L'univers des matrices fractales-invitation

PATRICK TELLER

RÉSUMÉ.

Ceci est une invitation à découvrir l'univers des matrices fractales dont on découvrira le lien avec les matrices de Weyr.

Les matrices de Weyr sont un substitut, récemment redécouvert ([1],[2]), aux matrices de Jordan; de même que toute matrice nilpotente est semblable à une somme directe de blocs de Jordan nilpotents, toute matrice nilpotente est aussi semblable à une somme directe de blocs de Weyr nilpotents.

Contrairement au commutant d'une matrice en blocs de Jordan [2] qui possède une forme assez inconfortable le commutant d'une matrice en blocs de Weyr est un ensemble de matrices qui possèdent une forme intéressante, de type fractal.

Le premier paragraphe décrit l'ensemble $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ des matrices fractales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associées à une partition décroissante $(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ de n.

Le second rattache $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ à la matrice de Weyr $\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ en établissant que $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ est le commutant de $\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$; ce qui montre que $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ est une $\mathbb{K}-$Algèbre et que les matrices du commutant d'une matrice donnée sont simultanément trigonalisables par blocs.

Le troisième étudie l'ensemble des automorphismes de l'algèbre fractale F, ce qui conduit à la définition des matrices $\lambda-$fractales et de l'univers UF des matrices fractales.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos.

1. DES MATRICES FRACTALES

Ce texte est une invitation à une promenade dans l'univers des matrices fractales.

Voici un premier exemple de matrice fractale

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a & b & d & p & u & g & i & z & l & \mathrm{dd} & A \\ 0 & c & e & q & v & h & j & \mathrm{zz} & m & \mathrm{ee} & B \\ 0 & 0 & f & r & w & 0 & k & \mathrm{aa} & n & \mathrm{ff} & C \\ 0 & 0 & 0 & s & x & 0 & 0 & \mathrm{bb} & 0 & \mathrm{gg} & D \\ 0 & 0 & 0 & t & y & 0 & 0 & \mathrm{cc} & 0 & \mathrm{hh} & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & d & g & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & e & h & j & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & k & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

est une matrice fractale; elle est triangulaire supérieure par blocs, les tailles des blocs sont $\begin{pmatrix} 5\times 5 & 5\times 3 & 5\times 2 & 5\times 1 \\ \text{nulle} & 3\times 3 & 3\times 2 & 3\times 1 \\ \text{nulle} & \text{nulle} & 2\times 2 & 2\times 1 \\ \text{nulle} & \text{nulle} & \text{nulle} & 1\times 1 \end{pmatrix}$ et, si on les note $(M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1\ldots4\}^2}$ on voit que chaque bloc M_{ij} contient une copie de son successeur « en diagonale » $\mathrm{M}_{i+1 j+1}$.

De manière générale on définira comme suite les matrices fractale.

Définition 1. *Matrice fractale de partition* $(z_1,..,z_{t_1})$

Soit une partition (nécessairement décroissante au sens large) $(z_1,..,z_{t_1})$ *de* n*, une matrice* $M\in\mathcal{M}_n(K)$ *sera dite fractale de partition* $(z_1,..,z_{t_1})$ *lorsque* $M=(M_{i,j})$ *où* $M_{i,j}\in\mathcal{M}_{z_i,z_j}(K)$ *et* $\forall (i,j)$ $i>j \Longrightarrow M_{i,j}=0$, $i\leqslant j \Longrightarrow M_{i,j}=\begin{pmatrix} M_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

On appellera bande supérieure la matrice $(M_{11}, M_{12}, ..., M_{1t_1})$*; une matrice fractale est déterminée par sa bande supérieure.*

On désignera par $F(z_1,..,z_{t_1})$ *l'ensemble des matrices fractales de partition* $(z_1,..,z_{t_1})$.

Théorème 2.

$F(z_1,..,z_{t_1})$ *est un K-espace vectoriel de dimension* ${z_{t_1}}^2+{z_{t_1-1}}^2+\ldots+{z_1}^2$

Démonstration.

C'est un espace vectoriel de manière évidente; la dimension sera déterminée par la bande supérieure:

$z_{t_1}(z_{t_1}-0)+z_{t_1-1}(z_{t_1-1}-z_{t_1})+....+\mathrm{z}_1(z_1-z_2)$ pour M_{11}

$\mathrm{z}_{t_1-1}(z_{t_1}-0)+z_{t_1-2}(z_{t_1-1}-z_{t_1})+....+\mathrm{z}_1(z_2-z_3)$ pour M_{12}

......

$\mathrm{z}_1(z_{t_1-1}-z_{t_1})$ pour M_{1n}

d'où au total (en additionnant suivant les diagonales sud-ouest->nord-est)

${\mathrm{z}_{t_1}}^2+{\mathrm{z}_{t_1-1}}^2+\ldots+{\mathrm{z}_1}^2$ □

En fait $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,z_{t_1})$ n'est pas seulement un espace vectoriel c'est une Algèbre comme nous allons le démontrer.

Pour cela nous allons définir la matrice de Weyr associée à la partition $(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$: $\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$

Définition 3. *La matrice* $W(z_1,..,z_{t_1})$ *associée à la partition* $(z_1,..,z_{t_1})$

Soit $W=(W_{i,j})$ *où le bloc* $W_{i,j}\in\mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{K})$*, où* $W_{i,i+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(\mathbb{K})$ *(attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et si* $j\neq i+1$ $W_{i,j}=0$.

$$W=\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & ... & ...0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & ... & .... \\ ... & ... & ... & ... & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice de Weyr associée à cette partition.

Théorème 4. *Le commutant de W(z_1,..,z_{t_1})*
(par la suite on écrira W lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur la partition concernée)

Soit une matrice A=$(A_{i,j})$, AW=WA si et seulement si
$\forall(i,j)$,
1. i>j $\Longrightarrow A_{i,j}=0$
2. i$\leqslant j$ $A_{i,j}=\begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

C'est à dire: le commutant de W est F(z_1,..,z_{t_1}) et cet ensemble de matrices est une Algèbre.

Démonstration.
Soit A=$(A_{i,j})$ découpée en blocs comme W, AW=WA $\Longleftrightarrow\forall(i,\ j)A_{i,j}W_{j,j+1} = W_{i,i+1}A_{i+1,j+1}$.

1ère étape: étude des blocs sous la diagonale principale.

Soit j<t_1, 0=$W_{j,j+1}A_{j+1,1}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_{j+1,1}$=0, c'est à dire $\forall j+1>1$, $A_{j+1,1}$=0.

Soit 1<j<t_1 $A_{j,1}$,$W_{1,2}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,2}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,2}$=0, c'est à dire $\forall j+1>2$, $A_{j+1,2}$=0 et ainsi de suite, ce qui entraîne que A est triangulaire supérieure par blocs.

2 ème étape: étude des blocs de la diagonale principale.
Soit j<t_1 $A_{j,j}W_{j,j+1}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,j+1}$ alors
si $z_j=z_{j+1}$ $W_{j,j+1}$=I_{z_j} et donc $A_{j,j}$=$A_{j+1,j+1}$
si z_j>z_{j+1} et si on pose $A_{j,j}$=$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$ alors $A_{j,j}W_{j,j+1}$=$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$ et $W_{j,j+1}A_{j+1,j+1}$=$\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,j+1}$=$\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $A_{j,j}$=$\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.
D'où la diagonale principale de blocs de la matrice A.

3ème étape: au-dessus de la diagonale de blocs
soit j<k<t_1 $A_{j,k}W_{k,k+1}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,k+1}$, qui conduit à un résultat analogue $A_{j,k}$=$\begin{pmatrix} A_{j+1,k+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.
Dans les trois cas la réciproque est immédiate.
Donc F(z_1,..,z_{t_1}) est le commutant de W(z_1,..,z_{t_1}) et c'est une Algèbre, on l'appellera l'Algèbre des matrices fractales de partition associée (z_1,..,z_{t_1}).

Remarquons que, comme ${}^t\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \end{pmatrix}$, ${}^tW_{i,i+1}A_{ij}W_{j,j+1}$=$A_{i+1,j+1}$. □

Proposition 5.
Soit $A\in$ F(z_1,..,z_{t_1}), si A est une matrice inversible A^{-1}appartient à F(z_1,..,z_{t_1}).

Démonstration.
Il suffit de remarquer que si AW=WA et A inversible alors $A^{-1}W=\mathrm{W}A^{-1}$. □

2. Les matrices de Weyr

La forme de Jordan d'une matrice nilpotente est bien connue:

toute matrice nilpotente peut se mettre sous la forme $\Gamma=\begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$, où les indices forment une suite décroissante $t_1 \geqslant t_2 \geqslant .... \geqslant t_p$ et pour chaque k J(t_k)=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & .... & ... & 0 \\ .... & ... & .... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{t_k}(\mathbb{K})$; on conviendra de poser t_0=0.

La suite (t_i) sera appelée partition canoniquement associée à Γ.

Proposition 6. *Un ordre sur la base canonique*

Soit la base canonique $\mathcal{C}$ *de* $\mathbb{K}^n$ *dont on désignera les éléments* $(e_1, ..., e_n)$ *sous la forme* $e_{i,k}$ *de la manière suivante:* $e_{i,k}$ *représente* $e_{t_0+....+t_{i-1}+k}$.

On dira que $e_{i,k} \leqslant e_{j,l}$ *lorsque k<l ou k=l et i⩽j*

Ce qui se traduit par une suite croissante $\mathcal{C}'=(e_{1,1}, e_{2,1}, ..., ...)$

Remarque 7. Il s'agit tout simplement d'un ordre lexicographique; on écrira (i,j)$\prec(k, l)$

Proposition 8. *Interprétation de la matrice* Γ *et construction de la matrice W*

On considère la matrice Γ décrite au-dessus et la base canonique (e_i), l'action de Γ sur la base peut se lire comme suit:

$$\begin{array}{l} 0 \longleftarrow e_{p,1} \longleftarrow e_{p,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{p,t_p} \\ 0 \longleftarrow e_{p-1,1} \longleftarrow e_{p-1,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{p-1,t_{p-1}} \\ ..... \\ 0 \longleftarrow e_{1,1} \longleftarrow e_{1,2} \longleftarrow .... \longleftarrow ...... \qquad\qquad \longleftarrow e_{1,t_1} \end{array}$$

Tableau 1.

Posons z_1=p,z_2=card($\{k, \ t_k \geqslant 2\}$), $z_3 = $ card($\{k, \ t_k \geqslant 3\}$),...,z_{t_1} (on conviendra de poser z_{t_1+1}=0), la suite (z_u) est décroissante, elle sera désignée sous le nom de partition canoniquement associée à W.

Déterminons la matrice qui représente la même application relativement à la base $\mathcal{C}'$.

Parcourir la base $\mathcal{C}'$ dans l'ordre revient à parcourir le tableau, colonne après colonne du bas vers le haut et de la gauche vers la droite; alors

1) les z_1 premiers vecteurs ont pour image 0 d'où les z_1 premières colonnes sont nulles.

2) les z_2 suivants ont leur image dans le même ordre parmi les z_1 premiers.

etc...

La matrice Γ devient alors la matrice (par blocs) W=$(W_{i,j})$ où le bloc $W_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{K})$. Le tableau implique que $\forall i \in \{1, ..., t_p - 1\}$ $W_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(\mathbb{K})$ (attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et si $j \neq i+1$ $W_{i,j}$=0.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & ... & ...0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & ... & .... \\ ... & ... & ... & ... & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$$ est appelée la matrice de Weyr associée à cette partition.

Remarque 9. Cette présentation de la forme de Weyr reprend le chemin totalement empirique qui m'a fait la découvrir; on peut bien entendu définir cette forme de manière indépendante de la forme de Jordan.

On lira dans [1] l'histoire de la redécouverte de cette forme matricielle longtemps oubliée et une description de cette forme, indépendamment des matrices de Jordan.

Exemple 10.

$$\text{Soit } \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & ... & . & ... \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ...... & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & ... \\ & & & & 0 & 1 & 0 & ... \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & ... & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(4) & 0 & \\ 0 & J(3) & \\ 0 & ... & J(1) \end{pmatrix}$$

On obtient $W=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 & 0 & . \\ ... & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 & ... \\ 0 & . & ... & ... & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \\ & & & & ... & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & \boxed{1} \\ & & & & & ... & 0 & \boxed{0} \\ 0 & .... & . & ... & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition 11. *Les puissances de W*

Soit pour tout u⩾v $N_{u,v}=\begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{u,v}(K)$.

$W=\begin{pmatrix} 0 & N_{z_1,z_2} & 0 & .. & ... \\ 0 & 0 & N_{z_2,z_3} & ... & ... \\ ... & .... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & N_{z_{t_1-1},z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$

$W^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & N_{z_1,z_3} & 0 & .. & ... \\ . & 0 & 0 & N_{z_2,z_4} & ... & ... \\ ... & ... & .... & 0 & ... & ... \\ .... & ... & ... & ... & ... & N_{z_{t_1-2},z_{t_1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & .... \\ 0 & ... & ... & & ...... & 0 \end{pmatrix}$

...

$W^k=\begin{pmatrix} 0 & .... & 0 & N_{z_1,z_{1+k}} & 0 & .. & ... \\ .... & ... & 0 & 0 & N_{z_2,z_{2+k}} & ... & ... \\ ... & ... & ... & .... & 0 & ... & ... \\ .... & ... & ... & ... & ... & ... & N_{z_{t_1-k},z_{t_1}} \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & ... \\ & & & & & & ... \\ 0 & 0 & ... & & .... & .... & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $N_{u,v}N_{v,w}=N_{u,w}$ □

Proposition 12. *Une simple propriété des matrices* $N_{u,v}=\begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{K})$

Si $M\in\mathcal{M}_{\mathrm{tu}}(\mathbb{K})$ $MN_{u,v}$ *est la matrice* M*, privée de ses u-v dernières colonnes,*

i) l'application $M\longmapsto MN_{u,v}$ *est une surjection de* $\mathcal{M}_{t,u}(\mathbb{K})$ *sur* $\mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{K})$

ii) l'application $M\longmapsto N_{u,v}M=\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une injection de* $\mathcal{M}_{v,t}(\mathbb{K})$ *dans* $\mathcal{M}_{u,t}(\mathbb{K})$

3. Une propriété ignorée

Théorème 13. *La trigonalisabilité par blocs du commutant d'une matrice de Weyr*

Soit la matrice W(z_1,..,z_{t_1}) l'ensemble des matrices commutant avec W est simultanément trigonalisable par blocs.

Théorème 14. *La trigonalisabilité par blocs du commutant*

Comme toute matrice (dans le cas d'un corps algèbriquement clos) est semblable à une somme directe de matrices de Jordan, donc ausssi de matrices de Weyr, la trigonalisabilité simultanée (par blocs) sera vraie pour le commutant d'une matrice quelconque à coefficients dans un tel corps.

Il est surprenant que cette propriété soit si peu explicitée. [1],[2].

4. Quelques outils pour l'etude de F(z_1,..,z_{t_1})

Soit une matrice de Weyr W(z_1,..,z_{t_1})

Définition 15. *Réduction d'ordre k d'une matrice de F(z_1,..,z_{t_1})*
Soit une matrice M=($M_{i,j}$) de F(z_1,..,z_{t_1}) on désignera sous le nom de réduite d'ordre k la matrice M_k=$(M_{i,j})_{i\geqslant k, j\geqslant k}$.
.

Proposition 16. *Expression algébrique de la réduction*
Soit une matrice M=($M_{i,j}$) de F(z_1,..,z_{t_1}), ${}^t W^k \mathrm{M} \mathrm{W}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{k+1} \end{pmatrix}$

Démonstration.
Il suffit d'établir le résultat pour k=1, ce qui se fait en appliquant la relation ${}^t W_{i,i+1} A_{\mathrm{ij}} W_{j,j+1} = A_{i+1,j+1}$. □

5. Quelques Propriétés des algebres de matrices fractales

On considère ici une matrice de Weyr W=W(z_1,..,z_{t_1}) et l'algèbre F=F(z_1,..,z_{t_1}).

Proposition 17. *L'idéal WF*

L'ensemble WF=$\{W\mathbb{M}, M \in F\}$ est un idéal (bilatère).

Démonstration.
découle du fait que F est le commutant de W. □

Proposition 18. *Les inverses des éléments de F*
Soit $M \in F \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *alors* $M^{-1} \in F$

Démonstration.
Si M commute avec W et est inversible, son inverse commute avec W. □

6. Les automorphismes de l'algebre F

Définition 19. *Domaine admissible, Classes, Espace admissible, Origines et Extrémités*

Nous allons considérer les matrices fractales comme des éléments de $\mathbb{K}^{n^2}$, dont la structure est celle de matrices triangulaires par blocs, en rapport avec la partition associée.

On pourra repérer sur l'exemple suivant que les cases marquéees d'un zéro sont nécessairement nulles, tandis que les cases dotées de lettres **peuvent** être de valeur non nulle (ou pas); on les appellera admissibles.

On appellera « domaine admissible» l'ensemble des cases admissibles (DA); si M est une matrice fractale ses termes non nuls se trouvent dans le domaine admissible.

On remarquera aussi que pour chaque matrice fractale certaines cases doivent porter la même valeur, ce qui définit une relation d'équivalence parmi les cases du domaine admissible (par exemple ligne1-colonne1 avec ligne 5-colonne5 et ligne9-colonne9 dans la matrice de l'exemple ci-dessous); les classes seront appelées « paquets », elles constituent une base de F.

Théorème 20. *Le groupe des automorphismes de F*

Les automorphismes de F sont les applications de la forme $A \longmapsto \mathrm{PAP}^{-1}$ *où P décrit l'univers fractal.*

Définition 21. *Matrices* λ*-fractales*

Soit λ *un scalaire une matrice M sera dite* $\lambda -$ *fractale lorsque* $MW{=}\lambda\mathrm{WM}$*; on désigne par* F_λ *l'ensemble des matrices* $\lambda - \mathrm{fractales}$ *et par UF (l'univers fractal) la réunion des* F_λ*.*

Vue la lourdeur des notations il me semble plus efficace d'étudier (d'abord) les automorphismes de l'algèbre F dans un cas particulier

Exemple 22.

Considérons cet exemple où F est l'ensemble des matrices du type suivant:

$$\mathrm{M}{=}\begin{pmatrix} a & b & d & g & i & l \\ 0 & c & e & h & j & m \\ 0 & 0 & f & 0 & k & n \\ 0 & 0 & 0 & a & b & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots\ldots\ldots;$$

les trois premières sont des matrices de projection (sur les sous-espaces supplémentaires Vect$(e_1 + e_4 + e_6)$, Vect$(e_2 + e_5)$ et Vect(e_3)), les autres envoient des sous-espaces engendrés par une sous-famille de la base canonique sur d'autres sous espaces de même type.

Nous adopterons la notation $\mathrm{Q}_{i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k}$ pour désigner la matrice Q telle que $\forall\alpha \in \{1\ldots k\} Q(e_{j_\alpha}) = e_{i_\alpha}$ et $\forall\alpha \notin \{1\ldots k\} Q(e_{j_\alpha}) = 0$; suivant cette définition nous noterons $Q_{1,4,6;1,4,6}$, $\mathrm{Q}_{2,5;2,5}$ et $\mathrm{Q}_{3;3}$ les trois projecteurs.

Ces définitions entraînent les relations suivantes: soient I=$\{i_1, \ldots., i_k\}$,J=$\{j_1, \ldots., j_k\}$, S=$\{s_1, \ldots., s_m\}$, U=$\{u_1, \ldots., u_m\}$ alors $Q_{I;J} Q_{S;U} = Q_{I';U'}$ où I' et U' sont définis comme suit :

si $J \cap S = \varnothing$,I'=U'=$\varnothing$

si $J \cap S = \{j_{p_1}, \ldots, j_{p_r}\}$=$\{s_{t_1}, \ldots, s_{t_r}\}$, I'=$\{i_{j_{p_1}}, \ldots, i_{j_{p_r}}\}$ et U'=$\{u_{s_{t_1}}, \ldots, u_{s_{t_r}}\}$.

Ci-dessous une base de F:

trois idempotents de rangs respectifs 3,2,1: $Q_{1,4,6;1,4,6}$, $\mathrm{Q}_{2,5;2,5}$ et $Q_{3;3}$

deux nilpotents d'ordre 2 et de rang 2: $\mathrm{Q}_{1,4;2,5}$ et $\mathrm{Q}_{2,5;4,6}$

un nilpotent d'ordre 3 et de rang 2: $\mathrm{Q}_{1,4;4,6}$

et huit nilpotents d'ordre 1 et de rang 1: $\mathrm{Q}_{1;3}$ $\mathrm{Q}_{2;3}$ $\mathrm{Q}_{1;5}$ $\mathrm{Q}_{2;5}$ $\mathrm{Q}_{3;5}$ $\mathrm{Q}_{1;6}$ $\mathrm{Q}_{2;6}$ $\mathrm{Q}_{3;6}$

et M s'écrit a$Q_{1,4,6;1,4,6}$+c$\mathrm{Q}_{2,5;2,5}$+f$Q_{3;3}$

+b$\mathrm{Q}_{1,4;2,5}$+d$\mathrm{Q}_{1;3}$+e$\mathrm{Q}_{2;3}$+g$\mathrm{Q}_{1,4;4,6}$+h$\mathrm{Q}_{2,5;4,6}$+i$\mathrm{Q}_{1;5}$+j$\mathrm{Q}_{2;5}$+k$\mathrm{Q}_{3;5}$+l$\mathrm{Q}_{1;6}$+m$\mathrm{Q}_{2;6}$+n$\mathrm{Q}_{3;6}$.

De même W=$\mathrm{Q}_{1,4;4,6}$+$\mathrm{Q}_{2;5}$ et $\mathrm{W}^\circ{}_{\mathrm{Q}_{1,4,6;1,4,6}}$=$\mathrm{Q}_{1,4;4,6}$ qui est donc nilpotente d'ordre 3 avec une seule orbite.

1. Montrons que les automorphismes de F sont des conjugaisons.

Considérons l'automorphisme φ de l'algèbre F et désignons par un « ' » les images des éléments de la base de F par φ; en particulier $\mathrm{Q'}_{1,4;4,6}$ est nilpotent d'ordre 3, soit donc $\mathrm{e'}_6$ tq $\mathrm{Q'}^2_{1,4;4,6}(\mathrm{e'}_6)$ est non nul, posons $e'_4 = \mathrm{Q'}_{1,4;4,6}(\mathrm{e'}_6)$ et e'_1=$\mathrm{Q'}^2_{1,4;4,6}(\mathrm{e'}_6)$, puis $\mathrm{e'}_3$=$\mathrm{Q'}_{3;6}(\mathrm{e'}_6)$, $\mathrm{e'}_2$=$\mathrm{Q'}_{2;5}(\mathrm{e'}_5)$ et $\mathrm{e'}_5$=$\mathrm{Q'}_{2;5;4,6}(\mathrm{e'}_6)$.

Par ailleurs, comme e'$_1$=Q'$_{1;6}$(e'$_6$) alors, comme φ est un morphisme, e'$_1$=Q'$_{1;2}$(e'$_2$), d'où e'$_2$ n'est pas nul (on raisonne de même pour e'_3 et e'$_5$); comme ces e'$_k$ ne sont pas nuls, on peut déduire, en composant par les bonnes matrices, que si $\sum_{k=1}^{6} \lambda_k e'_k = 0$, $\lambda_1 = ... \doteq \lambda_6 = 0$; ce qui permet de montrer que c'est une base.

Désignons par T la matrice telle que $\forall k$ T(e$_k$)=e'$_k$, comme les e'_k forment une base T est inversible et on vérifie que pour tout I,J TQ$_{\mathrm{IJ}}$=Q'$_{\mathrm{IJ}}$T; ce qui est immédiat.

Donc l'automorphisme φ est la conjugaison par T.

2. Mais que savons-nous de T ?

Comme φ est l'application M $\longmapsto$TMT^{-1} l'image par φ de tout élément de F est un élément de même rang et de même ordre de nilpotence.

i) détermination de φ(Q$_{1,4,6;1,4,6}$):

ce sera un élément de F, idempotent de rang 3, il n'y en a qu'un c'est Q$_{1,4,6;1,4,6}$

ii) détermination de φ(Q$_{2,5;2,5}$):

ce sera un élément de F, idempotent de rang 2, il n'y en a qu' un c'est Q$_{2,5;2,5}$.

iii) détermination de φ(Q$_{3;3}$):

ce sera un élément de F, idempotent de rang 1, il n'y en a qu' un c'est Q$_{3;3}$

d'où φ(Q$_{1,4,6;1,4,6}$)=Q$_{1,4,6;1,4,6}$;φ(Q$_{2,5;2,5}$)=Q$_{2,5;2,5}$ et φ(Q$_{3;3}$)=Q$_{3;3}$.

iv) détermination de φ(Q$_{1,4;4,6}$):

ce sera un élément de F, nilpotent d'ordre 3, de rang 2 et Q$_{1,4;4,6}$Q$_{1,4,6;1,4,6}$=Q$_{1,4,6;1,4,6}$Q$_{1,4;4,6}$=Q$_{1,4;4,6}$ d'où φ(Q$_{1,4;4,6}$)=λQ$_{1;4}$+$\lambda' Q_{4;6}$, mais la forme des éléments de F impose $\lambda = \lambda'$.

v) de même Q$_{2,5;2,5}$Q$_{2;5}$=Q$_{2;5}$Q$_{2,5;2,5}$=Q$_{2;5}$ qui est nilpotente d'ordre 2 et de rang 1, d'où φ(Q$_{2;5}$)=μQ$_{2;5}$.

Donc $\varphi(W) = \lambda$Q$_{1,4;4,6}$+μQ$_{2;5}$. (*)

Mais comme φ est un automorphisme de l'algèbre F, $\varphi(F)$=F et, comme W commutait avec les éléments de F, $\varphi(W)$ commute avec les éléments de $\varphi(F) = F$ et d'après le théorème du bicommutant $\varphi(W)$ appartient à $\mathbb{K}[I, W]$, d'où, compte tenu de (*), $\varphi(W) = \lambda W$ (et donc $\lambda = \mu$), c'est à dire TWT^{-1}=λW.

Donc T est une matrice $\lambda -$fractale.

Réciproquement soit T une matrice telle que TWT^{-1}=λW, alors quel que soit M de F TMT^{-1}W − WTMT^{-1} = T(MT^{-1}WT − T^{-1}WTM)T^{-1} = $T(M\lambda^{-1}W - \lambda^{-1}$WM)$T^{-1}$=0 ce qui établit que TMT^{-1} appartient à F.

Donc les automorphismes de F sont les applications de la forme M$\longmapsto$TMT^{-1} où T est une matrice inversible de l'univers UF.

Théorème 23. *L'ensemble des matrices inversibles de l'univers fractal UF est un groupe.*

Démonstration.

MW=λ*WM et NW*=μWN $\Longrightarrow$MNW = $\lambda\mu$WMN *et det(MN)=det(M)det(N).* □

Paris, Septembre 2018

Bibliographie:

[1] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.

[2] P. Teller, http://lalgebrisant.fr/images/MatricesCommutantes/LeCommutantesttrigonalisable.pdf