Le secret de Danilevsky et Faddeeva

Patrick Teller

Septembre 2023

1 Introduction

Dans son livre "Computational Methods of Linear Algebra" [2] qui, par ailleurs est très riche, V.N.Faddeeva décrit (pages 166-176) une méthode attribuée à Danilevsky [1] pour déterminer une matrice de la forme $\begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$, avec C matrice compagnon, semblable à une matrice M donnée. La détermination de C n'est pas évidente, étant donné que sa taille est inconnue, de même que la matrice de passage invoquée dans la similitude.

Le texte original est en Russe et date de 1937, je n'ai pu en trouver une traduction ; l'ouvrage de Faddeeva contient à partir de la matrice $M = (m_{i,j})$ une formule à exécuter plusieurs fois (une par colonne, pour certaines colonnes) sur la gauche de M :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & -m_{1,j}/m_{j,j} & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & & \\ 0 & .. & 1 & -m_{j-1,j}/m_{j,j} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 1/m_{j,j} & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & -m_{n,j}/m_{j,j} .. & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec son inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & m_{1,j} & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & & \\ 0 & .. & 1 & m_{j-1,j} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & /m_{j,j} & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ .. & .. & .. & m_{n,j} .. & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

à multiplier à droite.

Mais utilisera-t-on une telle matrice pour chaque valeur de j ? et dans quel ordre ? et surtout pourquoi ? Nous désignerons ces matrices du nom de matrices mystérieuses de V.N. Faddeeva.

Remarque: 1. *La définition de matrices compagnons adoptée par V.N.Faddeeva étant différente de celle à laquelle nous sommes habitués nous avons adapté les notations de l'article cité à nos conventions afin de ne pas égarer les lecteurs.*

2 Analyse

En fait la chose est simple M n'est pas forcément cyclique mais elle possède des sous-espaces stables, certains admettant une base de la forme $X, MX, ..., M^{p-1}X$ et tels que $X, MX, .., M^pX$ est liée ; relativement à cette base l'action de M consiste à avancer d'un élément jusqu'au p-ième. Encore faut-il connaître X. On peut décider de choisir X arbitrairement, on peut aussi choisir $X = e_1$, le premier vecteur de la base canonique ; c'est ce que nous ferons.

On peut décider de calculer directement les vecteurs $MX, M^2X, ..M^{p-1}X$, ce qui nous contraindrait à une matrice de passage P inesthétique et des calculs lourds pour déterminer son inverse P^{-1}, or les applications à venir nécessitent l'usage de P et P^{-1}. Nous verrons plus loin que l'usage des matrices mystérieuses de Danilevsky et Faddeeva permet des calculs d'une complexité bien moindre et des stockages en mémoire plus économiques.

Reste une question relative à p : peut-on connaître p a priori ? Non, sauf si on décide de calculer $MX, M^2X, ..M^kX, ..$, Mais nous avons décider de l'éviter.

3 Ce sera donc une démarche dynamique

Description naïve de la méthode : On désignera par C la matrice compagnon recherchée et par S la matrice inversible telle que $S^{-1}MS = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix}$.

Initialisation : S_1 : e_1,l'image de e_1 est donc M_1, d'où S_2 : M_1 ; puis S_3 sera égal à l'image de S_2,...,S_k sera égal à l'image de S_{k-1},...donc il y aura une "marche de concert" de S et de la matrice C censée représenter M.

Avant de continuer (ou de reprendre ..) mettons -nous d'accord sur des notations

Dans ce qui suit on notera la base canonique de K^n $(e_1, ..., e_n)$ et, si $Z = (Z_1, .., Z_n)$ est un n-uplet de vecteurs et Y un vecteur, la notation $Z_{k,Y}$ désignera le n-uplet $(Z_1, Z_2, .., Z_{k-1}, Y, Z_{k+1}, .., Z_n)$.

Le moment est arrivé d'interpréter les formules mystérieuses, ce qui nous aidera à comprendre les raisons de leur utilisation.

Définition 1. *Soit la base canonique $(e_1, .., e_n)$ et le vecteur* $V_i = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ .. \\ v_{i,i} \\ .. \\ v_{n,i} \end{pmatrix}$, *où $v_{i,i} \neq 0$, la matrice I_{i,V_i} sera appelée matrice de transvection.*

Lemme 1. *i) Les matrices de transvection sont inversibles*

ii) L'inverse de la matrice I_{i,V_i} est la matrice de transvection

$$I^{-1}_{i,V'_i} = (e_1, e_2, .., e_{i-1}, V'_i, e_{i+1}, .., e_n) \text{ où } V'_i = \begin{pmatrix} -v_1/v_i \\ -v_2/vi \\ .. \\ -v_{i-1}/v_i \\ 1/v_i \\ -v_{i+1}/vi \\ .. \\ -v_n/v_i \end{pmatrix}$$

iii) Quelle que soit la matrice N $NI_{i,V_i} = N_{V_i}$

Remarque: 2. *Donc bien que la présentation de V.N.Faddeeva semble centrée sur les matrices* I_{i,M'_i}*, en ne faisant appel à* I_{i,M_i} *que comme inverse, on voit qu'en réalité c'est la matrice* I_{i,M_i} *qui est utile et* I_{i,M'_i} *n'est là qu'à titre d'inverse.*

Quel retournement de situation !

4 Cette fois nous sommes prêts

Soit donc la matrice M que nous désirons transformer.

Nous désignerons à chaque changement de base par P la matrice de ce changement de base et par T l'état actuel de la matrice transformée, S désignera le changement de base global.

Initialisation : $P = I = (e_1, .., e_n)$, $T = (M_1, .., M_n)$, $S = I_n, k = 1$.
Tant que "$k < n$"
$P : P_{k+1,T_k}$,
tant que P inversible
$S : SP$,
$T = P_{k+1,T'_k} T P_{k+1,T_k}$,
$k : k + 1$

A l'arrivée la matrice T est de la forme demandée et le changement de base est S, qui est le produit consécutifs des matrices P rencontrées. On peut envisager une variante où seraient stockées en mémoire les couples (i, V_i), informations suffisantes pour rétablir les valeurs successives de P, de son inverse et de S et son inverse. Au lieu de p matrices, c'est-à-dire $p(n^2)$ éléments il suffirait de $p(n+1)$.

Pour plus de détails sur la complexité on pourra consulter [3]

5 Un exemple

Soit la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On pose $P = I = (e_1, .., e_4), T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S = I_4, k = 1$. Première Itération : P : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible

T : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

k : 2

Deuxième Itération :

Alors P : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est inversible

T : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

k : 3

Cette fois la matrice P serait $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Cette matrice n'est pas inversible, donc il faut arrêter là. La matrice désirée est atteinte. :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et la matrice de passage est S, qui est égale à

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

On pourra vérifier que $S^{-1}MS$ est bien égale à la valeur T obtenue.

Références

[1] A.M.Danilevsky, The numerical solution of the secular equation (Russe), Math. Sbornik 44,1937, n°2,p.169-171.

[2] V.N.Faddeeva, Computational Methods of Linear Algebra, Dover, 1959.

[3] ,P.Ozello, Calcul exact des formes de Jordan et Frobenius d'une matrice, Thèse, Modélisation et Simulation, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1987.