L'univers des matrices fractales-invitation

PATRICK TELLER

RÉSUMÉ.

Ceci est une invitation à découvrir l'univers des matrices fractales dont on découvrira le lien avec les matrices de Weyr.

Les matrices de Weyr sont un substitut, récemment redécouvert ([1],[2]), aux matrices de Jordan; de même que toute matrice nilpotente est semblable à une somme directe de blocs de Jordan nilpotents, toute matrice nilpotente est aussi semblable à une somme directe de blocs de Weyr nilpotents.

Contrairement au commutant d'une matrice en blocs de Jordan [2] qui possède une forme assez inconfortable le commutant d'une matrice en blocs de Weyr est un ensemble de matrices qui possèdent une forme intéressante, de type fractal.

Une première partie décrit l'ensemble $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ des matrices fractales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associées à une partition décroissante $(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ de n.

Une deuxième partie rattache $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ à la matrice de Weyr $\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ en établissant que $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ est le commutant de $\mathrm{W}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$; ce qui montre que $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ est une $\mathbb{K}-$ Algèbre et que les matrices du commutant d'une matrice donnée sont simultanément trigonalisables par blocs.

La troisième partie étudie l'ensemble des automorphismes de l'algèbre fractale F, ce qui conduit à la définition des matrices $\lambda-$ fractales et de l'univers UF des matrices fractales.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos.

1. DES MATRICES FRACTALES.

Ce texte est une invitation à une promenade dans l'univers des matrices fractales.

Voici un premier exemple de matrice fractale

M=$\begin{pmatrix} a & b & d & p & u & g & i & z & l & \mathrm{dd} & A \\ 0 & c & e & q & v & h & j & \mathrm{zz} & m & \mathrm{ee} & B \\ 0 & 0 & f & r & w & 0 & k & \mathrm{aa} & n & \mathrm{ff} & C \\ 0 & 0 & 0 & s & x & 0 & 0 & \mathrm{bb} & 0 & \mathrm{gg} & D \\ 0 & 0 & 0 & t & y & 0 & 0 & \mathrm{cc} & 0 & \mathrm{hh} & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & d & g & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & e & h & j & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & k & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est une matrice fractale; elle est triangulaire supérieure par blocs, les tailles des blocs sont $\begin{pmatrix} 5\times 5 & 5\times 3 & 5\times 2 & 5\times 1 \\ \text{nulle} & 3\times 3 & 3\times 2 & 3\times 1 \\ \text{nulle} & \text{nulle} & 2\times 2 & 2\times 1 \\ \text{nulle} & \text{nulle} & \text{nulle} & 1\times 1 \end{pmatrix}$ et, si on les note $(M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1\ldots4\}^2}$ on voit que chaque bloc M_{ij} contient une copie de son successeur « en diagonale » M_{i+1j+1}.

De manière générale on définira comme suite les matrices fractale.

Définition 1. *Matrice fractale de partition* $(z_1,..,z_{t_1})$

Soit une partition (nécessairement décroissante au sens large) $(z_1,..,z_{t_1})$ *de n, une matrice* $M\in\mathcal{M}_n(K)$ *sera dite fractale de partition* $(z_1,..,z_{t_1})$ *lorsque* $M=(M_{i,j})$ *où* $M_{i,j}\in\mathcal{M}_{z_i,z_j}(K)$ *et* $\forall(i,j)\ i>j \Longrightarrow M_{i,j}=0,\ i\leqslant j\Longrightarrow M_{i,j}=\begin{pmatrix} M_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

On appellera bande supérieure la matrice $(M_{11}, M_{12}, \ldots., M_{1t_1})$*; une matrice fractale est déterminée par sa bande supérieure.*

On désignera par $F(z_1,..,z_{t_1})$ *l'ensemble des matrices fractales de partition* $(z_1,..,z_{t_1})$.

Exemple 2.

Soit la partition (3,3,2)

Les matrices fractales associées à cette partition sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & e & h & k & u & p & x \\ c & d & f & i & l & v & q & y \\ 0 & 0 & g & j & m & w & r & z \\ 0 & 0 & 0 & a & b & e & h & k \\ 0 & 0 & 0 & c & d & f & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & j & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

Théorème 3.

$F(z_1,..,z_{t_1})$ *est un K-espace vectoriel de dimension* $z_{t_1}^2+z_{t_1-1}^2+\ldots+z_1^2$

Démonstration.

C'est un espace vectoriel de manière évidente; la dimension sera déterminée par la bande supérieure:

$z_{t_1}(z_{t_1}-0)+z_{t_1-1}(z_{t_1-1}-z_{t_1})+\ldots.+\mathrm{z}_1(z_1-z_2)$ pour M_{11}

$\mathrm{z}_{t_1-1}(z_{t_1}-0)+z_{t_1-2}(z_{t_1-1}-z_{t_1})+\ldots.+\mathrm{z}_1(z_2-z_3)$ pour M_{12}

......

$\mathrm{z}_1(z_{t_1-1}-z_{t_1})$ pour M_{1n}

d'où au total (en additionnant suivant les diagonales sud-ouest->nord-est)

$\mathrm{z}_{t_1}^2+\mathrm{z}_{t_1-1}^2+\ldots+\mathrm{z}_1^2$ □

En fait $\mathrm{F}(\mathrm{z}_1,..,\mathrm{z}_{t_1})$ n'est pas seulement un espace vectoriel c'est une Algèbre comme nous allons le démontrer.

Pour cela nous allons définir la matrice de Weyr associée à la partition ($z_1,..,z_{t_1}$): W($z_1,..,z_{t_1}$)

Définition 4. *La matrice W($z_1,..,z_{t_1}$) associée à la partition ($z_1,..,z_{t_1}$)*

Soit $W=(W_{i,j})$ *où le bloc* $W_{i,j}\in\mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{K})$*, où* $W_{i,i+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}\in$ $\mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(\mathbb{K})$ *(attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et si* $j\neq i+1$ $W_{i,j}=0$.

$W=\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & ... & ...0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & ... & .... \\ ... & ... & ... & ... & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ *est appelée la matrice de Weyr associée à cette partition.*

Théorème 5. *Le commutant de W($z_1,..,z_{t_1}$)*
(par la suite on écrira W lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur la partition concernée)

Soit une matrice A=$(A_{i,j})$, AW=WA si et seulement si
$\forall(i,j)$,
1. i>j $\Longrightarrow A_{i,j}=0$
2. $i\leqslant j$ $A_{i,j}=\begin{pmatrix} A_{i+1,j+1} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

C'est à dire: le commutant de W est F($z_1,..,z_{t_1}$) et cet ensemble de matrices est une Algèbre.

Démonstration.
Soit A=($A_{i,j}$) découpée en blocs comme W, AW=WA $\Longleftrightarrow\forall(i,\ j)A_{i,j}W_{j,j+1}=W_{i,i+1}A_{i+1,j+1}$.

1ère étape: étude des blocs sous la diagonale principale.

Soit j<t_1, 0=$W_{j,j+1}A_{j+1,1}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}$ $A_{j+1,1}$=0, c'est à dire $\forall j+1>1$, $A_{j+1,1}$=0.

Soit 1<j<t_1 $A_{j,1}$,$W_{1,2}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,2}$, d'où $\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,2}$=0, c'est à dire $\forall j+1>2$, $A_{j+1,2}$=0 et ainsi de suite, ce qui entraîne que A est triangulaire supérieure par blocs.

2 ème étape: étude des blocs de la diagonale principale.

Soit j<t_1 $A_{j,j}W_{j,j+1}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,j+1}$ alors

si $z_j=z_{j+1}$ $W_{j,j+1}$=I_{z_j} et donc $A_{j,j}$=$A_{j+1,j+1}$

si z_j>z_{j+1} et si on pose $A_{j,j}$=$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$ alors $A_{j,j}W_{j,j+1}$=$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$ et $W_{j,j+1}A_{j+1,j+1}$=$\begin{pmatrix} I_{z_{j+1}} \\ 0 \end{pmatrix}A_{j+1,j+1}$=$\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $A_{j,j}$=$\begin{pmatrix} A_{j+1,j+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.

D'où la diagonale principale de blocs de la matrice A.

3ème étape: au-dessus de la diagonale de blocs

soit j<k<t_1 $A_{j,k}W_{k,k+1}$=$W_{j,j+1}A_{j+1,k+1}$, qui conduit à un résultat analogue $A_{j,k}$=$\begin{pmatrix} A_{j+1,k+1} & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$.

Dans les trois cas la réciproque est immédiate.

Donc F($z_1,..,z_{t_1}$) est le commutant de W($z_1,..,z_{t_1}$) et c'est une Algèbre, on l'appellera l'Algèbre des matrices fractales de partition associée ($z_1,..,z_{t_1}$).

Remarquons que, comme ${}^t\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \end{pmatrix}$, ${}^tW_{i,i+1}A_{\mathrm{ij}}W_{j,j+1}=A_{i+1,j+1}$. □

Proposition 6.
Soit $A\in F(z_1,..,z_{t_1})$*, si A est une matrice inversible* A^{-1}*appartient à F(*$z_1,..,z_{t_1}$*).*

Démonstration.
Il suffit de remarquer que si AW=WA et A inversible alors $A^{-1}W=\mathrm{W}A^{-1}$. □

2. Les matrices de Weyr.

La forme de Jordan d'une matrice nilpotente est bien connue:

toute matrice nilpotente peut se mettre sous la forme $\Gamma = \begin{pmatrix} J(t_1) & & & & \\ & J_{(t_2)} & & & \\ & & ...... & & \\ & & & .... & \\ & & & & J_{(t_p)} \end{pmatrix}$, où les indices forment une suite décroissante $t_1 \geqslant t_2 \geqslant .... \geqslant t_p$ et pour chaque k J(t_k)=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & .... & ... & 0 \\ .... & ... & .... & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}$$\in \mathcal{M}_{t_k}(\mathbb{K})$; on conviendra de poser t_0=0.

La suite (t_i) sera appelée partition canoniquement associée à Γ.

Proposition 7. *Un ordre sur la base canonique*

Soit la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ dont on désignera les éléments $(e_1, ..., e_n)$ sous la forme $e_{i,k}$ de la manière suivante: $e_{i,k}$ représente $e_{t_0+....+t_{i-1}+k}$.

On dira que $e_{i,k} \leqslant e_{j,l}$ lorsque k<l ou k=l et i⩽j

Ce qui se traduit par une suite croissante $\mathcal{C}'$=$(e_{1,1}, e_{2,1}, ..., ...)$

Remarque 8. Il s'agit tout simplement d'un ordre lexicographique; on écrira (i,j)$\prec(k, l)$

Proposition 9. *Interprétation de la matrice Γ et construction de la matrice W*

On considère la matrice Γ décrite au-dessus et la base canonique (e_i), l'action de Γ sur la base peut se lire comme suit:

$$\begin{array}{l} 0 \longleftarrow e_{p,1} \longleftarrow e_{p,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{p,t_p} \\ 0 \longleftarrow e_{p-1,1} \longleftarrow e_{p-1,2} \longleftarrow .... \longleftarrow e_{p-1,t_{p-1}} \\ ..... \\ 0 \longleftarrow e_{1,1} \longleftarrow e_{1,2} \longleftarrow .... \longleftarrow ...... \qquad \longleftarrow e_{1,t_1} \end{array}$$

Tableau 1.

Posons z_1=p,z_2=card($\{k,\ t_k \geqslant 2\}$), z_3 = card($\{k,\ t_k \geqslant 3\}$),...,z_{t_1} (on conviendra de poser z_{t_1+1}=0), la suite (z_u) est décroissante, elle sera désignée sous le nom de partition canoniquement associée à W.

Déterminons la matrice qui représente la même application relativement à la base $\mathcal{C}'$.

Parcourir la base $\mathcal{C}'$ dans l'ordre revient à parcourir le tableau, colonne après colonne du bas vers le haut et de la gauche vers la droite; alors

1) les z_1 premiers vecteurs ont pour image 0 d'où les z_1 premières colonnes sont nulles.

2) les z_2 suivants ont leur image dans le même ordre parmi les z_1 premiers.

etc...

La matrice Γ devient alors la matrice (par blocs) W=($W_{i,j}$) où le bloc $W_{i,j} \in \mathcal{M}_{z_i,z_j}(\mathbb{K})$. Le tableau implique que $\forall i \in \{1, ..., t_p - 1\}$ $W_{i,i+1}$=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{z_{i+1}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{z_i,z_{i+1}}(\mathbb{K})$ (attention la matrice n'est pas nécessairement carrée) et si j$\neq i+1$ $W_{i,j}$=0.

W=$\begin{pmatrix} 0 & W_{1,2} & 0 & 0 & ... & ...0 \\ 0 & 0 & W_{2,3} & 0 & ... & .... \\ ... & ... & ... & ... & .... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de Weyr associée à cette partition.

Remarque 10. Cette présentation de la forme de Weyr reprend le chemin totalement empirique qui m'a fait la découvrir; on peut bien entendu définir cette forme de manière indépendante de la forme de Jordan.

On lira dans [1] l'histoire de la redécouverte de cette forme matricielle longtemps oubliée et une description de cette forme, indépendamment des matrices de Jordan.

Exemple 11.

$$\text{Soit } \Gamma=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&\dots&\dots&.&\dots\\ 0&0&1&0&0&\dots&\dots&\\ 0&0&0&1&\dots\dots&&&\\ 0&0&0&0&0&\dots&\dots&\dots\\ &&&&0&1&0&\dots\\ &&&&0&0&1&0\\ &&&&0&0&0&1\\ 0&\dots&&&0&0&0&0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J(4)&0&\\ 0&J(3)&\\ 0&\dots&J(1) \end{pmatrix}$$

$$\text{On obtient } W=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&.\\ \dots&0&0&0&1&0&0&\dots\\ 0&0&0&0&0&0&0&\dots\\ 0&.&\dots&\dots&0&1&0&0\\ &&&&\dots&0&1&0\\ &&&&&0&0&1\\ &&&&&\dots&0&0\\ 0&\dots.&.&\dots&0&\dots&0&0 \end{pmatrix}$$

Remarque 12.

On retiendra aussi que le changement de base qui transforme Γ en W est une simple permutation.

Proposition 13. *Les puissances de W*

Soit pour tout u⩾v $N_{u,v}=\begin{pmatrix} I_v\\ 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{u,v}(K)$.

$$W=\begin{pmatrix} 0&N_{z_1,z_2}&0&..&\dots\\ 0&0&N_{z_2,z_3}&\dots&\dots\\ \dots&\dots.&0&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots&N_{z_{t_1-1},z_{t_1}}\\ 0&0&0&\dots&0 \end{pmatrix}$$

$$W^2=\begin{pmatrix} 0&0&N_{z_1,z_3}&0&..&\dots\\ .&0&0&N_{z_2,z_4}&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots.&0&\dots&\dots\\ \dots.&\dots&\dots&\dots&\dots&N_{z_{t_1-2},z_{t_1}}\\ 0&0&0&0&\dots&\dots.\\ 0&\dots&\dots&&\dots\dots&0 \end{pmatrix}$$

...

$$W^k=\begin{pmatrix} 0&\dots.&0&N_{z_1,z_{1+k}}&0&..&\dots\\ \dots.&\dots&0&0&N_{z_2,z_{2+k}}&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots.&0&\dots&\dots\\ \dots.&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&N_{z_{t_1-k},z_{t_1}}\\ 0&\dots&0&0&0&\dots&\dots\\ &&&&&&\dots\\ 0&0&\dots&&\dots\dots\dots&\dots.&0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Il suffit de remarquer que $N_{u,v}N_{v,w}=N_{u,w}$ □

Proposition 14. *Une simple propriété des matrices* $N_{u,v}=\begin{pmatrix} I_v\\ 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{u,v}(\mathbb{K})$

Si $M\in\mathcal{M}_{\mathrm{tu}}(\mathbb{K})$ $MN_{u,v}$ *est la matrice M, privée de ses u-v dernières colonnes,*

i) l'application $M\longmapsto MN_{u,v}$ *est une surjection de* $\mathcal{M}_{t,u}(\mathbb{K})$ *sur* $\mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{K})$

ii) l'application $M\longmapsto N_{u,v}M=\begin{pmatrix} M\\ 0\end{pmatrix}$ *est une injection de* $\mathcal{M}_{v,t}(\mathbb{K})$ *dans* $\mathcal{M}_{u,t}(\mathbb{K})$

3. Une propriété ignorée .

Au passage nous avons établi

Théorème 15. *La trigonalisabilité par blocs du commutant d'une matrice de Weyr*

Soit la matrice W(z_1,..,z_{t_1}) l'ensemble des matrices commutant avec W est l'Algèbre F(z_1,..,z_{t_1}), trigonale par blocs.

Théorème 16. *La trigonalisabilité par blocs du commutant*

Comme toute matrice (dans le cas d'un corps algèbriquement clos) est semblable à une somme directe de matrices de Jordan, donc ausssi de matrices de Weyr, la trigonalisabilité simultanée (par blocs) sera vraie pour le commutant d'une matrice quelconque à coefficients dans un tel corps.

Il est surprenant que cette propriété soit si peu explicitée. [1],[2].

4. Quelques outils pour l'etude de F(z_1,..,z_{t_1}).

Soit une matrice de Weyr W(z_1,..,z_{t_1})

Définition 17. *Réduction d'ordre k d'une matrice de F(z_1,..,z_{t_1})*

Soit une matrice M=($M_{i,j}$) de F(z_1,..,z_{t_1}) on désignera sous le nom de réduite d'ordre k la matrice M_k=$(M_{i,j})_{i\geqslant k,j\geqslant k}$.

.

Proposition 18. *Expression algébrique de la réduction*

Soit une matrice M=($M_{i,j}$) de F(z_1,..,z_{t_1}), ${}^t\mathrm{W}^k\mathrm{M}\mathrm{W}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{k+1} \end{pmatrix}$

Démonstration.

Il suffit d'établir le résultat pour k=1, ce qui se fait en appliquant la relation ${}^tW_{i,i+1}A_{\mathrm{ij}}W_{j,j+1} = A_{i+1,j+1}$. □

On appellera ces matrices « matrices fractales » pour des raisons évidentes.

5. Description d'une base de F.

Nous avions décrit l'action de f sur la base $\mathcal{B}$ comme suit:

$$
\begin{array}{l}
0 \longleftarrow e_{p,1} \longleftarrow e_{p,2} \longleftarrow \ldots. \longleftarrow e_{p,t_p} \\
0 \longleftarrow e_{p-1,1} \longleftarrow e_{p-1,2} \longleftarrow \ldots. \longleftarrow e_{p-1,t_{p-1}} \\
\ldots.. \\
0 \longleftarrow e_{1,1} \longleftarrow e_{1,2} \longleftarrow \ldots. \longleftarrow \ldots\ldots \qquad\qquad \longleftarrow e_{1,t_1}
\end{array}
$$

Tableau 2.

Définition 19. *Les morphismes transversaux de F*

Soit pour chaque couple (i,j) et chaque 0⩽k<min (t_i, t_j) l'application $g_{j,i,k}$ définie par

$$
\begin{array}{cccc}
e_{i,\ldots.} & \ldots. & e_{i,t_i-1} & e_{i,t_i} \\
\downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
e_{j,\ldots} & \ldots. & e_{j,t_j-k-1} & e_{j,t_j-k}
\end{array}
$$

et nulle sur les autres vecteurs de la base.

Théorème 20. *Une base de F*

Les $g_{j,i,k}$ sont linéairement indépendants et constituent une base du commutant de w.

Démonstration.

Il suffit d'observer les diagrammes commutatifs $\begin{array}{ccccccc} & \longleftarrow & .... & \longleftarrow & e_{i,t_i-1} & \longleftarrow & e_{i,t_i} \\ \downarrow & & & & \downarrow & & \\ & \longleftarrow & .... & \longleftarrow & e_{j,t_j-k-1} & \longleftarrow & e_{j,t_j-k} \end{array}$ qui montrent que ces applications commutent avec f.

Montrer qu'elles sont linéairement indépendantes est analogue aux exercices classiques sur les endomorphismes nilpotents.

Leur cardinal est $\sum_{(i,j)\in[\![1,\ldots,p]\!]^2} \min(t_i,t_j)$, qui est la dimension du commutant de w (Théorème de Frobenius-Ceccioni). [7]

C'est donc une base du commutant de w

□

Exemple 21.

Reprenons l'exemple de F(3,3,2) et rappelons l'action de Γ dans notre cas:

$$\begin{array}{l} 0 \longleftarrow e_1 \longleftarrow e_4 \longleftarrow e_7 \\ 0 \longleftarrow e_2 \longleftarrow e_5 \longleftarrow e_8 \\ 0 \longleftarrow e_3 \longleftarrow e_6 \end{array}$$

Tableau 3.

Nous appellerons (e_1,e_4,e_7), (e_2,e_5,e_8) et (e_3,e_6) les orbites de Γ associées à W et nilpotents principaux associés aux orbites les applications qui coïncident avec W sur une orbite et sont nulles sur les autres orbites.

La dimension de F(3,3,2) est $3^2+3^2+2^2=22$; une base est formée par les matrices suivantes:

$\begin{pmatrix} a & b & e & h & k & u & p & x \\ c & d & f & i & l & v & q & y \\ 0 & 0 & g & j & m & w & r & z \\ 0 & 0 & 0 & a & b & e & h & k \\ 0 & 0 & 0 & c & d & f & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & j & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$; nous appellerons base canonique de F les matrices indiquées par une même lettre,

comme les idempotents: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui sont les projections sur Vect($e1, e4, e7$), suivantVect(e2,e3,e5,e6,e8), sur Vect(e2,e5,e8), suivant Vect(e1,e3,e4,e6,e7) et sur Vect(e3,e6), suivant Vect(e1,e2,e4,e5,e7,e8); nous les appellerons respectivement projections principales sur Vect($e1, e4, e7$), sur Vect(e2,e5,e8) et sur Vect(e3,e6), ou

les nilpotents principaux : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Jusque là pas grand chose de particulier, ce qui est plus intéressant c'est de comprendre les autres éléments de la base canonique.

Par exemple $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ qui est défini par $\begin{array}{l} e5 \longleftarrow e6 \\ e2 \longleftarrow e3 \\ 0 \longleftarrow \text{les autres} \end{array}$; que l'on comprend mieux en observant le diagramme commutatif $\begin{array}{ccccc} 0 & \longleftarrow & e3 & \longleftarrow & e6 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & e2 & \longleftarrow & e5 \end{array}$; et il en est de même pour les autres éléments de la base canonique de F:

$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ correspond à $\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & e1 & \longleftarrow & e4 & \longleftarrow & e7 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & e1 & \longleftarrow & e4 & \longleftarrow & e7 \end{array}$,

$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$ correspond à $\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & e1 & \longleftarrow & e4 & \longleftarrow & e7 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & e2 & \longleftarrow & e5 & \longleftarrow & e8 \end{array}$

et $\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$ correspond à $\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & e2 & \longleftarrow & e5 & \longleftarrow & e8 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & \longleftarrow & e3 \end{array}$

Proposition 22. *WF est un idéal bilatère*

Démonstration.
Il est immédiat, comme F est le commutant de W, que WF est un idéal bilatère.
Reprenons la base de F décrite plus haut:
il est immmédiat que $\forall(i,j,l)\; g_{l,j,q} \circ g_{j,i,k} = g_{l,i,k+q}$ si q+k<t_l et 0 sinon.
De même W=$\sum_{i=1\dots p} g_{i,i,1}$, WF est le sous-espace vectoriel engendré par les $g_{j,i,k}(k \in [\![1, \dots, t_j - 1]\!])$.

□

Proposition 23. *Le centre de F est l'Algèbre K[W]*

Démonstration.
Comme F est le commutant de W, le centre de F est le bicommutant de W donc K[W]. (Théorème du bicommutant) . □

6. LE GROUPE DES AUTOMORPHISMES DE F.

Soit φ un automorphisme de F.
L'image par φ d'un idempotent est nécessairement un idempotent, c'est à dire un projecteur, et l'image d'un nilpotent est un nilpotent de même ordre; enfin si la somme d'éléments $f_1, \dots, f_u$ est égal à Id, il en est de même de la somme de leurs images.

En reprenant la base G=$(g_{j,i,k})$ on voit donc que $\sum_i \varphi(g_{i,i,0})$=Id et pour tout i $\varphi(g_{i,i,1})$ est un nilpotent d'ordre t_i qui commute avec $\varphi(g_{i,i,0})$, d'où il découle que la dimension de l'image de $\varphi(g_{i,i,0})$ est supérieure u égale , et donc égale, à celle de $g_{i,i,0}$; donc il existe pour tout i un élément x_i de Im$(\varphi(g_{i,i,0}))$ tel que (x_i,$\varphi(g_{i,i,1})(x_i)$, ..., $\varphi(g_{i,i,1})^{t_i-1}(x_i)$) forment une base de $\varphi(g_{i,i,0})$.

La concaténation de ces bases constitue une base de la somme des Im$(\varphi(g_{i,i,0}))$, directe à cause des produits $g_{l,s,k} \circ g_{j,i,k}$=0 lorsque s$\neq j$, égale à K^n à cause de la somme.

On notera ($x_{i,1}$,...,x_{i,t_i}) les éléments (x_i,$\varphi(g_{i,i,1})(x_i)$, ..., $\varphi(g_{i,i,1})^{t_i-1}(x_i)$) d'où la base $\mathcal{C}'$ de K^n.

Les diagrammes commutatifs qui ont défini les $g_{j,i,k}$ sont transportés par φ et donc la base G'=$(\varphi(g_{j,i,k}))$ est l'image de la base G asssociée au changement de la base $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$; donc il existe une matrice P$\in\mathcal{GL}_n(K)$ telle que $\forall M \in F, \varphi(M) = P^{-1}$MP.

Par ailleurs comme le centre de F est K[I,W] $\varphi(W)$ doit être (tout à la fois) un élément, appartenant à K[I,W], nilpotent, semblable à W; donc un polynôme T(W) de valuation 1 et Q tel que Q^{-1}WQ$=T(W)$.

De l'égalité P^{-1}WP=Q^{-1}WQ il découle que donc QP^{-1}WPQ^{-1}=W, d'où PQ^{-1} appartient à F$\cap\mathcal{GL}_n(K)$, on posera PQ^{-1}=H, ou P=HQ.

Récipoquement:

Soit M$\in F$

$Q^{-1}H^{-1}$MHQ$W = W Q^{-1}H^{-1}$MHQ $\Longleftrightarrow$ H^{-1}MHQWQ^{-1} = QW$Q^{-1}H^{-1}$MH(*), or comme W est nilpotente il existe un polynôme S tel que S(T(W))=W, d'où QW$Q^{-1} = S(W)$; donc (*) équivaut à H^{-1}MHS$(W) = S(W)H^{-1}$MH, ce qui vrai parce que M et H commutent avec W..

Ce qui se traduit dans le

Théorème 24. *Le groupe des automorphismes de F est isomorphe au produit semi-direct du groupe des automorphismes intérieurs de F et du groupe* $\mathbb{W}$ *des polynômes en W de valuation 1.*

Démonstration.

On notera χ_H l'automorphisme intérieur M$\longmapsto H^{-1}$MH (de F) et σ_Q l'endomorphisme de K[I,W] défini par Q$\longmapsto Q^{-1}$WQ$=T(W)$.

Nous venons de voir que tout automorphisme de l'Agèbre F est de la forme $M \longmapsto Q^{-1}H^{-1}$MHQ, où Q est tel que Q^{-1}WQ$=T(W)$appartient à $\mathbb{W}$ et H appartient à F$\cap\mathcal{GL}_n(K)$; un tel automorphisme sera noté (σ_Q, χ_H).

Etudions la composition $(\sigma_{Q'}, \chi_{H'}) \circ (\sigma_Q, \chi_H)$ que l'on notera (σ_R, χ_K):

$(\sigma_{Q'}, \chi_{H'}) \circ (\sigma_Q, \chi_H)$(W)=$Q'^{-1}H'^{-1}Q^{-1}H^{-1}WHQH'Q'$=$Q'^{-1}Q^{-1}$WQQ'=$\sigma_{QQ'}$(W), donc R=QQ'.

Et, de l'égalité

$(\sigma_{Q'}, \chi_{H'}) \circ (\sigma_Q, \chi_H)$(M)=$Q'^{-1}H'^{-1}Q^{-1}H^{-1}MHQH'Q'$=$Q'^{-1}Q^{-1}K^{-1}MKQQ'$ on déduit K=HQH'Q^{-1}.

D'où $(\sigma_{Q'}, \chi_{H'}) \circ (\sigma_Q, \chi_H)$=$(\sigma_{QQ'}, \chi_{HQH'Q^{-1}})$.

Soit donc le produit semi-direct $\mathbb{W} \times F^*$ défini par (Q',H')$\Delta(Q,H) = (\mathbb{Q}Q', \mathrm{HQH}'Q^{-1})$

Considérons le morphisme du produit semi-direct $\mathbb{W} \times F^*$ sur le groupe des automorphismes de F défini par (Q,H)$\longmapsto\varphi_{Q,H}$, tel que: $\forall M$, $\varphi_{Q,H}(M) = Q^{-1}H^{-1}$MHQ.

Etudions le noyau du morphisme $(Q,H)\longmapsto\varphi_{Q,H}$.

$\varphi_{Q,H} =$ Id $\Longrightarrow Q^{-1}H^{-1}$WHQ=W$\Longrightarrow Q^{-1}$WQ $= W \Longrightarrow \sigma_Q$=Id; par suite $\forall M$, $M = H^{-1}$MH donc l'automorphisme intérieur , χ_H:M$\longmapsto$HMH^{-1}est l'identité.

donc le morphisme $(\sigma_Q, \chi_H) \longmapsto \varphi_{Q,H}$ est un isomorphisme. □

Paris, Mars 2018; complété en Mars-Avril 2019
Correction Décembre 2019

Bibliographie:

[1] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.

[2] P. Teller, http://lalgebrisant.fr/images/MatricesCommutantes/LeCommutantesttrigonalisable.pdf

[3] P. Teller, http://lalgebrisant.fr/images/pdfArticles/EquatAMMB.pdf