Groupe des Classes de diviseurs d'un anneau A et de l'anneau des séries formelles A[[T]]

par Patrick TELLER

Mémoire pour le Master of Science, Juin 1975

1 Introduction

On sait que si A est un anneau factoriel il en est de même de l'anneau des polynômes A[X] et réciproquement. La question analogue, relative à A et A[[X]], l'anneau des séries formelles, n'a qu'une réponse partielle:

1) On sait ([11]) que, si A est régulier et factoriel A[[X]] l'est aussi; ce résultat est un outil important dans l'étude du problème général grâce au théorème suivant ([10])

« Si A est un anneau factoriel et de Mac-Cauley tel que $A_{\mathfrak{P}}[[X]]$ est factoriel pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ alors A[[X]] est factoriel »

2) Il y a des exemples d'anneau factoriel A tels que A[[X]] ne l'est pas, grâce au théorème suivant:

« Soit A un domaine d'intégrité.

Si a ,b et c sont des éléments de A tels que b est premier, b et c sont premiers entre eux; soit i,j,k tels que $a^{i-1} \in \mathrm{Ab} + \mathrm{Ac}$ et $a^i \in \mathrm{Ab}^j + \mathrm{Ac}^k$, où ijk-ij-jk-ki⩾0

Alors A[[X]] n'est pas factoriel »

(Samuel, [10]).

Par exemple ce sera le cas pour $A = K(x,y,z)/{<}z^2 = x^3 + y^7{>}$, où K est de caractéristique 2 et parfait.

3) De récents travaux (Lipman, Danilov) ont fait appel à des méthodes géométriques:

- Lipman ([8]) relie la propriété étudiée avec l'Henselisation de l'anneau A et retrouve l'invariant de Samuel.

- Danilov ([2], [3],[4]) établit des résultats précis reliant $\mathcal{C}l(A)$ et $\mathcal{C}l(\hat{A})$ dans une somme directe où le supplément de $\mathcal{C}l(A)$ dans $\mathcal{C}l(\hat{A})$ est identifié sous l'hypothèse de l'existence d'une résolution des singularités de l'anneau A.

Dans d'autres cas il obtient certains résultats sur $\mathcal{C}l(A)$ et $\mathcal{C}l(A[[T]])$, classifiant les cas où prof(A)=2 et les autres sous certaines conditions.

Le but de ce travail est de comparer $\mathcal{C}l(A)$ et $\mathcal{C}l(A[[T]])$ sous une hypothèse générale (A normal et Noetherien) et généraliser ainsi des résultats de Danilov et Samuel au cas non factoriel.

Nous allons étudier la complétion de Spec(A[[T]] le long de V(T), puis nous établirons un cas particulier du « second Théorème de Comparaison », nous montrerons:

i) $\mathcal{C}l(A[[T]]) \simeq \mathcal{C}l(A) \oplus \varprojlim_n \mathrm{H}^1\left(U, \widetilde{\frac{1+{<}T{>}^*}{{<}T^n{>}}}\right)$, où est un ouvert bien choisi de Spec(A)

ii) Une condition suffisante: $\mathrm{H}^1(U, \tilde{A}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{C}l(A[[T]]) \simeq \mathcal{C}l(A)$, ce qui est le cas lorsque A=S_3.

iii) Nous exhiberons un élément non nul de $\varprojlim_n \mathrm{H}^1\left(U, \widetilde{\frac{1+{<}T{>}^*}{{<}T^n{>}}}\right)$ dans le cas du contre-exemple de Samuel.

Ceci répondra à des remarques de Samuel, Brieskorn et Scheja et généralisera certains de leurs résultats sans hypothèse de complétude ou de factorialité. Des résultats de Danilov sont retrouvés sans utilisation de méthodes géométriques avancées , telles que la désingularisation...

2 Rappels d'Algèbre Commutative

Les anneaux sont tout commutatifs, noéthériens, normaux.

1) Soit (A,m) un anneau local, on définit :

dimension de A=hauteur de A=la longueur de la plus longue chaine croissante d'idéaux premiers de A.

Si A n'est pas local, on définit pour un idéal premier p de A:

hauteur de p= dim(Ap=ht(pAp); on sait que dim(A[[T]]=dim(A)+1 ([7]).

Si I n'est pas premier, on pose ht(I)=inf(ht(p)), où p est premier associé à I.

2) Si 0–>A $\overset{\varphi}{\longrightarrow}$ B est un homomorphisme d'anneaux, nous désirons comparer ht(p) et ht(($\varphi(p)$).

Si B est une A-algèbre fidèlement plate (par l'action de φ) alors P$\subset Q \Longrightarrow \varphi(P) \subset \varphi(Q)$, d'où par localisation $\varphi(P)_Q \neq \varphi(Q)_Q$ et, par suite, ht(p)$\leqslant$ht($\varphi(p)$).

On a , en fait, un résultat plus précis dans le cas $\varphi = \mathrm{id}_A$:

ht(P)=ht(p)+ht(P/$\varphi(p)$) (*) où P est un idéal premier de B tel que P$\cap A = p$ ([9]).

Dans le cas que nous étudierons B=A[[T]] et B est trivialement plat, nous préciserons le résultat (*) à l'aide de la notion de profondeur en faisant des hypothèses de type Macaulay qui sont naturelles dans les cas étudiés mais non indispensables pour (*).

3) Rappelons que la suite (a1,a2,..,ar) est une suite régulière dans A si et seulement si

a) a1 n'est pas un diviseur de zéro dans A

b) $\forall i \in \{2, ..., r\}$, a_i n'est pas un diviseur de zéro dans A/<a_1,..,a_{i-1}>

Dans un anneau local on peut intervertir l'ordre des termes sans affecter cette propriété.

La longueur d'une suite régulière maximale dans un anneau local (A,m) est l'entier n tel que

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}^i_A(A/m, A) = 0, \forall i < n \\ \mathrm{Ext}^n_A(A/m, A) \neq 0 \end{cases}.$$

Le nombre est appelé profondeur de A (prof(A)) ou profondeur de m.

On étendra cette définition à tout idéal I de A

prof(I)=r $\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Ext}^i_A(A/I, A) = 0, \forall i < r \\ \mathrm{Ext}^r_A(A/I, A) \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$ la longueur d'une suite régulière maximale dans I est r.

4) Macaulay:

Soit (A,m) un anneau local, il est dit de Macaulay si dim(A)=prof(A).

Nous utiliserons par la suite les propriétés suivantes des anneaux de Macaulay:

- A de Macaulay =>$\forall p \in \mathrm{Spec}(A)$, A_p est de Macaulay (donc $\forall p \in \mathrm{Spec}(A)$, dim($A_p$)=prof($A_p$).

- Quel que soit l'idéal I de A (pas nécessairement premier), ht(I)=inf{ht(p), p associé à I}, prof(I)=inf{prof(p), p associé à I}, d'où ht(I)=prof(I).

- Un idéal I est dit sans composante immergée (« unmixed ») si ∀ ,p associé à I ht(p)=ht(I).

On dit que la propriété U (« unmixedness ») est vraie pour l'anneau A lorsque quel que soit l'idéal I=<a1,...,ak> tel que ht(I)=k alors I est sans composante immergée.

On peut établir que

A Macaulay et local <=> A possède la propriété U ([9]).

Un anneau A non local est dit de Macaulay si dim(A_m) est constante pour tous les idéaux maximaux de A et si tous les anneaux A_m sont des anneaux de Macaulay locaux.

- A Macaulay <=> A[T] de Macaulay <=> A [[T]] de Macaulay ([7]).

- R_i et S_j:

- On dit qu'un anneau A a la propriété R_1 si quel que soit l'idéal premier p de hauteur 1 l'anneau A_p est régulier.

- On dit qu'un anneau A a la propriété S_j si quel que soit l'idéal premier p prof(A_p)⩾min(ht(p),j).

Si A est Noéthérien on a l'équivalence :

A normal <=> $\begin{cases} A\,\mathrm{est}\,R_1 \\ \mathrm{et} \\ A\,\mathrm{est}\,S_2 \end{cases}$ (Matsumura « Commutative Algebra »).

Comme tout anneau local régulier est factoriel ([1]) et comme, si A est régulier et factoriel A[[T]] est aussi factoriel, on voit que R_1 est une propriété d'une grande utilité dans notre cas.

3 Schémas Formels et Théorème de Comparaison

1) Rappelons avant tout la notion de complétion d'un schéma le long d'un sous-schéma:

Soit Y un sous-schéma d'un schéma (X,$\mathcal{O}_X$), défini par un faisceau J; la complétion de X le long de Y sera le schéma (Y, $\lim\limits_{\longleftarrow n}\ \mathcal{O}_X/J^n$)=(Y,$\widehat{\mathcal{O}_X}$) où $\widehat{\mathcal{O}_X}$ est la complétion du faisceau $\mathcal{O}_X$ le long de V(J)=Y.

De même on peut définir la complétion d'un faisceau F le long de Y par $\hat{F} = \lim\limits_{\longleftarrow n}\ F/J^nF$ =F$\otimes_{\mathcal{O}_X}\widehat{\mathcal{O}_X}$.

Dans ces deux cas on obtient un faisceau dont le support est contenu dans Y.

On voit que, d'une certaine manière, on a restreint l'ensemble géométrique mais enrichi le faisceau structural.

En particulier, lorsque (X,$\mathcal{O}_X$)=(Spec(A),$\hat{A}$), où A est un anneau J-adique, la complétion le long de V(J) sera un schéma dont l'ensemble de base sera V(J) et le faisceau structural sera $\tilde{A}$ (si A est local et J un idéal de définition V(J)=$\{m\}$ « avec une certaine multiplicité »). Nous considérerons quant à nous le cas (Spec(A[[T]],$\widetilde{A[[T]]}$) et sa complétion le long de V(T) sera un schéma dont le support sera V(T)≃Spec(A) et le faisceau structural sera $\lim\limits_{\longleftarrow n}\ A[[T]]/T^n$.

Précisons ce faisceau; soit l'ouvert de V(T) identifié à Spec(A_a) on alors $\Gamma\left(\mathrm{Spec}(A_a), \widetilde{\lim\limits_{\longleftarrow n} A[[T]]/T^n}\right) = \lim\limits_{\longleftarrow n}\ A[[T]]_a/T^n$ =A_a[[T]].

On remarquera que $A[[T]]_a \subsetneq$ A_a[[T]], car à gauche il y a des séries dont les coefficients ont un dénominateur commun a^k (où k$\in\mathbb{Z}$) alors qu'à droite il y a des séries dont chaque coefficient possède un dénominateur $a^{k(i)}$ (où k(i)$\in\mathbb{Z}$) mais il n'y a pas nécessairement de dénominateur commun.

Si p$\in$Spec(A_a), c'est à dire si a$\notin p$, alors A_a[[T]$\subset$$A_p$[[T] et de même $\lim\limits_{\substack{\longrightarrow \\ a\notin p}} A_a[[T]] \subsetneq A_p$[[T] mais $\lim\limits_{\substack{\longrightarrow \\ a\notin p}} A_a[[T]]$ est dense dans A_p[[T] pour la topologie T-adique, ce qui signifie que le complété de $\mathcal{O}_p = \lim\limits_{\substack{\longrightarrow \\ a\notin p}} A_a[[T]]$ pour la topologie T-adique est exactement A_p[[T].

2) Nous allons comparer les deux schémas :

(Spec(A[[T]]),$\widetilde{A[[T]]}$) et (Spec($\hat{A}$),$\tilde{A}$[[T]]), où le second n'est pas algébrique mais formel et représente la complétion du premier le long de V(T).

Lemme 1.

Le foncteur $\tilde{A}$[[T]] de la catégorie des ouverts élémentaires de Spec(A) dans la catégorie des anneaux défini par $\Gamma(\mathrm{Spec}(A_a), \tilde{A}[[T]])$=$A_a[[T]]$ *est un faisceau.*

Démonstration.

i) Le foncteur $\tilde{A}$[[T]] est un préfaisceau car si Spec(A_a)$\subset$Spec(A_b), alors $\forall p \in \mathrm{Spec}(A), b \in p \Longrightarrow a \in p$, donc a est nilpotent dans A/bA, par suite il existe un n et un x de A tels que a^n=xb , on en déduit que b est inversible dans A_a, d'où $A_b$$\subset$$A_a$ et alors $A_b[[T]] \subset A_a$[[T]].

ii) Si deux sections de $\tilde{A}$[[T]] coïncident localement ce sont deux séries formelles dont les coefficients coïncident localement donc globalement (car $\tilde{A}$ est un faisceau sur Spec(A_a)), donc les séries formelles coïncident elles-mêmes globalement.

De même, si on considère les sections définies sur un recouvrement $(U_i)_{i\in I} = (\mathrm{Spec}(A_{a_i}))_{i\in I}$, on montrerait que des sections locales engendrent des sections globales.

iii) Etudions maintenant la fibre $\mathcal{O}_p$ du faisceau du faisceau $\tilde{A}[[T]]$ en un idéal premier p de A.

- Comme les ouverts élémentaires sont une base de la topologie $\mathcal{O}_p = \lim\limits_{\substack{\longrightarrow \\ a\notin p}} A_a[[T]]$, donc un élément de $\mathcal{O}_p$ est une série formelle appartenant à l'un des A_a $[[T]]$.

Comme p$\subset$$A_a[[T]]$, on a p$\subset$$\mathcal{O}_p$

Comme <T> $\subset A_a[[T]]$,on a <T>$\subset$$\mathcal{O}_p$

et p+<T> est l'image inverse de p dans l'homomorphisme A_a $[[T]] \longrightarrow A_a$ $[[T]]$/<T>=A_a.

Par suite p+<T> est un idéal premier dans chacun des A_a $[[T]]$; de plus, si $\alpha_0 \notin p$, la série formelle $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 T + ... + \alpha_n T^n + ...$ est inversible dans A_{α_0} $[[T]] \subset \mathcal{O}_p$, donc l'idéal p+<T> est l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_p$.

- La dimension de $\mathcal{O}_p$ est égale à celle de sa complétion A_p $[[T]]$ or, dim(A_p $[[T]]$)=dim(A_p)+1=ht(p)+1

d'où dim($\mathcal{O}_p$)=ht(p)+1.

- Nous savons que A Macaulay <=> A[[T]] Macaulay=>A[[T]]$_a$ Macaulay

et que A Macaulay =>A_a Macaulay =>$A_a[[T]]$ Macaulay

([7]).

iiii) Considérons un idéal $\mathcal{Q}$ de codimension pure dans A[[T]] (ce qui signifie que les idéaux premiers associés à $\mathcal{Q}$ sont tous de même hauteur) et comparons ht($\mathcal{Q}$) avec ht($\mathcal{Q} \underset{A[[T]]}{\otimes}$ A$_a[[T]]$), où a$\in A$:

Si a est un diviseur de zéro, $\mathcal{Q} \underset{A[[T]]}{\otimes}$ A$_a[[T]]$ est trivial; nous allons étudier sa hauteur et ses composantes premières lorsque $\mathcal{Q} \underset{A[[T]]}{\otimes}$ A$_a[[T]]$ n'est pas trivial.

Pour « passer » de $\mathcal{Q}$ à $\mathcal{Q}A_a[[T]]$ on passe par deux extensions **plates**, A[[T]]$_a$ est une localisation de A[[T]] et A$_a[[T]]$ est la complétion T-adique de A[[T]]$_a$.

Dans un premier temps nous allons étudier le comportement de $\mathcal{Q}$ dans la localisation A[[T]]$_a$:

On sait que: Ass$_B$(E $\underset{A}{\otimes}$ $B = \cup_{p\in \mathrm{Ass}_B(E)}(\mathrm{Ass}_B(B/\mathrm{p}B)$ dans le cas où B est une A-Algèbre plate et E un A-module de type fini ([9]), en prenant E=A[[T]]/$\mathcal{Q}$ on obtient

Ass(A[[T]]$_a/\mathcal{Q}A[[T]]_\mathrm{a}$)=$\cup_{p\in \mathrm{Ass}_{A[[T]]}(A[[T]]/\mathcal{Q})}(\mathrm{Ass}_A(A[[T]]_a/\mathrm{p}A[[T]]_a)$.

Bien entendu pA[[T]]$_a$ est premier si p est premier, donc les idéaux premiers associés à $\mathcal{Q}A[[T]]_a$ sont les idéaux premiers pA[[T]]$_a$.

La deuxième partie est un peu plus compliquée:

Si Y est premier dans un anneau B alors Y$\hat{B}$ ne l'est pas forcément; cependant, comme B=A[[T]]$_a$ est de Macaulay, on peut prouver que Y$\hat{B}$ n'a pas de composante immergée car on a le résultat suivant:

$\begin{matrix} B\,\text{Macauley} \\ Y\,\text{premier dans}\,B \end{matrix} \Longrightarrow \forall Y' \in \mathrm{Ass}_{\hat{B}}(\hat{B}/Y\hat{B})$, dim($\hat{B}$/Y$\hat{B}$)=dim(B/Y) (« Algèbre locale » JP Serre); ce qui permet de démontrer que Y$\hat{B}$ n'a pas de composante immergée:

Soit r=dim(BY), comme BY est aussi de Macaulay, il existe une suite B-régulière (a$_1$,a$_2$,..,a$_r$) telle que Y est associé à l'idéal <a$_1$,..,a$_r$>BY donc Y$\in$Ass($B/{<}a_1,.,a_r>$) donc, d'après le résultat rappelé précédemment :

Ass($\hat{B}$/<a$_1$,...,a$_r$>$\hat{B}$)$\supset$Ass($\hat{B}/Y\hat{B}$)

mais, d'autre part, comme $\hat{B}$ est de Macaulay, l'idéal <a$_1$,....,a$_r$>$\hat{B}$ est aussi de hauteur r et sans composante immergée, d'où Y$\hat{B}$ lui aussi.

En conclusion, en appliquant le résultat déjà utilisé à chacune des extensions plates, on obtient que $\mathcal{Q}A_a[[T]]$ est sans composante immergée et de même hauteur que $\mathcal{Q}$.

Donc si on compare un idéal $\mathcal{Q}$ de A[[T]] et son image dans la complétion de (Spec(A[[T]],$\widetilde{A[[T]]}$ le long de V(T)$\simeq$Spec(A), on voit que localement l'image d'un idéal est sans composante immergée et de même hauteur. En particulier, si $\mathcal{Q}$ est de hauteur un et localement principal, son iamge est un faisceau d'idéaux sans composante immergée, de hauteur un; ce qui suggère une équivalence entre les sous-schémas de codimension un dans Spec(A[[T]]) et ceux de (Spec(A,$\widetilde{A[[T]]}$.

v) Remarquons,d'autre part, que si p est un idéal premier de hauteur un de Spec(A), la fibre $\mathcal{O}_p$ du faisceau $\tilde{A}$[[T]] au point p est un anneau de dimension deux; ainsi les sous-schémas irréductibles de codimension un de (Spec(A),$\tilde{A}$[[T]]) ont des anneaux locaux de dimension deux; ce qui met en évidence une différence fondamentale entre schémas algbriques et schémas formels.

Comparons les deux idéaux p$\tilde{A}[[T]] \subsetneqq (p+{<}T{>})\tilde{A}$[[T]]$\subset\tilde{A}[[T]]$; le sous-schéma qu'ils définissent est $\{x \in \mathrm{Spec}(A)$, pA$_x[[T]] \neq (1)\}$=$\{x \in \mathrm{Spec}(A)$, $(p+{<}T{>})A_x[[T]] \neq (1)\}$=V(p) tandis que les deux idéaux sont distincts, p étant l'ensemble des fonctions nulles sur V(p) tandis que p+<T> est l'ensemble des fonctions « presque nulles » sur V(p).

Maintenant prenons garde à la différence entre (Spec(A[[T]]),$\widetilde{A[[T]]}$) et (Spec(A),$\tilde{A}[[T]]$): les deux espaces sous-jacents sont différents mais on a pourtant A[[T]]=Γ(Spec(A[[T]]),$\widetilde{A[[T]]}$)=Γ(Spec(A),$\tilde{A}[[T]]$)=A[[T]](=$\mathcal{O}_m$ si A est local et m son idéal maximal).

Pourtant, malgré les différences on peut comparer ces deux schémas afin d'étudier le schéma formel (Spec(A),$\tilde{A}$[[T]]) qui possède l'avantage d'avoir le même espace sous-jacent que le schéma initial (Spec(A),$\tilde{A}$). □

Théorème 2. *Théorème de Comparaison E.G.A. III.5*

Soit A un anneau local noéthérien J-adique (J=idéal de définition de la toplogie), Y=Spec(A) et Y'=V(J)⊂Y.

Soit f:X$\longrightarrow$Y un morphisme séparé de type fini, X'=f^{-1}(Y').

On définit $\hat{Y} = Y\,/\,Y'$ la compl*étion de Y le long de Y' et* $\hat{X} = X\,/\,X'$ *la complétion de X le long de X' et* $\hat{f}$ *la complétion de f le long de Y' et X'.*

Le foncteur $F \longrightarrow \hat{F} = F\,/\,X'$ *est une équivalence entre la catégorie des* $\mathcal{O}_X -$ modules *cohérents de support propre sur Spec(A) et la catégorie des* $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ *-modules cohérents de support propre sur Y'=Spf(A).*

(on appelle idéal de définition un idéal $\mathcal{I}$ *tel que, si la topologie est définie par* $I_1 \supset I_2 \supset$ *......il existe i tel que* $I_i \supset I \supset I_{i+1}$*).*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \hat{X} \arrow[l] \arrow[d, "\hat{f}"] \\ Y & \hat{Y} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Dans la partie 4 nous établiront un cas particulier de ce théorème où X=Y=Spec(A) et f=Id, les conditions étant remplies de manière triviale.

Définissons U=Y-V(m)

Y_2=Spec(A[[T]])

U_2=$Y_2 - V$(mA[[T]]).

Dans la partie 4 on voudra comparer Pic(U,$\tilde{A}$), Pic(U_2,$\widetilde{A[[T]]}$) et Pic(U,$\tilde{A}$[[T]]); on a la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
\left(U_2, \widetilde{A[[T]]}\right) \arrow[d, "i"'] & (U, \tilde{A}[[T]]) \arrow[l] \arrow[d] \\
\left(Y_2, \widetilde{A[[T]]}\right) & (Y, \tilde{A}[[T]]) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Ici U_2 est ouvert et non fermé dans Y_2=Spec(A[[T]]), ce qui supprime au moins la condition de propreté; on verra plus loin qu'en effet Pic(U,$\tilde{A}$[[T]]) n'est pas isomorphe à Pic(U_2,$\widetilde{A[[T]]}$; tandis que

$$\begin{tikzcd}
\left(Y_2, \widetilde{A[[T]]}\right) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & (Y, \tilde{A}[[T]]) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\left(Y_2, \widetilde{A[[T]]}\right) & (Y, \tilde{A}[[T]]) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

induit un isomorphisme Cl(Y,$\tilde{A}[[T]]$)$\simeq$Cl$\left(Y_2, \widetilde{A[[T]]}\right)$, ce qui permettra de substituer au calcul de Cl$\left(Y_2, \widetilde{A[[T]]}\right)$ dont l'espace sous-jacent est le même que celui de CL(Y,$\tilde{A}$).

4 Précisons !...

Soit (A,m) un anneau local, noéthérien, normal de dimension deux. Alors A vérifie les propriétés R_1 et S_2 de Serre, c'est à dire A_p est régulier pour tout idéal premier p de hauteur un et A est lui-même Macauley de dimension=profondeur=deux.

A[T] et A[[T]] sont noéthériens et normaux, d'où la possibilité de définir Cl(A), Cl(A[T]) et Cl(A[[T]]).

Rappel:

Soit X un schéma noéthérien et normal

- U un ouvert de X

- Codim(X,U-X)⩾2

- Supposons que $\forall x \in U, \mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel

Alors Pic(U)≃Cl(X).([5], « Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux », Grothendieck, SGA 2 Exposé 16)

Démonstration.

On rappelle que $Z^1(X)$ est le groupe abélien libre engendré par les faisceaux d'idéaux premiers J tels que $\inf_{x\in X}\mathrm{ht}(J_x)=1$; en fait pour les x tels que $J_x \neq 0_X$ la fonction $x \longmapsto \mathrm{ht}(J_x)$ est constante.

Soit K(X) le corps des fractions rationnelles sur X, on a $\begin{array}{lcl} p\colon f & \longmapsto & f\mathcal{O}_X \\ K^*(X) & & Z^1(X) \end{array}$; notons P(X)=Im$(p) \subset Z^1(X)$ (groupe des diviseurs principaux), alors Cl(X)=Z^1(X)/P(X).

De même on définira $Z'^1(X)$, le sous-groupe de $Z^1(X)$ dont les éléments sont les diviseurs localement principaux, alors Pic(X) est défini Pic(X)=Z'^1(X)/P(X)↪Cl(X).

Comme Pic(X) peut se calculer au moyen de la cohomologie des faisceaux le résultat peut s'avérer utile.

Soit donc $J \in Z^1(X)$, comme codim(X-U,X)⩾2 alors $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X / J) \cap U \neq \varnothing$, donc $J|U \in Z^1(U)$, d'où $Z^1(X)=Z^1(U)$ et, par suite, Cl(U)=Cl(X).

D'autre part, comme $x=J \in U, \mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel, alors $J|U \in Z'^1(U)$ et, par suite, Pic(U)=Cl(U).

(Remarquons que la condition codim ⩾2 explique la nécessité établie par Samuel de considérer les idéaux premiers de hauteur 2). □

Lemme 3.

Soient Y=Spec(A), U=Y-V(m)

Alors Cl(A)≃Pic(U)

Démonstration.

Découle du rappel □

Lemme 4.

Les points de U_2 sont de la forme suivante:

a) les idéaux premiers de hauteur un de A[[T]] *b) les idéaux premiers de hauteur un de la forme $<P,T>$ où P est un idéal premier de hauteur un de A.*

c) les idéaux premiers $\mathcal{Q}$ de hauteur deux tels que l'idéal $\mathcal{Q}_0$ de leurs termes constants est m-primaire.

Remarque : l'idéal mA[[T]] est de la catégorie c) mais n'appartient pas à U_2.

Démonstration.

mA[[T]]+<T> est l'idéal maximal de A[[T]], il est de hauteur 3 puisque $\begin{cases} A\,\text{Macauley} \\ \dim(A)=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A[[T]]\,\text{Macauley} \\ \dim(A[[T]]) \end{cases}.$

Les points de U_2 sont donc des idéaux premiers de hauteur un et deux de A[[T]]. Il reste à préciser la nature des idéaux premiers de hauteur deux dans A[[T]].

a) si T$\in\mathcal{Q}$ et ht($\mathcal{Q}$)=2, soit alors $\mathcal{Q}'=\mathcal{Q}\cap A$, on a $\mathcal{Q}'$ premier et $\mathrm{ht}(\mathcal{Q}'A[[T]])<\mathrm{ht}(\mathcal{Q})=2$, l'inégalité étant stricte puisque T$\in\mathcal{Q}$ et T$\notin\mathcal{Q}'A[[T]]$; de plus $0\leqslant\mathrm{ht}(\mathcal{Q}')\leqslant\mathrm{ht}(\mathcal{Q}'A[[T]])$, (voir par exemple 2.) et enfin $\mathcal{Q}'\neq(0)$ sinon on aurait $\mathcal{Q}=(T)$, ce qui contredirait l'hypothèse sur ht($\mathcal{Q}$).

Donc $0<\mathrm{ht}(\mathcal{Q}')=\mathrm{ht}(\mathcal{Q}'A[[T]])<2$; c'est à dire ht($\mathcal{Q}'$)=1.

b) si T $\notin\mathcal{Q}$, considérons l'idéal $\mathcal{Q}_0$ des termes constants des séries appartenant à $\mathcal{Q}$, $\mathrm{ht}(<\mathcal{Q}_0A[[T]],T>=\mathrm{prof}(\mathcal{Q}_0)+1$ puisque T peut être ajouté à une suite A-régulière contenue dans $\mathcal{Q}_0$; or, $<\mathcal{Q},T\geqslant<\mathcal{Q}_0A[[T]],T>$, donc $\mathrm{prof}(<\mathcal{Q}_0A[[T]],T>)=\mathrm{prof}(<\mathcal{Q},T>)=\mathrm{prof}(\mathcal{Q})+1=3$.

D'où prof($\mathcal{Q}$)=prof($\mathcal{Q}_0$)=2 et, par suite $\mathcal{Q}_0$ est un idéal m-primaire dans l'anneau local (A,m).

Comme l'existence de tels idéaux $\mathcal{Q}$ sera le centre du problème de la comparaison nous allons en exhiber un:

Soit (a,b) une suite régulière dans A, l'idéal <a+T,b> est engendré par une suite régulière de longueur 2 dans A[[T]] qui est un anneau de Macauley, donc les idéaux associés à <a+T,b> sont tous de hauteur deux.

D'autre part <a+T,b>$\subsetneq$mA[[T]], donc les idéaux premiers associés à <a+T,b> sont tous dans U_2.

Enfin, si $\mathcal{Q}$ est un idéal premier associé à <a+T,b> contenant T, on aurait <a+T,b>$\subset<a+T,b,T>\subset<a,b,T>\subset\mathcal{Q}$ et, ainsi, ht($\mathcal{Q}$)=prof($\mathcal{Q}$)$\geqslant$3 et donc on aurait $\mathcal{Q}=<\mathrm{mA}[[T]],T>$ qui n'est pas de hauteur deux.

Par suite les idéaux de la forme $\mathcal{Q}_0$ ne sont pas premiers mais de hauteur deux, et, comme m est le seul premier (de A) de hauteur deux , ils sont m-primaires.

Remarque:

Dans cette discussion on a utilisé ht($\mathcal{Q}_0$)=ht($\mathcal{Q}_0A[[T]]$) qui n'est pas vraie dans le cas A$\subset B$, B Algèbre A-plate sur A. (voir la discussion du 2.). □

Lemme 5.

Si $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de hauteur un dans A[[T]] ou si $\mathcal{Q}=<\mathcal{Q}'A[[T]],T>$ où $\mathcal{Q}'$ est un idéal premier de hauteur un dans A

Alors $A[[T]]_{\mathcal{Q}}$ est factoriel.

Démonstration.

A[[T]] est noéthérien et normal donc R_1 c'est à dire $\mathrm{A[[T]]}_{\mathcal{Q}}$ est régulier pour tout idéal premier $\mathcal{Q}$ de hauteur un.

Etudions le cas où $\mathcal{Q} = <\mathcal{Q}'A[[T]]$,T>.

Considérons la complétion T-adique $\widehat{A[[T]]_{<\mathcal{Q}_0,T>}}$ de A[[T]]$_{\mathcal{Q}}$: A[[T]]$_{\mathcal{Q}}$ est un anneau de ZAriski pour la topologie T-adique (puisque T$\in\mathcal{Q}$), donc on a $0 \longrightarrow \mathrm{Cl}(A[[T]]_{\mathcal{Q}}) \longrightarrow \mathrm{Cl}\Big(\widehat{A[[T]]_{\mathcal{Q}}}\Big)$ (théorème de Mori) or, $\widehat{A[[T]]_{\mathcal{Q}}} = A_{\mathcal{Q}_0}[[T]]$ qui est factoriel (et même régulier).

D'où A[[T]]$_{\mathcal{Q}}$ est factoriel dans les cas où $\mathcal{Q}$ est de hauteur un ou bien de hauteur deux contenant T. □

Considérons maintenant le schéma S$_2$=(U$_2$, $\widehat{A[[T]]}$) et sa complétion le long du sous-schéma V(T)$\cap$ U_2.

Lemme 6.

La complétion de S_2 le long de $U_2 \cap V(T)$ est le schéma (S)=(U,$\tilde{A}[[T]]$).

Démonstration.

La variété de T dans U$_2$ est le support des idéaux premiers de la forme <pA[[T]],T> où p est un idéal premier différent de m dans A (lemme 4) d'où l'application Φ: $\begin{array}{ccc} V(T)\cap U_2 & \longrightarrow & U \\ <\mathrm{p}A[[T]],T> & \longmapsto & p \end{array}$.

Considérons le recouvrement Spec(A[[T]])$_a$ $\cup$Spec($A[[T]]$)$_b$ de U$_2$, où (a,b) est une suite régulière dans A (tout idéal premier non contenu dans Spec(A[[T]])$_a$ $\cup$Spec($A[[T]]$)$_b$ contient donc a et b , c'est donc m).les ouverts

Alors Spec(A[[T]])$_a \cap V(T) = \{<\mathrm{p}A[[T]],T>, a\notin p\}$ donc par Φ Spec(A[[T]])$_a \cap V(T)$ et Spec(A$_a$) se correspondent (de même pour b).

La complétion de Spec(A[[T]])$_a$ le long de son intersection avec V(T) est donc l'espace Spec(A[[T]])$_a$ $\cap V(T)(\simeq$Spec(A_a) , muni du faisceau structurel $\displaystyle\lim_{\substack{\longleftarrow \\ n}} (A[[T]])_a/<T^n>$ =A$_a$[[T]] ,

d'où l'isomorphisme, annoncé au 3., entre la complétion de (U$_2$, $\widetilde{A[[T]]}$) le long de V(T)$\cap U_2$ et (U,$\tilde{A}[[T]]$). □

Considérons maintenant le schéma (Y$_2$, $\widetilde{\mathrm{A[[T]]}}$) et sa complétion le long de V(T).

Proposition 7. *(deuxième théorème de comparaison-cas particulier)*

La complétion de (Y_2, $\widetilde{A[[T]]}$) le long de V(T) est le schéma (Y,$\tilde{A}[[T]]$) défini plus haut.

Le foncteur $F \longrightarrow \hat{F}$ définit une équivalence entre les faisceaux d'idéaux de $\widetilde{A[[T]]}$ et de $\tilde{A}[[T]]$ sur Y_2 et Y.

En particulier, un idéal $\mathcal{Q}$ de A[[T]] correspond à un faisceau d'idéaux dont le support est contenu dans le support de l'idéal $\mathcal{Q}_0$ des termes constants des séries formelles de $\mathcal{Q}$.

En fait, nous avons déjà comparé (U$_2$, $\widetilde{A[[T]]}$) et (U,$\tilde{A}$[[T]]) donc il nous suffira de considérer un ouvert qui contient Y$_2$$-U_2 = V$(mA$[[T]]$); le seul ouvert élémentaire de Y$_2$ qui contienne mA[[T]] est en fait Spec(A[[T]])=Y$_2$.

Démonstration.

Considérons l'ouvert Y$_2$:

La complétion de (Spec(A[[T]],$\widetilde{A[[T]]}$) le long de V(T) est (Spec(A), $\lim\limits_{\overleftarrow{n}} \widetilde{A[[T]]/<T^n>}$), où Γ(Spec(A), $\lim\limits_{\overleftarrow{n}} \widetilde{A[[T]]/<T^n>}$)=A[[T]], donc on peut étendre l'isomorphisme du lemme 6 à Y_2 tout entier:

La complétion de ($Y_2, \widetilde{A[[T]]}$) le long de V(T) est (Y,$\tilde{A}[[T]]$).

Considérons maintenant un idéal premier $\mathcal{Q}$ de A[[T]], son image dans la complétion est le faisceau d'idéaux $\mathcal{Q} \otimes_{A[[T]]} \widetilde{A[[T]]}$; sur l'ouvert Spec($A_a$) on obtient donc $\mathcal{Q}A_a[[T]]$ et on a vu au 2. que si a appartient à un idéal premier associé à $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}A_a[[T]]$ sera trivial et, sinon, $\mathcal{Q}A_a[[T]]$ est un idéal de même hauteur que $\mathcal{Q}$, sans composantes immergées.

Dans la fibre en un point p $\in$Spec(A_a), que nous avons désignée par $\mathcal{O}_p$, on aura alors $\mathcal{Q}\mathcal{O}_p$ non trivial puisque sa complétion T-adique, qui est $\mathcal{Q}A_p[[T]]$, n'est pas triviale; celà suffit car $\mathcal{O}_p$ est de Zariski et sa complétion est parfaitement plate sur $\mathcal{O}_p$.

D'autre part, considérons la fibre $\mathcal{O}_m$ en m, on sait que c'est A[[T]], donc l'image de $\mathcal{Q}$ dans cette fibre est exactement l'idéal $\mathcal{Q}$; ceci suffit à définir un foncteur inverse de F$\longrightarrow\hat{F}$, de la manière suivante:

Si $\mathcal{L}$ désigne un faisceau d'idéaux sur (Y,$\tilde{A}[[T]]$), soit $\mathcal{L}_m$ son image dans la fibre de m, c'est un idéal I de A[[T]], donc il définit un faisceau d'idéaux sur ($Y_2, \widetilde{A[[T]]}$).

Il est clair que ces deux foncteurs sont réciproques. □

Remarque:

Sans la connaissance de l'image de $\mathcal{L}$ dans la fibre en m il serait bien difficile de construire le faisceau d'idéaux sur Spec(A[[T]]), ce qui explique que l'équivalence que nous venons d'établir ne se restreint pas à U_2 et U. (d'où l'usage de la propreté dans l'énoncé du Théorème de Comparaison).

Lemme 8.

$\mathcal{O}_p$ est un anneau de Zariski pour la topologie T-adique

Démonstration. $\mathcal{O}_p = \lim\limits_{\overrightarrow{a \notin p}} A_a[[T]]$; considérons une série de la forme 1+T$\alpha(T)$ dans $\mathcal{O}_p$, c'est alors une série formelle à coefficients dans un certain anneau A_a, elle est donc inversible dans $A_a\,[[T]] \subset \mathcal{O}_p$; ce qui suffit à établir que 1+T$\alpha(T)$ est inversible dans $\mathcal{O}_p$ et donc que l'anneau $\mathcal{O}_p$ est de Zariski. (On aurait pu remarquer aussi que <T> est inclus dans l'idéal maximmal de $\mathcal{O}_p$)

Remarquons que $(A[[T]])_a$, qui est la localisation de l'anneau de Zariski A[[T]] en un élément a de A n'est pas de Zariski puisqu'une série formelle de $(A[[T]])_a$ est de la forme 1+T$\alpha(T)$, où les coefficients ont un dénominateur commun dans A_a mais son inverse n'est pas dans $(A[[T]])_a$, seulement dans $A_a[[T]]$. □

Corollaire de la Proposition 7:

L' équivalence de la proposition 7 induit un isomorphisme entre Cl(A[[T]])=Cl(Y_2,$\widetilde{A[[T]]}$) et Cl(Y,$\tilde{A}$[[T]]).

Remarque :

Le même résultat serait vrai dans le cas général

- A normal, noéthérien, de dimension$\geqslant$2

- S={singularités} :codim(S)$\geq$2

- U=Spec(A)-S

- U_2=Spec(A[[T]])- S', où S'={idéaux premiers $\mathcal{Q}$ de A[[T]] tels qu'il exsite p$\in S$ vérifiant p$\subset\mathcal{Q}$}.

(On remarquera que S'= fermeture deS dans Spec(A[[T]]).

Proposition 9.

Si (A,m) est un anneau local, noéthérien, normal de dimension 2

Cl(A[[T]])$\simeq\mathrm{Pic}(U,\tilde{A}[[T]])$.

Démonstration.

On a vu que Cl(A[[T]])$\simeq$Cl$(Y,\ \tilde{A}[[T]])$, il suffit de vérifier les conditions du résultat rappelé au début de 4.

- (Y,$\tilde{A}[[T]]$) est normal et noéthérien

- Codim_Y(m)=2

- Si p$\in U, \mathcal{O}_p$ admet A_p[[T]] comme complétion T-adique, il est lui-même de Zariski donc

$A_p[[[T]]]$ factoriel $\Longrightarrow\mathcal{O}_p$ factoriel

Or p est de hauteur 1, donc A_p est régulier (R_1) d'où $A_p[[T]]$ est régulier et, par suite, factoriel.

Donc Cl(Y,$\tilde{A}[[T]]$)$\simeq\mathrm{Pic}(U,\tilde{A}[[T]])$.

Résultat analogue dans les hypothèses de la remarque précédente. □

Lemme 10.

$$\textit{Pic}(U,\tilde{A}[[T]]) = \varprojlim_n \mathrm{Pic}(U,\tilde{A}[[T]]/{<}T^n{>})$$

Démonstration.

Avant tout rappelons Pic(U,$\tilde{A}[[T]]\simeq H^1(U,\tilde{A}[[T]]^*)$ ([5], E.G.A 0.5.6.2) et, comme les groupes de cohomologie sont définis à partir de sections locales de $\tilde{A}[[T]]^*$ nous allons voir que le foncteur H^1 commute avec la limite projective:

Soit un recouvrement (U_i) et des sections locales (α_{ij}) définies par

- $\alpha_{\mathrm{ij}}\in(U_i\cap U_j,\tilde{A}[[T]]^*)$

- $\alpha_{\mathrm{ij}}\alpha_{\mathrm{jk}}=\alpha_{\mathrm{ik}}$ sur $U_i\cap U_j\cap U_k$

or α_{ij} est inversible dans $\Gamma(U_i\cap U_j,\tilde{A}[[T]])$, ce qui signifie que, si $\alpha_{\mathrm{ij}}=\sum\alpha_{\mathrm{ij}}^k T^k$ alors $\alpha_{\mathrm{ij}}^0\ \in\Gamma\big(U_i\cap U_j,\tilde{A}^*\big)$ et, de manière générale, $\alpha_{\mathrm{ij}}\alpha_{\mathrm{jk}}=\alpha_{\mathrm{ik}}\Longleftrightarrow\forall n\geqslant1,\alpha_{\mathrm{ij}}\alpha_{\mathrm{jk}}=\alpha_{\mathrm{ik}}\,(\mathrm{mod}\,T^n)$..

d'où l'isomorphisme:

$$H^1(U,\ \tilde{A}[[T]]^*) = H^1\left(U,\ \varprojlim_n \widetilde{A[[T]]}^*/{<}T^n{>}\right)\simeq \varprojlim_n \mathrm{Pic}\Big(U,\widetilde{A[[T]]}^*/{<}T^n{>}\Big)$$ où les morphismes du système projectif des H^1 (ou des Pic) sont induits de manière naturelle par le système projectif $\varprojlim_n \widetilde{A[[T]]}^*/{<}T^n{>}$.

L'élément final du système projectif est Pic$\Big(U, \widetilde{A[[T]]}^*/<T>\Big)$=Pic$(U,\tilde{A})$; en fait Pic$(U,\tilde{A})$ est facteur direct du système projectif ([2]). □

Lemme 11.

$\widetilde{A[[T]]}^*/<T^n> = A^*.\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}$

Démonstration.

$\alpha_0+\alpha_1T+....+\alpha_{n-1}T^{n-1}$ est inversible si et seulement si α_0 et $1+\alpha_1\alpha_0^{-1}T+...+\alpha_{n-1}\alpha_0^{-1}T^{n-1}$ le sont; d'où l'homomorphisme de groupes multiplicatifs

$\alpha_0+\alpha_1T+....+\alpha_{n-1}T^{n-1}\longmapsto(\alpha_0,1+\alpha_1\alpha_0^{-1}T+...+\alpha_{n-1}\alpha_0^{-1}T^{n-1})$ qui est un isomorphisme et induit la décomposition annoncée.

□

D'où l'isomorphisme:

$n\geqslant 2$

$\mathrm{H}^1\Big(U,\widetilde{A[[T]]}^*/<T^n>\Big)=H^1(U,A^*)\oplus H^1\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)$=Pic(U,$\tilde{A}$)$\oplus H^1\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)$

donc Pic(U,$\widetilde{A[[T]]}$)$\simeq$Pic(U,$\tilde{A}$)$\oplus \varprojlim_{n\geqslant 2} H^1\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)$, où les morphismes sont induits par le système projectif $\varprojlim_{n} \widetilde{A[[T]]}/<T^n>$.

Plus précisément, considérons les suites exactes:

$0\longrightarrow\dfrac{<T^n>}{<T^{n+1}>}\overset{s_n}{\longrightarrow}\dfrac{(1+<T>)^*}{<T^{n+1}>}\overset{r_n}{\longrightarrow}\dfrac{(1+<T>)^*}{<T^n>}\longrightarrow 1$, où s$_n$:$\alpha T^n\longmapsto 1+\alpha T^n$ et r$_n$ est le morphisme quotient.

On en déduit la suite exacte longue

$H^0\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^{n+1}>}\Big)\overset{\bar{p_n}}{\longrightarrow}H^0\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)\overset{\vartheta_0}{\longrightarrow}H^1\Big(U,\dfrac{\widetilde{<T^n>}}{<T^{n+1}>}\Big)\overset{\bar{s_n}}{\longrightarrow}H^1\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^{n+1}>}\Big)\overset{\bar{r_n}}{\longrightarrow}H^1\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)\overset{\vartheta_1}{\longrightarrow}....$

or $H^0\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^{n+1}>}\Big)\overset{\bar{p_n}}{\longrightarrow}H^0\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)$ est trivialement surjectif, donc Ker(ϑ_0)=$H^0\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)$, c'est à dire $\vartheta_0=0$.

De plus le groupe additif $\dfrac{<T^n>}{<T^{n+1}>}$ est un groupe additif isomorphe à A d'où la suite exacte

$$0\longrightarrow H^1(U,\tilde{A})\overset{\bar{s_n}}{\longrightarrow}H^1\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^{n+1}>}\Big)\overset{\bar{r_n}}{\longrightarrow}H^1\Big(U,\dfrac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)\overset{\vartheta_1}{\longrightarrow}....$$

et, donc, la proposition suivante:

Proposition 12.

Soient A normal, noéthérien, U défini comme plus haut:

$$Cl(A[[T]])\simeq \mathrm{Cl}(A)\oplus \underset{n\geqslant 2}{\overset{\lim}{\longleftarrow}}\; H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)$$

où les morphismes du système inverse sont liés par la suite exacte longue

$$0\longrightarrow H^1(U,\tilde{A})\overset{\bar{s_n}}{\longrightarrow} H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^{n+1}>}\Big)\overset{\bar{r_n}}{\longrightarrow} H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)\overset{\vartheta_1}{\longrightarrow} H^2(U,\tilde{A})\longrightarrow\ldots\ldots$$

Ceci précise les résultats de Danilov ([3]) et exhibe le complément direct de Cl(A) dans Cl(A[[T]].

Remarquons que, comme $H^1(U,\tilde{A})\simeq H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^2>}\Big)$ par l'homomorphisme $\alpha\longmapsto 1+\alpha T$, on a la condition suffisante $H^1(U,\tilde{A})=0$ pour Cl(A)=Cl(A[[T]]); en effet

$H^1(U,\tilde{A})=0\Longleftrightarrow H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^2>}\Big)=1$

et par suite $0\longrightarrow 0\longrightarrow H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^3>}\Big)\longrightarrow 1\overset{\vartheta_1}{\longrightarrow} 0$

et de proche en proche, $\forall n\geqslant 2, H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)=1$

donc Cl(A[[T]])$\simeq$Cl(A).

Inversement si il existe un n avec $H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)=1$ alors $H^1(U,\tilde{A})=0$ et, soit les $H^1\Big(U,\frac{\widetilde{1+<T>}^*}{<T^k>}\Big)$ sont tous nuls, soit non triviaux à partir d'un certain rang; il faudra , dans ce cas, étudier avec attention la limite projective.

Corollaire:

Si A est un anneau noéthérien, normal

Si l'ensemble des singularités est fermé et de codimension $\geqslant$2

Si $H^1(U,\tilde{A})=0$ avec U=Spec(A)-S

Alors Cl(A[[T]])$\simeq$Cl(A).

5 Calcul de $H^1(U,\tilde{A})$

Considérons un anneau local, noéthérien, normal, de dimension n$\geqslant$2 et de Macauley en dimension 2 (S_2).

Pour que U=Spec(A)-V(m) soit recouvert par la famille d'ouverts élémentaires $(\mathrm{Spec}(Aa_i))_{i=1....r}$ il faut et il suffit que $\{a_1, ..., a_r\}$ contienne une suite régulière maximale, car, sinon il existe p$\neq m$ tel que $<a_1..., a_r>\subset p$ et alors p n'appartient pas à $\cup\mathrm{Spec}(A_{a_i})$.

D'après l'hypothèse sur la dimension de A, nous savons qu'il existe trois éléments a,b,c de A tels que (a,b) soit une suite régulière (en effet prof(A)$\geqslant$2), on supposera de plus que a,b,c sont premiers et premiers entre eux, deux à deux.

Lemme 13.

Un cocycle de dimension 1 de $\tilde{A}$, défini sur le recouvrement Spec(A_a)$\cup\mathrm{Spec}(A_b)\cup\mathrm{Spec}(A_c)$ est un triplet ($Xb^{-m}c^{-n},\mathrm{Yc}^{-n}a^p,\mathrm{Za}^{-p}b^{-m}$), où X,Y,Z sont des éléments de A et $Xb^{-m}c^{-n}-\mathrm{Yc}^{-n}a^p+\mathrm{Za}^{-p}b^{-m}$=0.

Un tel cocyle est trivial si et seulement si $X\in\mathrm{Ab}^m+\mathrm{Ac}^n$.

Démonstration.

Par définition un tel cocycle est un triplet (X$b^{-m}c^{-n}$, Y$c^{-r}a^{-p}$, Z$a^{-q}b^{-s}$) tel que X$b^{-m}c^{-n}$ $-$ Y$c^{-r}a$ $-^{p}$ +Z$a^{-q}b^{-s}$ =0; nous allons montrer qu'en fait m=s,p=q,n=r.

Supposons que X,Y,Z soient réduits par rapport à b et c, resp c et a, a et b.

Si q>p alors X$b^{-m}c^{-n}a^{q}$ $-$ Y$c^{-r}a^{q-p} + Zb^{-s}$ =0 donc a|Zb^{-s}, comme a et b sont premiers entre eux Z se réduit par rapport à a, il y a donc contradiction.

En répétant ce calcul on obtient p=q, m=s, n=r, d'où le cocycle sous la forme X$b^{-m}c^{-n}$, Y$c^{-n}a^{p}$, Z$a^{-p}b^{-m}$), où X,Y,Z sont des éléments de A et X$b^{-m}c^{-n}$ $-$ Y$c^{-n}a^{p}$ + Z$a^{-p}b^{-m}$=0. (*)

Par définition ce cocycle sera trivial si et seulement si il existe (β,γ) dans A et (v,u) des entiers tels que

X$b^{-m}c^{-n} = -\beta c^{-v} + \gamma b^{-u}$ (et de semblables relations pour Y et Z); en fait il suffit que l'un des trois éléments X,Y,Z vérifie une telle relation pour que le cocycle soit trivial

en effet

Si X$b^{-m}c^{-n} = -\beta c^{-v} + \gamma b^{-u}$ alors par un argument analogue X=-$\beta b^{m} + \gamma c^{n}$

alors $\left\{ \begin{array}{l} X = -\beta b^{m} + \gamma c^{n} \\ \mathrm{X}b^{-m}c^{-n} - \mathrm{Y}c^{-n}a^{-p} + \mathrm{Z}a^{-p}b^{-m} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow c^{-n}(\beta + \mathrm{Y}a^{-p}) = \mathrm{b}^{-m}(\gamma - \mathrm{Z}a^{-p})$

et, comme b et c sont premiers entre eux, on obtient

$\mathrm{a}^{p}\beta + Y = \alpha c^{n} \Longleftrightarrow Y = \alpha c^{n} - \beta a^{p}$

et

$\mathrm{a}^{p}\gamma - Z = \alpha b^{m} \Longleftrightarrow Z = -\alpha b^{m} + \gamma a^{p}$

ce qui assure la trivialité.

Lemme 14.

Soit (A,m) un anneau local, noéthérien, normal tel qu'il existe un ouvert U, vérifiant codim(Spec(A)-U) ⩾2.

Alors $H^{1}(U,\tilde{A}) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{prof}(A) \geqslant 3$.

□

Démonstration.

Considérons un recouvrement de la forme (Spec(Aa_i))$_{i=1,\dots,r}$ de U (où la suite (a_1, ..., a_r) est régulière maximale) et en particulier trois ouverts Spec(A_a),Spec(A_b), Spec(A_c) , avec a,b,c premiers entre eux, et (b,c) une suite régulière; alors un cocycle est de la forme X$b^{-m}c^{-n}$, Y$c^{-n}a^{p}$, Z$a^{-p}b^{-m}$), où X,Y,Z sont des éléments de A et X$a^{p}$$-Yb^{m}$ + Zc^{n}=0, s'il est trivial $\exists(\beta,\gamma) \in A^2, X = \beta b^{m} - \gamma c^{n}$, c'est à dire si a^{p} n'est pas diviseur de zéro dans A/Ab^{m}+Ac^{n}, donc a n'est pas un diviseur de zéro dans A/Ab+Ac donc prof(A)⩾3.

Réciproquement, si prof(A)⩾3 on peut trouver une suite régulière (a,b,c) et, en considérant un cocycle sur Spec(A_a),Spec(A_b), Spec(A_c) on obtient une situation analogue aux calculs du lemme 13 et donc tout cocycle est nul. □

Corollaire:

Si A est un anneau local, noéthérien, normal d'idéal maximal m (où m est une singularité isolée); si A est S_3 alors $\mathrm{H}^1(U,\tilde{A}) = 0$ où U=Spec(A)-V(m), d'où Cl(A)≃Cl($A[[T]]$).

On a A_p régulier pour tout p$\neq m$, donc en considérant les idéaux de hauteur 3 on peut appliquer chaque anneau A_p la proposition 12 et le lemme 14, donc pour chaque anneau A_p (pour p de hauteur 3) on a $Cl(A_p[[T]]) \simeq Cl(A_p)=0$.

En continuant par récurrence sur la hauteur des idéaux premiers de A on obtient $Cl(A[[T]]) \simeq Cl(A)$.

On peut même établir:

Corollaire:

Soit un anneau noéthérien, normal, factoriel A, ayant la propriété S_3, tel que $\forall p \in Spec(A)$, de hauteur deux, $A_p[[T]]$ est factoriel

Alors A[[T]] est factoriel.

(à l'aide du résultat précédent et d'un théorème de Samuel ([10]) suivant lequel , il suffit de vérifier que $A_m[[T]]$ est factoriel pour tout idéal m maximal, ce qui nous ramène aux cax précédents).

Notons en passant que nous avons ainsi répondu à une conjecture de Samuel (« on unique factorization domains »), établie par Scheja [13] sous la même hypothèse (prof(A)$\geqslant$3) mais dans un cadre plus étroit (Cl(A)=0 et A complet).

6 Sur un contre-exemple de Samuel

Nous allons retrouver et interpréter la condition suffisante établie par P.Samuel pour que A[[T]] ne soit pas factoriel, de manière plus générale.

Proposition 15.

Si A est normal, noéthérien, local, de dimension deux tel qu'il existe 3 éléments premiers a,b,c tels que $a^{i-1} \notin Ab + Ac$ et $a^i \in Ab^j + Ac^k$, où (i,j,k) sont des entiers naturels tels que (i,j,k)= ijk-ij-jk-ki$\geqslant$0

Alors Cl(A[[T]])$\neq$Cl(A).

Démonstration.

Soit U=Spec(A)-$\{m\}$

U=$Spec(A_a) \cup Spec(A_b) \cup Spec(A_c)$

Considérons le cocycle suivant $(a^{(-ik+1)(i-1)} c^{-1} b^{(i,j,k)+ki-1} F_1, -a^{(i-1)} b^{-1} c^{-1}, -\delta c^{ij-1} b^{-1} a^{(-ik+1)(i-1)})$

où δ et F_1 sont choisis de la manière suivante

$a^{(-ik+1)} = \delta c^{ij} + F_1(b^k, c^j) b^{(i,j,k)+ki}$, F_1 étant un polynôme homogène de degré i en b^ket c^j et $\delta \in A$; l'existence de F_1 et de δ a été établie par Samuel dans [10].

Ce cocycle n'est pas trivial parce que

$a^{(i-1)} c^{-1} b^{-1} = \beta' b^{-1} - \gamma' c^{-1}$ signifierait que $a^{i-1} = \beta' c - \gamma' b$, ce qui ne peut être.

Par l'homorphisme s_1 on obtient le cocycle suivant, non trivial, dans $H^1\left(U, \widehat{\frac{1+<T>}{<T^2>}}^*\right)$:

$$(1 + a^{(-ik+1)(i-1)} c^{-1} b^{(i,j,k)+ki-1} F_1 T, 1 - a^{(i-1)} b^{-1} c^{-1} T, 1 - \delta c^{ij-1} b^{-1} a^{(-ik+1)(i-1)} T).$$

A partir de ce cocycle nous allons construire un élément de $\underset{\underset{n}{\longleftarrow}}{\lim} \; H^1\left(U, \widehat{\frac{1+<T>}{<T^n>}}^*\right)$, ce sera un triplet de la forme (β, α, γ), où

$\beta = 1 + \mathrm{a}^{(-\mathrm{ik}+1)(i-1)}\mathrm{c}^{-1}b^{(i,j,k)+\mathrm{ki}-1}F_1\mathrm{T} + \beta_2 T^2 + \ldots\ldots \in A_{\mathrm{ac}}[[\mathrm{T}]]$

$\alpha = 1\text{-}\mathrm{a}^{(i-1)}b^{-1}c^{-1}T \qquad\qquad\qquad + \alpha_2 T^2 + \ldots\ldots. \in A_{\mathrm{bc}}[[T]]$

$\gamma = 1 - \delta c^{\mathrm{ij}-1}b^{-1}a^{(-\mathrm{ik}+1)(i-1)}\mathrm{T} + \ldots\ldots \qquad + \gamma_2 T^2 + \ldots\ldots. \in A_{\mathrm{ab}}[[T]]$

avec $\beta = \alpha\gamma$ (**).

Le seul problème c'est de réaliser (**):

il faut donc $\beta_2 - \mathrm{a}^{(-\mathrm{ik}+2)(i-1)}\mathrm{c}^{-2}b^{(i,j,k)+\mathrm{ki}-2}F_1 = \gamma_2$.

Posons $\gamma_2 = 0$ et $\beta_2 = \mathrm{a}^{(-\mathrm{ik}+2)(i-1)}\mathrm{c}^{-2}b^{(i,j,k)+\mathrm{ki}-2}F_1$; continuons ainsi $\gamma_3 = \ldots \doteq \gamma_{\mathrm{ik}-1} = 0$ et de même $\beta_3, \ldots$, jusque $\beta_{\mathrm{ik}-1} = \mathrm{a}^{(-\mathrm{ik}+\mathrm{ik}-1)(i-1)}\mathrm{c}^{-\mathrm{ik}+1}b^{(i,j,k)+1}F_1$;

puis $\beta_{\mathrm{ki}} - \mathrm{c}^{-\mathrm{ik}}b^{(i,j,k)}F_1 = \gamma_{\mathrm{ik}}$ mais, en utilisant les calculs de Samuel, on obtient

$\mathrm{a}^{\mathrm{ik}(i-1)}b^{(i,j,k)}F_1 = \mathrm{b}^{2(i,j,k)+\mathrm{ki}}F_2 + \gamma' c^{2\mathrm{ik}}$, où $\gamma' \in A$, F_2 un polynôme homogène de degré 2i en b^k et c^j.

Alors $\beta_{\mathrm{ki}} = \mathrm{b}^{2(i,j,k)+\mathrm{ki}}F_2\mathrm{a}^{-\mathrm{ik}(i-1)}c^{-\mathrm{ik}}$ et $\gamma_{\mathrm{ik}} = \text{-}\gamma' a^{-\mathrm{ik}(i-1)}\ c^{\mathrm{ik}}$ conviennent et on peut continuer exactement comme dans l'article original de Samuel.

Ce qui fournit un élément non trivial de $\underset{\substack{\longleftarrow \\ n}}{\lim}\ H^1\Big(U, \frac{\widehat{1+<T>}^*}{<T^n>}\Big)$. $\square$

Ce calcul nous montre que l'invariant (i,j,k)=ijk-ij-jk-ki mis en évidence par Samuel a une fonction encore plus riche, puisque lorsqu'il est non nul Cl(A[[T]])$\neq$Cl(A).

Exemple 16.

Soit un anneau général de la forme A=k(x,y,z)/$<\mathrm{z}^2 - \mathrm{ax}^j - \mathrm{by}^k>$, où (2,j,k)$\geqslant$0. alors Cl(A[[T]])$\supsetneq$ Cl(A).

En particulier A[[T]] ne peut être factoriel.

On sait qu'en général l'équation $\mathrm{z}^2 = \mathrm{ax}^j + \mathrm{by}^k$ définit une surface normale (recouvrement double).

De plus si (j,k) est différent de (2,n), (3,3), (3,4),(4,4) alors (2,j,k)$\geqslant$0.

Ceci répond partiellement à des questions suggérées par Samuel ([10]) et retrouve un exemple de Salmon (« Sur un problema posta da P.Samuel ») cité par Danilov ainsi que l'exemple B: k[[x,y,z]]/$<\mathrm{z}^2\text{-}\mathrm{x}^3\text{-}\mathrm{uy}^6>$, de même que k[[x,y,z]]/$<\mathrm{az}^3\text{-}\mathrm{px}^3\text{-}\mathrm{p}^2\mathrm{y}^3>$([4]).

Remarque 17.

Les cas étudiés par Brieskorn, Lipman,..d'anneaux d'invariants dans l'action de groupes finis pour lesquels (i,j,k)<0 exigeront d'autres méthodes.

7 Bibliographie

[1] Bourbaki, Algèbre Commutative III,IV

[2] Danilov, « The group of Ideal Classes of a Completed Ring », Math. USSR Sbornik, vol. 6, 1968, n°4

[3] Danilov, « Rings with a Discrete Group of Divisors Classes », Math. USSR Sbornik, vol 12, 1970, n°3

[4] Danilov, « On a conjecture of Samuel », Math. USSR Sbornik, vol 10, n∘10

[5] Grothendieck, E.GA, S.G.A.

[6] Grothendieck, Local Homology

[7] Kaplanski, Commutative Rings,

[8] Lipman, « Rational Singularities », IHES, 1969, n∘36

[9] Matsumura, « Commutative Algebra », W.A. Benjamin, 1970

[10] Samuel, « On unique Factorization Domains », Illinois J. of Math.,1961

[11] Samuel, « Sur les anneaux factoriels », Bull. Soc. Math. de France, 1961

[12] Samuel, « Classes de Diviseurs et Dérivées Logarithmiques », Topology, vol. 3, Suppl.1,1964

[13] Scheja, « Einige Beispiele Faktorieller Lokaler Ringe », Math. Annalen , n∘172, 1967

ô ù ê à ç â è î ï é