$1/4$	0	$23/4$
0	$-1/4$	$7/4$	0	$3/4$	1	$-23/4$

devient

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	0	-2	0	-1	-1	6
0	0	-9	1	-5	-7	46
0	1	-7	0	-3	-4	23

Donc l'ensemble des solutions est paramétré comme suit

$$\begin{cases} x_1 = 6 + 2x_3 + y_2 + y_3 \\ x_2 = 46 + 9x_3 + 5y_2 + 7y_3 \\ y_1 = 23 + 7x_3 + 3y_2 + 4y_3 \end{cases}$$ sous les contraintes $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0$.

7.2 7.2 Un système compatible (cas borné)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \leqslant 3 \\ -x_1 + x_2 \leqslant -1 \\ -x_2 + x_3 \leqslant -1 \\ (x_1, x_2, x_3) \geqslant 0 \end{cases}$$ qui est transformé en $$\begin{cases} x_1 - x_3 + y_1 = 3 \\ -x_1 + x_2 + y_2 = -1 \\ -x_2 + x_3 + y_3 = -1 \\ (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{cases}$$, qui s'écrira

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	0	-1	1	0	0	3
-1	1	0	0	1	0	-1
0	-1	1	0	0	1	-1

.

1. La première constante est positive donc pas besoin d'initialisation.

2. On applique le test au système $\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & B \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$; -1 est le seul terme strictement négatif de la deuxième ligne donc on considère sa colonne, où il y a un (seul) terme positif 1, donc on va pivoter autour de celui-ci

D'où le tableau

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	0	-1	1	0	0	3
-1	1	0	0	1	0	-1
0	-1	1	0	0	1	-1

devient

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	0	-1	1	0	0	3
0	1	-1	1	1	0	2
0	-1	1	0	0	1	-1

.

3. On applique le test au système

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	0	-1	1	0	0	3
0	1	-1	1	1	0	2
0	-1	1	0	0	1	-1

: -1 est le seul terme strictement négatif de la troisième ligne donc on considère sa colonne, où il y a un (seul) terme positif 1, donc on va pivoter autour de celui-ci

D'où le tableau

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	0	-1	1	0	0	3
0	1	-1	1	1	0	2
0	-1	1	0	0	1	-1

va devenir

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	0	-1	1	0	0	3
0	1	-1	1	1	0	2
0	0	0	1	1	1	1

.

D'où l'ensemble des solutions est paramétrisable comme suit: $$\begin{cases} x_1 = 3 + x_3 + y_1 \\ x_2 = 2 + x_3 - y_1 - y_2 \\ y_1 = 1 - y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}$$ sous les contraintes $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0$

7.3 7.3 Un système incompatible

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leqslant 3 \\ -4x_1 + 5x_2 + x_3 \leqslant -3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 \leqslant -20 \\ (x_1, x_2, x_3) \geqslant 0 \end{cases}$$ qui est transformé en $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + y_1 = 3 \\ -4x_1 + 5x_2 + x_3 + y_2 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + y_3 = -20 \\ (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \geqslant 0 \end{cases}$$, qui s'écrira

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	3
-4	5	1	0	1	0	-3
3	-1	5	0	0	1	-20

.

1. Le premier second membre est positif, donc il n ' y a pas besoin d'initialisation.

2. On applique le test au tableau

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	B
1	-2	3	1	0	3
-4	5	1	0	1	-3

, le seul terme strictement négatif de la deuxième inéquation est -4 donc, comme au-dessus, le pivot sera le terme de la première ligne, première colonne; d'où

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	3
-4	5	1	0	1	0	-3
3	-1	5	0	0	1	-20

devient

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	3
0	-3	13	4	1	0	9
0	5	-4	-3	0	1	-29

.

3. Le premier terme strictement négatif de la troisième inéquation est -4, et 9/13<3/3 donc le pivot se fera autour du terme de la deuxième ligne, troisième colonne; d'où

.

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	-2	3	1	0	0	3
0	-3	13	4	1	0	9
0	5	-4	-3	0	1	-29

devient

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	$-17/3$	0	$1/13$	$-3/13$	0	$12/13$
0	$-3/13$	1	$4/13$	$1/13$	0	$9/13$
0	$53/13$	0	$-23/13$	$4/13$	1	$-341/13$

.

4. Le seul terme strictement négatif de la troisième inéquation est -23/13, et 9/4<12/1 donc le pivot se fera autour du terme de la deuxième ligne, quatrième colonne; d'où

.

x1	x2	x3	y1	y2	y3	B
1	-17/3	0	1/13	-3/13	0	12/13
0	-3/13	1	4/13	1/13	0	9/13
0	53/13	0	-23/13	4/13	1	-341/13

devient

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	B
1	$-5/4$	$1/4$	0	$-1/4$	0	$3/4$
0	$-3/4$	$13/4$	1	$1/4$	0	$9/4$
0	$11/4$	$23/4$	0	$3/4$	1	$-89/4$

d'où l'incompatibilité.

Remarque 23. Si au niveau de l'étape 3 on avait considéré la quatrième colonne au lieu de la troisième, l'algorithme aurait plus rapidement établi l'incompatibilité du système.

8 8. Comparaison avec l'algorithme (implicite) usuel

L'algorithme proposé ci-dessus se distingue de la démarche suggérée par la littérature existante en ceci qu'elle-ci traite les inéquations dont le second membre est strictement négatif par l'introduction de variables auxiliaires, augmentant ainsi à la fois la taille des tableaux et la complexité alors que cet algorithme recherche chaque fois que c'est nécessaire l'existence de valeurs positives de la restriction d'une fonction affine à un polyèdre.

9 9. Le cas général

Même si les contraintes de positivité sur les variables ont été d'une grande utilité elles ne constituent pas un cas particulier.

Considèrons le cas d'un système d'inéquations linéaires ..$\begin{cases} L_1(X) \leqslant b_1 \\ L_2(X) \leqslant b_2 \\ \dots \\ L_p(X) \leqslant b_p \end{cases}$ dans lequel les formes affines $(b_1 - L_1(X), \ldots, b_k - L_k(X))$ sont linéairement indépendantes et engendrent $(b_1 - L_1(X), \ldots,$ $b_p - L_p(X))$.

Si on pose $z_1 = b_1 - L_1(X),..,z_k = b_k - L_k(X), Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_k \end{pmatrix}$, les inéquations $L_{k+1}(X) \leqslant b_{k+1},..,L_p(X) \leqslant b_p$ se lisent $M_{k+1}(X) \leqslant \beta_{k+1}$,..,$M_p(X) \leqslant \beta_p$ et le système s'écrit $\begin{cases} M_{k+1}(Z) \leqslant \beta_1 \\ M_{k+2}(Z) \leqslant \beta_2 \\ \ldots \\ M_p(Z) \leqslant \beta_p \\ Z \geqslant 0 \end{cases}$.

Ce qui relève des cas étudiés au-dessus.

9.1 9. Complexité

Le problème de la complexité de la méthode du simplexe est complexe.

Il existe pour chaque technique de pivotage des exemples de complexité exponentielle; mais il est d'usage de dire que dans les cas habituels celle-ci est polynomiale.

Chaque application du test de compatibilité présente nécessairement une complexité inférieure car

i) contrairement au cas usuel de la méthode du simplexe qui nécessite deux phases, la première étant la recherche d'un sommet, ici nous partons de l'origine qui est nécessairement un sommet

ii) alors que l'objectif de la méthode du simplexe est la recherche du sommet où la fonction affine atteint son maximum, nous recherchons seulement un sommet où elle devient positive, le premier sommet où ce sera le cas nous convient.

Cela dit il faut, au plus, m applications d'où au total une complexité (au pire) exponentielle; mais les autres méthodes ne fournissent que des réponses partielles (compatiblité ou incompatiblité, et une solution), ou bien (dans le cas de la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin) possèdent une complexité de type doublement exponentiel.

10 10. Bornitude

10.1 10.1 Polyèdres bornés, point de vue algorithmique

Considérant le polyèdre défini par le système $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$, où $B \geqslant 0$, nous désirons établir s'il est borné.

Théorème 24. *([6])*

Le polyèdre défini par le système $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$ *, où* $B \geqslant 0$ *est borné si et seulement si* $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow X = 0$.

Théorème 25. *Un algorithme pour déterminer si un polyèdre est borné*

Soit le polyèdre défini par $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$ *, où* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \geqslant 0$.

L'application du test de compatiblité (propositions 12, 14 et 16, du paragraphe 5) au tableau $\begin{cases} \begin{pmatrix} A_{m-1} & I_{m-1} & 0 \\ L_m & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$ *où* $A = \begin{pmatrix} A_{m-1} \\ L_m \end{pmatrix}$*, permet de déterminer si le polyèdre est borné.*

Démonstration. Le sommet O du polyèdre défini par le système $\begin{cases} \begin{pmatrix} A_{m-1} & I_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ X \geqslant 0 \\ Y \geqslant 0 \end{cases}$ est dégénéré donc il sera nécessaire d'appliquer à chaque étape les règles de Bland; pour le reste il n'y a rien à ajouter: l'algorithme s'achèvera soit avec une colonne négative (cas non borné) soit avec la dernière ligne strictement positive (cas borné, puisque l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$ sera alors $\{0\}$). □

10.2 10.2 Polyèdres bornés, point de vue matriciel

Citons le théorème suivant, qui est une version du « lemme de Farkas »

Théorème 26. *[6]*

Soit le polyèdre défini par le système $\mathrm{PX} \leqslant 0$ *,où* $P \in \mathcal{M}_{\mathrm{mn}}(\mathbb{R})$ *de rang n et le vecteur C*

alors on a (de manière exclusive)

soit $\exists X, {}^t\mathrm{CX} > 0$ *et* $\mathrm{PX} \leqslant 0$

soit $\exists Z \geqslant 0$, ${}^tC = {}^t\mathrm{ZP}$

On en déduit le

Théorème 27.

Soit le polyèdre défini par le système $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$ *,où* $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{mn}}(\mathbb{R})$ *et le vecteur C*

Le polyèdre est borné si et seulement si il existe une matrice positive M telle que $\mathrm{MA} \geqslant I_n$.

Démonstration.

On pose $P = \begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix}$, la matrice P est nécessairement de rang n.

Le polyèdre défini par le système $\begin{cases} \mathrm{AX} \leqslant 0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$, c'est à dire est réduit à $\{0\}$ si et seulement si , pour chaque vecteur unité $C_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots 0 \end{pmatrix}$, le maximum de la fonction $X \longmapsto {}^t\mathrm{CX}$ est égal à 0; ce qui équivaut, d'après le théorème 26, à l'existence pour tout k$\in\{1, \ldots, n\}$ d'un vecteur $Y_k \geqslant 0$ tel que ${}^tY_k P = {}^tC_k$, c'est à dire à l'existence d'une matrice $Y \geqslant 0$ telle que $\mathrm{MP} = I_n$.

En raisonnant par blocs cette dernière égalité se lit $\begin{pmatrix} M & N \end{pmatrix} \geqslant 0$ telle que $\begin{pmatrix} M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix} = I_n$, c'est à dire MA-N=$I_n$, ou MA=$I_n$+N, c'est à dire, comme N⩾0, $\mathrm{MA} \geqslant I_n$. □

Bibliographie:

[1] http://www.csee.wvu.edu/~ksmani/courses/sp01/approx/qen/n2.pdf

[2] Narendra Karmarkar (1984). "A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming", Combinatorica, Vol 4, nr. 4, p. 373-395.

[3] http://www-math.mit.edu/~goemans/18433S09/ellipsoid.pdf

[4] R.G. Bland, Mathematics of Operations Research, vol.2 , N°2, 1977, 103-107.

[5] http://pageperso.lif.univ-mrs.fr/~denis.lugiez/Enseignement/Master1/RO/Cours/cours3.pdf.

[6] Cours de Robert Cori « Conception et Analyse d'Algorithmes » http://www.lix.polytechnique.fr/~cori/Majeure/poly.pdf