Markov sans Probas

PAR PATRICK TELLER

Le but de ce travail est de rassembler, de produire si nécessaire, une étude des matrices stochastiques évitant le recours aux arguments probabilistes.

Définition 1. *Une matrice stochastique est une matrice* $A=(a_{\mathrm{ij}})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $\forall(i,j)\, a_{\mathrm{ij}}\geqslant 0$, et$\forall i, \sum_{j=1}^{n} a_{\mathrm{ij}}=1$.

Notation 2.

1) Une matrice $A=(a_{\mathrm{ij}})$ *sera dite positive lorsque* $\forall(i,j)\, a_{\mathrm{ij}}>0$ *et non-négative lorsque* $\forall(i,j)\, a_{\mathrm{ij}}\geqslant 0$

(pour reprendre la terminologie anglo-saxonne)

2) Soit $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ *un vecteur on notera* $|V|$ *le vecteur* $\begin{pmatrix} |v_1| \\ \dots \\ |v_n| \end{pmatrix}$

1 Matrices irréductibles

Définition 3. *Matrice irréductible*

Une matrice A sera dite réductible lorsqu'il existe une matrice de permutation P telle que ${}^t\mathrm{PAP}$ *est de la forme* $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Proposition 4. *Caractérisation par les chaînes*

nécessaire ?

Proposition 5.

Soit une matrice irréductible non-négative A et un vecteur colonne Y non négatif , qui possède exactement $k\in[\![0, n-1]\!]$ *coordonnées positives; alors (I+A)Y possède au moins k+1 coordonnées positives.*

Démonstration.

Pour alléger la démonstration supposons que les k premières coordonnées sont celles qui sont positives.

Comme I+A est positive le vecteur (I+A)Y=Y+AY ne peut avoir plus de n- k coordonnées nulles, supposons qu'il en ait exactement n-k nulles, c'est à dire que pour tout i>k Y_i=0 et $(\mathrm{AY})_i$=0 alors pour tout i$\in[\![k+1,n]\!]$ et pour tout j$\in[\![1,k]\!]$ $a_{\mathrm{ij}}=0$ c'est à dire A=$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, d'où A n'est pas irréductible. □

Corollaire 6.

Soit une matrice irréductible non-négative A alors pour tout $Y\geqslant 0$ *et non nul,* $(I+A)^{n-1}Y>0$.

Corollaire 7.

Soit une matrice irréductible non-négative A alors tout vecteur propre non négatif est positif.

se démontre avec le même argument

Définition 8. *La fonction de Collatz-Wielandt*

A désigne une matrice stochastique

Soit Ω l'ensemble des vecteurs non-négatifs $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *tels que* $\sum_i x_i = 1$ *et* $\Omega' = \{X \in \Omega, \forall i, x_i > 0\}$;

à tout X de Ω on associe $f_A(X) = min\left(\left\{\frac{(\mathrm{Ax})_i}{x_i}, i = 1 \ldots n\right\}\right) = max\{k \in \mathbb{R}, \mathrm{AX} - \mathrm{kX} \geqslant 0\}$.

Proposition 9.

La restriction de f_A à Ω' est continue.

Quel que soit $X \in \Omega$ $f_A((I+A)^{n-1}X) \geqslant f_A(X)$

$\{(I+A)^{n-1}X, X \in \Omega\}$ *est un compact inclus dans* Ω'

$f_A(\Omega)$ *admet un maximum, atteint dans* $\{(I+A)^{n-1}X, X \in \Omega\} \subset \Omega'$.

Démonstration.

On retiendra que le maximum de f_A est atteint en un vecteur positif. □

2 Valeurs propres et vecteurs propres

Proposition 10.

Soit A une matrice stochastique

1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$, *donc 1 est valeur propre de A; on notera* $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$

2) 1 est valeur propre de ${}^tA$

3) Il existe un vecteur-ligne non nul L tel que LA=L.

4) Les valeurs propres de A (et de ${}^tA$) sont de module inférieur ou égal à 1

(Hadamard, Gershgorin)

Lemme 11. *Perron-Frobenius*

Soit A une matrice stochastique et une valeur propre λ de module 1 et le vecteur non-nul $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *tel que* ${}^t\mathrm{AV} = \lambda V$, *alors* ${}^tA|V| = |V|$.

Démonstration.

Notons $W = {}^tA|V| - |V|$ et $\mathrm{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \cdots \\ w_n \end{pmatrix}$, alors pour tout i $w_i = \sum_j a_{\mathrm{ji}}|v_j| - |v_i| \geqslant \left|\sum_j a_{\mathrm{ji}} v_j\right| - |v_i| = |v_i|$-$|v_i| = 0$.

D'autre part $\sum_i w_i = \sum_i (\sum_j a_{\mathrm{ji}}|v_j| - |v_i|)$=$\sum_j \sum_i a_{\mathrm{ji}}|v_j| - \sum_i |v_i| = \sum_j 1.|v_j|$-$\sum_i |v_i|$=0.

Conclusion: les w_i sont positifs et leur somme est nulle donc ils sont nuls. cqfd $\square$

Par suite il existe un vecteur-ligne (non nul) à coordonnées positives L tel que LA=L, nous supposerons que L=$(l_1, ..., l_n)$, où $\sum_i l_i = 1$.

Théorème 12.

Soit une matrice stochastique A

Le maximum de $f_A(\Omega)$ est égal à 1, il est atteint en un vecteur X de Ω' et celui-ci est un vecteur propre pour A.

Démonstration.

Soit r le maximum de f$_A(\Omega)$ et un vecteur X tel que $f_A(X)$=r alors AX-rX$\geqslant$0.

Supposons que AX-rX$\neq$0 alors (I+A)$^{n-1}$(AX-rX)>0 qui est égal à (A-rI)(I+A)$^{n-1}$X, d'où f$_A$((I+A)$^{n-1}$X)>r et r ne serait plus le maximum de f$_A(\Omega)$.

D'où AX=rX, r est une valeur propre de A et donc r=1 et X est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Par ailleurs le corollaire 7 entraîne que X>0. $\square$

Corollaire 13.

Soit une matrice stochastique A et un vecteur Y non-négatif tel que AY$\geqslant Y$ *alors AY=Y.*

Proposition 14.

Soit une matrice stochastique A

Les vecteurs propres pour la valeur propre 1 ont toutes leurs coordonnées non nulles.

Démonstration.

Soit X un vecteur propre pour la valeur propre 1 alors AX=X d'où pour tout indice i $x_i = \sum_j a_{\mathrm{ij}} x_j$, d'où $|x_i| = |\sum_j a_{\mathrm{ij}} x_j| \leqslant \sum_j a_{\mathrm{ij}} |x_j|$ et par suite A$|X| - |X| \geqslant 0$, la démonstration précédente permet de conclure que A$|X| = |X|$ et par suite $|X|$ n'a pas de coordonnée nulle, il en est de même de X $\square$

Théorème 15.

Soit une matrice stochastique irréductible A

1) La dimension du sous-espace propre Ker(A-I) est égale à 1; . Ker(A-I)=vect(J)

2) La multiplicité algébrique de la valeur propre 1 est égale à 1.

(chacune de ces propriétés vaut aussi pour la transposée ^tA.

Démonstration.

1) On sait déjà que la dimension du sous-espace propre Ker(A-I) est supérieur ou égale à 1; la proposition précédente entraîne qu'elle est exactement égale à 1.

2) Posons $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Rappelons que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} M(t) = \sum_{(i,j)} (-1)^{i+j} \det(M_{\mathrm{ij}}) m'_{\mathrm{ij}}(t)$ alors $\Delta'(\lambda)$=$\sum_i (-1)^{i+i} \det\Big((\lambda - A)_{\mathrm{ii}}\Big).1 = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(\lambda I - A))$.

Donc $\Delta'(1) = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}(I - A))$.

Or $0 = \Delta(1) I = (I - A)\mathrm{adj}(I - A)$ et un exercice classique déduit du rang de $(I - A)$=n-1 celui de son adjoint:1.

Si on note $\mathrm{adj}(I - A) = B = (b_{\mathrm{ij}})$, les colonnes $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \cdots \\ \cdots \\ b_{\mathrm{nj}} \end{pmatrix}$ sont colinéaires au vecteur J=$\begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et les lignes sont colinéaires au vecteur positif L, par suite la trace de B est différente de 0, ce qui établit la multiplicité algébrique de la valeur propre 1.

Les deux résultats sont vrais pour la transposée. □

Théorème 16. *Les valeurs propres de module 1*

Soit une matrice stochastique A irréductible.

1) Les valeurs propres de module 1 sont des racines de l'unité.

2) Il existe un entier h$\leqslant n$ tel que les valeurs propres de module 1 soient les racines h-ièmes de l'unité.

3) Les sous-espaces propres (complexes) associés aux valeurs propres de module 1 sont de dimension 1 et engendrés par des vecteurs dont les coordonnées sont des racines h-ièmes de l'unité.

Démonstration.

Soit $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$ et V=$\begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$ tels que AV=λV alors A$|V| \geqslant |V|$ et par suite A$|V| = |V|$ et $|V| = J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Considérons la matrice diagonale D de diagonale $(v_1, v_2, \ldots., v_n)$ et G=$\lambda^{-1} D^{-1}$AD.

Comme A$|V| = |V|$ alors AD$|V|$=AV=$\lambda V = \lambda D |V|$, d'où G$|V|$=$|V|$, or $|G| = A$.

D'où $|G| |V|$=G$|V|$.

On en déduit que pour tout i $\sum_j (|g_{\mathrm{ij}}| - g_{\mathrm{ij}})$=0, d'où G=$|G| = A$.

D'où A est semblable à λA et donc le spectre de A est stable par multiplication par λ, or il est fini et de cardinal inférieur ou égal à n, donc λ est une racine n-ième de l'unité; soit h le maximum des ordres des valeurs propres de module 1: l'ensemble des valeurs propres de module 1 est l'ensemble des racine h-ièmes de l'unité.

La stabilité du spectre par multiplication par λ entraîne que la multiplicité de la valeur propre λ est identique à celle de 1.

Enfin reprenons D et imposons $v_1 = 1$, c'est à dire $D_{11} = 1$.

Alors AD=λDA entraîne AD^h=$\lambda^h D^h A$, c'est à dire AD^h=$D^h A$, d'où AD^hJ=D^hAJ = $D^h J$ et donc, comme nous avons supposé que D_{11}=1, $D^h J = J$ et par suite $D^h = I$; ce qui entraîne que les coordonnées de V sont des racines h-ièmes de l'unité. □

3 Matrices stochastiques irréductibles périodiques, primitives

Définition 17. *Matrices stochastiques périodiques*

Une matrice stochastique irréductible est dite périodique de période h lorsqu'elle possède h>1 valeurs propres de module 1.

Théorème 18. *Si une matrice stochastique irréductible A est périodique de période h*

son polynôme caractéristique, écrit suivant les puissances strictement décroissantes, est de la forme $X^n + c_1X^{n_1} + c_2X^{n_2} + \ldots. + c_pX^{n_p}$ *où h=pgcd(n-n_1,n_1-n_2,...,n_{p-1}-n_p).*

Démonstration.

A est semblable à $e^{\frac{2i\pi}{h}}$A, elles ont donc le même polynôme caractéristique. □

Définition 19. *Matrices stochastiques irréductibles primitives*

Une matrice stochastique irréductible est dite primitive lorsqu'elle n'est pas périodique.

Corollaire 20. *Si A est stochastique irréductible et de trace positive alors elle est primitive.*

Théorème 21. *Caractérisation des matrices stochastiques irréductibles primitives*

Soit une matrice stochastique A

A est primitive si et seulement si il existe p tel que A^p>0.

Démonstration.

Supposons qu'il existe p tel que A^p>0.

1. A est nécesssairement irréductible.
2. Montrer qu'elle est de période 1:

Soit h sa période, A possède comme valeurs propres les complexes $e^{\frac{2i\pi k}{h}}$ pour k=0,1, ... ,h-1 alors A^p est positive et possède h valeurs propres de module 1 $e^{\frac{2i\pi \mathrm{kp}}{h}}$, mais comme la trace de A^p est positive, A^p est primitive et par suite h=1.

Réciproquement si A est primitive, comme la multiplicité algébrique et la multiplicité géométriques de 1 sont égales à 1, A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où le spectre de B est formé de complexes de module strictement inférieur à 1: il existe S inversible telle que A=S$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$S^{-1}

d'où A^k=S$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$S^{-1} et donc tend vers $S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}S^{-1}$, matrice de rang 1.

En fait c'est encore plus simple:

La première colonne de S est la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}$, propre pour A et la valeur propre 1.

La première ligne de S^{-1} est la transposée d'un vecteur propre pour ${}^tA$ pour la valeur propre 1, donc de la forme uL (th de Frobenius).

Donc la limite de A^k est $\begin{pmatrix} \mathrm{uL} \\ \mathrm{uL} \\ \ldots. \\ \mathrm{uL} \end{pmatrix}$ et comme elle doit être stochastique $\begin{pmatrix} L \\ \ldots \\ \ldots \\ L \end{pmatrix}$; comme L est positive il existe p_0 tel que p>$p_0 \Longrightarrow A^p$>0.

Ce qui établit la réciproque. □

Corollaire 22.

Si A est stochastique irréductible et primitive la limite de A^k est $\begin{pmatrix} L \\ \ldots \\ \ldots \\ L \end{pmatrix}$.

Théorème 23. *Les matrices stochastiques irréductibles périodiques*

Soit A une matrice stochastique irréductible de période h>1, alors il existe une matrice de permutation P telle que ${}^t\mathrm{PAP} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & A_{h-1,h} \\ A_{h1} & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Reprenons la matrice D du Théorème 16 et supposons que sa diagonale est de la forme suivante $D = \begin{pmatrix} \varepsilon_{m_0} I_{n_0} & & & & \\ & \varepsilon_{m_1} I_{n_1} & & & \\ & & ... & & \\ & & & ... & \\ & & & & \varepsilon_{m_s} I_{n_s} \end{pmatrix}$, où $0 = m_0 < m_1 < ... < m_s < h$ et pour tout k $\varepsilon_{m_k} = e^{\frac{2i\pi m_k}{h}}$.

Si on note $A = (\ A_{\mathrm{pq}}\ )$ où les blocs A_{pq} sont de taille $n_p \times n_q$ alors l'égalité A$=e^{\frac{2i\pi}{h}}$DAD^{-1} entraîne pour chaque (p,q) $A_{\mathrm{pq}} = e^{\frac{(1+m_p-m_q)2i\pi}{h}} A_{\mathrm{pq}}$, c'est à dire $A_{\mathrm{pq}} \neq 0 \Longleftrightarrow 1 + m_p - m_q \equiv 0\,[h]$.

Or A est irrréductible donc pour tout p il faudra un q tel que $A_{\mathrm{pq}} \neq 0$, cela devra être q=p+1 d'où $0 = m_0, 1 = m_1, 2 = m_2$...et donc s=h-1 et m$_{h-1}$=h-1.

D'où $A = \begin{pmatrix} 0 & A_{01} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & A_{12} & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & A_{h-2,h-1} \\ A_{h-1,0} & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans le cas général il faudra une permutation des vecteurs de la base et on aura ${}^t\mathrm{PAP} = \begin{pmatrix} 0 & A_{01} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & A_{12} & ... & ... \\ ... & ... & 0 & ... & ... \\ ... & ... & ... & 0 & A_{h-2,h-1} \\ A_{h-1,0} & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

Corollaire 24. *Les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1*

si on reprend les entiers $(n_0, n_2, ... n_{h-1})$ *(strictement positifs, tels que* $n_0 + n_1 + ... + n_{h-1} = n$*) et* ε *une racine h-ième primitive de l'unité*

Un vecteur propre pour la valeur propre 1 est $J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour chaque $k \in \{0, ..., h-1\}$ *un vecteur propre pour la valeur propre* ε^k *est* $J_{n_0} \oplus \varepsilon^k J_{n_1} \oplus .... \oplus \varepsilon^{k(h-1)} J_{n_{h-1}}$*, où la notation signifie une suite de* n_0 *coordonnées égales à 1, de* n_1 *coordonnées égales à* ε^k *etc..*

Question 25.

Les blocs Apq sont stochastiques et rectangulaires que sait-on d'autre ?

qd sont-ils carrés ? qd sont-ils de tailles égales

questions:

que peut-on dire des Apq ?

Bibliographie: Non negative Matrices, Minc