Complément aux Théorèmes de Gerstenhaber et Laffey

patrick TELLER

Résumé.

Les matrices de Weyr sont un substitut, récemment redécouvert ([3],[4],[7]), aux matrices de Jordan; de même que toute matrice nilpotente est semblable à une somme directe de blocs de Jordan nilpotents, toute matrice nilpotente est aussi semblable à une somme directe de blocs de Weyr nilpotents.

Contrairement au commutant d'une matrice en blocs de Jordan [4] qui possède une forme assez inconfortable le commutant d'une matrice en blocs de Weyr est un ensemble de matrices qui possèdent une forme intéressante, de type fractal; on trouvera les définitions générales sur les matrices fractales dans [7].

Les propriétés des matrices fractales nous permettent des démonstrations élémentaires des Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey-Lazarus sur la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par deux matrices. ([2],[5]).

Le Théorème de Gerstenhaber établit que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que AB=BA la dimension de de $\mathbb{K}[I,\ A,\ B]$ est inférieure ou égale à n avec égalité lorsque l'une des deux (au moins) est cyclique (non derogatory); nous démontrons cette même inégalité et établissons une condition **nécessaire et suffisante** d'égalité dans le cas où B est une matrice de Weyr, ce qui permet de définir et décrire les matrices « admissibles ».

L'article de Laffey et Lazarus étudie l'égalité dans le seul cas d'une partition (z_1,..,z_{t_1}) où z_1=..=z_{t_1} et retrouve la forme d'une famille génératrice de $\mathbb{K}[I, A, B]$ que l'on doit à [1]; nous explicitons dans le cas d'une partition quelconque les exposants intervenant dans ces deux présentations.

$\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos.

1. Etude algebrique d'une algebre de matrices fractales

On considère ici une matrice de Weyr W=W(z_1,..,z_{t_1}) et l'algèbre F=F(z_1,..,z_{t_1}).

1.1. L'anneau F.

Proposition 1. *L'idéal WF*

L'ensemble WF=$\{W\mathbb{M}, M\in F\}$ est un idéal (bilatère).

Démonstration.
découle du fait que F est le commutant de W. □

Théorème 2.
Soit une matrice fractale A, l'ensemble des polynomes $P(X)$ tels que $P(A)\in W\mathbb{K}[A,W]$ est un idéal, non réduit à $\{0\}$; on appellera polynome réducteur le générateur unitaire de cet idéal.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que W$\mathbb{K}[A,W]$ est un idéal et que le polynome minimal de A convient; on en déduit donc que le polynome réducteur de A divise son polynome minimal.
Le polynome réducteur de la matrice A sera noté Δ_A. □

Proposition 3. *Les inverses des éléments de F*
Soit $M\in F\cap\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $M^{-1}\in F$

Démonstration.
Si M commute avec W et est inversible, son inverse commute avec W. □

1.2. L'espace vectoriel F.

Définition 4. *Domaine admissible, Classes, Espace admissible, Origines et Extrémités*

Nous allons considérer les matrices fractales comme des éléments de $\mathbb{K}^{n^2}$, dont la structure est celle de matrices triangulaires par blocs, en rapport avec la partition associée.

On pourra repérer sur l'exemple suivant que les cases marquéees d'un zéro sont nécessairement nulles, tandis que les cases colorées (de l'exemple) **peuvent** être de valeur non nulle (ou pas); on les appellera admissibles.

On appellera « domaine admissible» l'ensemble des cases admissibles (DA); si M est une matrice fractale ses termes non nuls se trouvent dans le domaine admissible.

On remarquera aussi que pour chaque matrice fractale certaines cases doivent porter la meme valeur, ce qui définit une relation d'équivalence parmi les cases du domaine admissible (par exemple ligne1-colonne1 avec ligne 5-colonne5 et ligne9-colonne9 dans la première matrice de l'exemple ci-dessous); les classes seront appelées « paquets », elles constituent une base de F; chaque paquet possède une origine (la case dont le numéro de ligne est le plus grand) et une extrémité (la case dont le numéro de ligne est le plus petit)

Exemple 5.

les cases correspondant à une même classe portent des lettres identiques

$$\begin{pmatrix} a & b & f & o & d & i & s & l & w & X \\ & c & g & p & e & j & t & m & x & Y \\ & & h & q & & k & u & n & y & Z \\ & & & r & & & v & & z & T \\ & & & & a & b & f & d & i & l \\ & & & & & c & g & e & j & m \\ & & & & & & h & & k & n \\ & & & & & & & a & b & d \\ & & & & & & & & c & e \\ & & & & & & & & & a \end{pmatrix}$$

les origines $\begin{pmatrix} & & & \mathrm{o} & & & \mathrm{s} & & \mathrm{w} & \mathrm{X} \\ & & & \mathrm{p} & & & \mathrm{t} & & \mathrm{x} & \mathrm{Y} \\ & & & \mathrm{q} & & & \mathrm{u} & & \mathrm{y} & \mathrm{Z} \\ & & & \mathrm{r} & & & \mathrm{v} & & \mathrm{z} & \mathrm{T} \\ & & & & & & \mathrm{f} & & \mathrm{i} & \mathrm{l} \\ & & & & & & \mathrm{g} & & \mathrm{j} & \mathrm{m} \\ & & & & & & \mathrm{h} & & \mathrm{k} & \mathrm{n} \\ & & & & & & & & \mathrm{b} & \mathrm{d} \\ & & & & & & & & \mathrm{c} & \mathrm{e} \\ & & & & & & & & & \mathrm{a} \end{pmatrix}$

Les extremités $\begin{pmatrix} a & b & f & o & d & i & s & l & w & X \\ & c & g & p & e & j & t & m & x & Y \\ & & h & q & & k & u & n & y & Z \\ & & & r & & & v & & z & T \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \end{pmatrix}$

L'espace quotient de DA par la relation d'équivalence sera appelé « espace admissible », c'est un espace vectoriel dont les paquets constituent une base.

Tout espace vectoriel de matrices fractales, en particulier tout espace vectoriel $\mathbb{K}[I, A, W]$, est isomorphe à un sous-espace vectoriel de l'espace admissible.

On appellera support d'une matrice $A=(a_{ij})$, l'ensemble des cases telles que $a_{ij}\neq 0$ et support d'un sous-espace vectoriel F la réunion des supports des $A\in F$.

Un sous-espace vectoriel de l'espace admissible sera dit plein lorsque son support est égal au domaine admissible.

Désormais la matrice W est fixée et nous employerons le terme de matrice fractale sans repréciser la partition associée.

1.3. Aspect « Graphique ».

Définition 6. *lignes et colonnes, primaires et secondaires*

Soit une matrice fractale M=$(M_{i,j})_{(i,j)\in\{1,.,t_1\}^2}$, pour chaque j$\leqslant t_1$ on note $M_{j,j} = \begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j} \end{pmatrix}$, avec M_{t_1+1,t_1+1}=0.

On appellera primaires les lignes et les colonnes de M qui apparaissent dans les matrices $\mathrm{N}_{j,j}$, c'est à dire celles numérotées $\sum_{k=1\ldots j-1} z_k + z_{j+1} + 1$ jusqu'à $\sum_{k=1\ldots j} z_k$, les autres seront appelées secondaires.

Exemple 7.

les lignes primaires $\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & \mathrm{aaaa} & b & \mathrm{bb} & \mathrm{bbb} & i \\ 0 & c & \mathrm{cc} & \mathrm{ccc} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & \mathrm{ii} \\ 0 & d & \mathrm{dd} & \mathrm{ddd} & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} & \mathrm{iii} \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & \mathrm{hh} & \mathrm{iiii} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \mathrm{dd} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, ici lignes 4,6,7 et 8

les colonnes primaires $\begin{pmatrix} a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & \mathrm{aaaa} & b & \mathrm{bb} & \mathrm{bbb} & i \\ 0 & c & \mathrm{cc} & \mathrm{ccc} & f & \mathrm{ff} & \mathrm{fff} & \mathrm{ii} \\ 0 & d & \mathrm{dd} & \mathrm{ddd} & g & \mathrm{gg} & \mathrm{ggg} & \mathrm{iii} \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & \mathrm{hh} & \mathrm{iiii} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & \mathrm{aa} & \mathrm{aaa} & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & \mathrm{cc} & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & \mathrm{dd} & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, ici colonnes 4,6,7 et 8

Remarque 8.

Une matrice fractale M est déterminée par les extrémités de ses paquets c'est à dire sa première ligne (de blocs): $M_{11}, \ldots., M_{1t_1}$; elle est aussi déterminée par leurs origines.

1.4. Caractérisation de l'idéal engendré par W.

Remarque 9.

On voit aisément que si une matrice fractale appartient à l'idéal WF ses blocs diagonaux M_{jj} sont nuls, de même que toutes ses lignes primaires.

D'où la

Définition 10. *propriété M*

On dira qu'une matrice $M \in \mathbb{K}[I, A, W]$ possède la propriété M lorsque ses blocs diagonaux M_{jj} sont nuls, de même que toutes ses lignes primaires.

L'exemple suivant illustre le fait, immédiat, que toute matrice M de *$W\mathbb{K}[I, A, W]$ possède la propriété M.*

```
(%i19) W:matrix([0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,
```

(%o19) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
(%i23) N:matrix([a,b,d,u,f,g],[0,c,h,v,j,k],[0,0,l,0,q,r],[0,0,0,a,b,u],[0,0,0,0,c,v],[0,0,0,0,0,
```

(%o23) $\begin{pmatrix} a & b & d & u & f & g \\ 0 & c & h & v & j & k \\ 0 & 0 & l & 0 & q & r \\ 0 & 0 & 0 & a & b & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

```
(%i24) N.W;
```

$$\text{(\%o24)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant:

$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ posssède la propriété M mais n'appartient pas à $W\mathbb{K}[I, A, W]$.

1.5. Une caractérisation de l'appartenance à l'idéal $\boldsymbol{W}\mathbb{K}[\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{W}]$.

1.5.1. On suppose l'Algèbre $\mathbb{K}[\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{W}]$ pleine .

Théorème 11.

Soit une matrice fractale A telle que l'Algèbre $\mathbb{K}[I, A, W]$ est pleine, une matrice M de $\mathbb{K}[I, A, W]$ appartient à l'idéal $W\mathbb{K}[I, A, W]$ si et seulement si elle possède la propriété M.

Démonstration.

On sait déja que $W\mathbb{K}[I, A, W]$ est inclus dans l'espace vectoriel des matrices de $\mathbb{K}[I, A, W]$ qui possèdent la propriété M, il suffit donc de montrer que ces deux sous-espaces vectoriels ont la même codimension dans $\mathbb{K}[I, A, W]$.

1) Soit $M \in \mathbb{K}[I, A, W]$ dénombrons les contraintes indépendantes à satisfaire pour posséder la propriété M:

i) dans le bloc $M_{1,1}$ il faut annuler tous les termes (sauf ceux qui sont nuls par définition): $z_1^2 - \{(z_1 - z_2)z_2 + \ldots. + (z_{t_1-1} - z_{t_1})z_{t_1}\}$

ii) dans chaque ligne de blocs (hors les blocs diagonaux dont les éléments sont déja décomptés dans $M_{1,1}$) il faut annuler tous les termes apparaissant dans des cases relevant à la fois d'une ligne primaire et d'une colonne primaire : $(z_i\text{-}z_{i+1})\{(z_{i+1} - z_{i+2}) + . + (z_{t_1-1} - z_{t_1}) + z_{t_1} - z_{t_1+1}\} = (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$ termes à annuler

Ce qui représente $\sum_{i=1\ldots t_1} (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$ conditions.

D'où au total la codimension de l'espace vectoriel des matrices qui possèdent la propriété M est ${z_1}^2$.

2)

Considérons ψ l'endomorphisme de $\mathbb{K}[I, A, W]$ défini par $M \longmapsto$MW, de bord directeur $(0, M_{1,1}W_{1,2}, \ldots\ldots, M_{1,t_1-1}W_{t_1-1,t_1})$; les éléments du noyau sont caractérisés par la propriété suivante: dans chaque M_{1j} les z_{j+1} premières colonnes sont nulles; ce qui signifie que le noyau « correspond » aux $z_j - z_{j+1}$ dernières colonnes de chaque $M_{1,j}$.

Par suite la dimension du noyau de ψ est $z_1(z_1\text{-}z_2\text{+}z_2\text{-}z_3\text{+}..\text{+}z_{t_1}\text{-}z_{t_1+1}) = z_1^2$, ce qui constitue la codimension de l'image, c'est à dire de $W\mathbb{K}[I, A, W]$.

Par suite l'espace des matrices de $\mathbb{K}[I, A, W]$ qui possèdent la propriété M est égal à l'idéal $W\mathbb{K}[I, A, W]$.

□

Théorème 12. *Soit une matrice fractale $M = (M_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,.,t_1\}^2}$ pour chaque $j \leqslant t_1$ on note $M_{\mathrm{jj}} = \begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j} \end{pmatrix}$, avec $M_{t_1+1,t_1+1} = 0$, on désigne par ρ_j le polynome minimal de N_{jj} et $\mu_q = \rho_q \ldots \rho_{t_1-1}\rho_{t_1}$ et $\mu = \mu_1$.*

Alors la matrice $\mu(M)$ possède la propriété M.

En particulier les blocs $\mu(M_{j,j})$ sont nuls, de même que les lignes primaires toutes entières sont nulles.

On remarquera que le degré de μ est inférieur ou égal à la somme des tailles des $N_{j,j}$, c'est à dire la taille de M_{11}, c'est à dire p.

Démonstration. *la partie concernant les blocs de la diagonale est immédiate.*

Le reste se démontre par récurrence à partir de la remarque suivante:

Pour toute matrice fractale

lorsque sur une diagonale de blocs le bloc supérieur est de taille (u,v) et le bloc inférieur est de taille (u',v'), si v>v' les u-u' dernières coordonnées des v' premières colonnes sont nulles; il s'agit donc des éléments des colonnes secondaires dans les lignes primaires: d'où, dans $\rho_i(M)$, qui est une matrice fractale, **les lignes primaires** *numérotées $\sum_{k=1...i} z_k - z_{i+1} + 1$, ..., $\sum_{k=1...i} z_k$ (c'est à dire celles qui contiennent le bloc $\rho_i(N_{\text{ii}}) = 0$)* **contiennent des zéros dans les colonnes secondaires**, *elles ont donc l'allure suivante* $(0\ \dots\ 0\ \ \rho_i(N_{\text{ii}}) = 0\ \ 0 * 0 * .... * 0)$, *où la partie mauve est nulle parce que la matrice est triangulaire supérieure par blocs, et dans la partie verte les zéros corespondent à notre remarque.*

et, si nous supposons que dans $\rho_{i+1}(M)....\rho_{t_1}(M)$ les colonnes ont l'allure suivante $\begin{pmatrix} * \\ .... \\ ... \\ * \\ *_{\text{ij}} \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ ... \\ ... \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

c'est à dire **les lignes primaires** *de numéros supérieurs ou égaux à $\sum_{k=1...i} z_k + 1$* **sont nulles** *(la partie bleue), ce qui traduit l'hypothèse de récurrence, on voit clairement qu'après le produit $\rho_i(M)\rho_{i+1}(M)....\rho_{t_1}(M)$les lignes primaires numérotées $\sum_{k=1...i} z_k - z_{i+1} + 1$, ..., $\sum_{k=1...i} z_k$ sont nulles.*

Il suffit, pour initialiser, de traiter le cas de $\rho_{t_1}(M_{t_1,t_1})$ qui est immédiat. □

Exemple 13.

```
(%i5) m:matrix([1,9,8,8,13,4,5],[0,2,8,8,3,4,5],[0,0,8,8,0,40,51],[0,0,7,8,0,4,
      5],[0,0,0,0,1,9,13],[0,0,0,0,0,2,3],[0,0,0,0,0,0,1]);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i6) m-ident(7);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

```
(%i7) (m-ident(7)).(m-2*ident(7));
```

(%o7) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 176 & 184 & 14 & 505 & 669 \\ 0 & 0 & 112 & 120 & 0 & 383 & 499 \\ 0 & 0 & 98 & 104 & 0 & 312 & 466 \\ 0 & 0 & 91 & 98 & 0 & 308 & 399 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i8) (m-ident(7)).(m-2*ident(7)).(m.m-16*m+8*ident(7));
```

(%o8) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -98 & -1242 & 236 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -414 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i9)

Exemple 14. le cas d'une Algèbre pleine

Les matrices fractales qui vérifient la propriété M: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d & i & s & l & w & X \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & j & t & m & x & Y \\ & & 0 & 0 & & 0 & u & 0 & y & Z \\ & & & 0 & & & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & d & i & l \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & j & m \\ & & & & & & 0 & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & d \\ & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

Les matrices fractales appartenant à W.$\mathbb{K}[A, W]$

$$\begin{pmatrix} a & b & f & o & d & i & s & l & w & X \\ & c & g & p & e & j & t & m & x & Y \\ & & h & q & & k & u & n & y & Z \\ & & & r & & & v & & z & T \\ & & & & a & b & f & d & i & l \\ & & & & & c & g & e & j & m \\ & & & & & & h & & k & n \\ & & & & & & & a & b & d \\ & & & & & & & & c & e \\ & & & & & & & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & f & d & i & l \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & c & g & e & j & m \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & k & n \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & a & b & d \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & c & e \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 & a \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 15.
Si A est une matrice fractale A pour laquelle l'Algèbre $\mathbb{K}[I, A, W]$ est pleine, le polynôme réducteur est de degré inférieur ou égal à z_1=p.

Démonstration.
Il suffit d'appliquer les Théorèmes 11 et 12.

Remarquons que dans le cas d'une Algèbre $\mathbb{K}[I, A, W]$ pleine le polynome réducteur Δ_A est un multiple du polynome minimal de A_{11} puisqu'il en est annulateur; par ailleurs, comme chacun des polynomes minimaux ρ_j divise son polynome caractéristique, leur produit μ_1 divise le produit des polynomes caractéristiques des blocs N_j, c'est à dire le polynome caractéristique de A_{11}; et comme Δ_A divise μ_1, Δ_A divise le polynôme caractéristique de A_{11}.

Donc il est de degré inférieur ou égal à z_1=p. □

1.5.2. Lorsque l'Algèbre $\mathbb{K}[I, A, W]$ n'est pas pleine.

Le Théorème 12 n'est plus applicable.

Cependant la matrice fractale A est, trivialement, la limite d'une suite (A_t) de matrices dont l'Algèbre $\mathbb{K}[I,\ A_t,\ W]$ est pleine; pour chacune désignons par Δ_t son polynome réducteur alors $\forall t\in\mathbb{N}, \exists \mathrm{Q}_t\in\mathbb{K}[X,Y], \Delta_t(A_t)=\mathrm{W}\mathrm{Q}_t(A_t,W)$.

Par ailleurs les polynomes Δ_t sont de degré inférieur ou égal à z_1 et ont pour racines les valeurs propres des matrices A_t correspondantes, une application immédiate du Théorème de Gershgorin montre que leurs coefficients aussi sont bornés; par suite, quitte à se resteindre à une sous-suite, on peut supposer que la suite des polynômes Δ_t converge; on notera que, ces polynômes étant unitaires, si leur suite converge ils sont de degré constant et égal à celui de sa limite.

De même les polynomes Q_t(X,Y) sont aussi de degré borné (tant par rapport à X qu'à Y), d'où l'existence d'un polynome Δ_A unitaire de degré minimal, inférieur ou égal à z_1 tel que $\Delta_A(A)\in W\mathbb{K}[I,A,W]$.

Remarquons aussi que Δ_A(A) doit vérifier la propriété M et donc Δ_A doit être un multiple du polynôme minimal de la matrice A_{11}; par ailleurs, par passage à la limite, Δ_A doit diviser le polynome caractéristique de la matrice A_{11}.

Remarque 16. Polynôme réducteur de A et polynôme minimal de A_{11}.

Le polynôme réducteur de A n'est pas forcément égal au polynôme minimal de A_{11} comme le prouve l'exemple suivant.

D'autre part la démonstration précédente montre que lorsque A_{11} est cyclique ces deux polynômes sont égaux.

(nous appellerons « cyclique » toute matrice dont le polynome minimal est égal au polynome caractéristique; en anglais « non derogatory »)

Exemple 17.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_{11}=\begin{pmatrix} 1&0&1&1\\ 0&1&1&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Le polynome minimal de A_{11} est $(X-1)^2$, mais le polynome réducteur de A est $(X-1)^3$; comme on peut le constater dans la session suivante de Maxima:

(%i9) $$\begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix};$$

(%o9) $$\begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

(%i10) `m:%;`

(%o10) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i11) (m-ident(7));
```

(%o11) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i12) (m-ident(7)).(m-ident(7));
```

(%o12) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i13) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));
```

(%o13) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i14)
```

En résumé

Théorème 18.

Soit A une matrice fractale, l'idéal $I = \{P \in K[X], P(A) \in \mathrm{WK}[I, A, W]\}$ est engendré par un polynôme unitaire $\Delta_A(X)$ qui vérifie $\pi_{A_{11}}(X) | \Delta_A(X) | \chi_{A_{11}}(X)$.

Son degré est donc inférieur ou égal à z_1.

2. La dimension de l'algèbre unitaire engendrée par deux matrices qui commutent

2.1. Quelques outils pour l'étude ultérieure.

Soit une matrice de Weyr W(z_1,..,z_{t_1})

Définition 19. *Réduction d'ordre k d'une matrice de F(z_1,..,z_{t_1})*
Soit une matrice M=($M_{i,j}$) de F(z_1,..,z_{t_1}) on désignera sous le nom de réduite d'ordre k la matrice M_k=$(M_{i,j})_{i\geqslant k,j\geqslant k}$.
.

Proposition 20. *Expression algébrique de la réduction*
Soit une matrice M=($M_{i,j}$) de F(z_1,..,z_{t_1}), ${}^tW^k$M$W^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{k+1} \end{pmatrix}$

Démonstration.
Il suffit d'établir le résultat pour k=1, ce qui se fait en appliquant la relation ${}^tW_{i,i+1}A_{\text{ij}}W_{j,j+1}=A_{i+1,j+1}$. □

Définition 21. *Matrice fractale admissible*
Une matrice fractale A sera dite admissible lorsque son polynome réducteur est de degré z_1.

Proposition 22.
A est admissible si et seulement ses réduites le sont.

Démonstration.
Dans le cas d'une algèbre pleine on remarquera que pour tout k>1 Δ_A divise $\rho_1...\rho_{k-1}\Delta_{A_k}$, donc s'il existe k tel que le polynome réducteur de la matrice A_k est de degré strictement inférieur à z_k le polynome réducteur de A est de degré strictement inférieur à z_1=p.
La réciproque est évidente.
Le cas d'une algèbre non-pleine se traite en appliquant la technique du 1.5.2. □

Définition 23. *Liste des polynomes réducteurs d'une matrice fractale*
Soit A=(A_{ij}) et pour tout k∈{1, ..., t_1} A_k=$(A_{\text{ij}})_{i>k,j>k}$, on désignera par ($\Delta_1$, ..., Δ_{t_1}) les polynomes réducteurs des réduites A_k et par d_k leur degrés respectifs.

Lemme 24. *Avec les notations ci-dessus*
$AW^{k-1}\in W^kF \Longrightarrow A_k\in W_kF$

Démonstration.
AW^{k-1}=Z$W^k \Longrightarrow ({}^tW)^{k-1}AW^{k-1}$=$({}^tW)^{k-1}ZW^{k-1}W \Longleftrightarrow A_k=Z_kW_k$ □

2.2. Etude de la dimension de K[I,A,W].

Théorème 25.
Soient (A, W)∈$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, où AW=WA alors dim(K[I,A,W])$\leqslant\sum_{k=1...t_1}d_k$.

Le Théorème améliore la majoration établie historiquement par Gerstenhaber ([2]), dans l'esprit de la Géométrie Algébrique, et qui a reçu par la suite de nombreuses démonstrations, soit dans cet esprit soit plus élémentaires et longues...(dont [1] etc..).

Démonstration.
La démonstration se fera par récurrence sur t_1.

0) Si t_1=1 le résultat est immédiat: A=$A_{1,1}$ et W=I; il suffit d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à t_1-1.

On pose A=$\begin{pmatrix} A_{1,1} & C \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix}$, où $A_{11} \in \mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et W=$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$, $\widetilde{W_{1,2}}$=($W_{1,2}$, 0, ..., 0) et W_2=$\begin{pmatrix} 0 & W_{2,3} & 0 & .... & 0 \\ ... & 0 & W_{3,4} & 0 & ... \\ 0 & ... & 0 & & \\ ... & .... & ... & ... & W_{t_1-1,t_1} \\ 0 & ... & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$ est aussi une matrice de Weyr de partition associée (z_2,..,z_{t_1}), $A_2W_2=W_2A_2$, d'où dim($\mathbb{K}$[I,A_2,W_2])$\leqslant\sum_{k=2....t_1} d_k$ par application de l'hypothèse de récurrence.

2) D'apres le Théorème 9 $\mathbb{K}$[I,A,W]=Vect(I,A,..,A^{d_1-1})$\oplus W\mathbb{K}$[I,A,W].

3) Remarquons que pour k$\geqslant$0 $W^{k+1}A^q$=$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{1,1}{}^q & * \\ 0 & A_2^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W'_{1,2}} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k A_2^q \end{pmatrix}$.

4) Donc la dimension de Vect($W^{k+1}A^q$, $q \geqslant 0$, $k \geqslant 0$) est inférieure ou égale à celle de Vect($W_2^k A_2^q, q \geqslant 0, k \geqslant 0$), qui est égale à celle de $\mathbb{K}$[I,A_2,W_2].

D'où la dimension de $\mathbb{K}[I, A, W]$est inférieure ou égale à $\sum_{k=1....t_1} d_k \leqslant n$.

Le résultat s'étend sans difficulté, dans le cas algèbriquement clos, à toute Algèbre commutative engendrée par 2 matrices. Ce qui constitue le Théorème de Gerstenhaber; on comparera avec [3] qui reprend le schéma de la démonstration du [1] (mais) dans le cadre des matrices de Weyr.

Par ailleurs l'inégalite dim($\mathbb{K}[I,\ A,\ W]$)$\leqslant\sum_{k=1....t_1} d_k$ est une amélioration conséquente du même Théorème; nous y reviendrons plus loin. □

Nous allons maintenant établir une minoration de la dimension de l'Algèbre $\mathbb{K}[I, A, W]$

Proposition 26.

La famille (I,A,...,A^{d_1-1}, W, WA, ..., WA^{d_2-1}, ..., $\mathbb{W}$, WA, ..., $\mathrm{WA}^{d_{t_1}-1}$) est libre

Démonstration.

Supposons $\sum_{1\leqslant j \leqslant t_p, 0 \leqslant p_j \leqslant d_j-1} x_{\mathrm{jp}_j} W^{j-1} A^{p_j}$=0.

On en déduit: $\sum_{0\leqslant p_1 \leqslant d_1-1} x_{1,\mathrm{jp}_1} A^{p_1} \in \mathrm{WF}$, d'où les x_{1,jp_1} sont nuls.

d'ou il vient $\sum_{0\leqslant p_2 \leqslant d_2-1} x_{2,\mathrm{jp}_2} \mathrm{WA}^{p_2} \in W^2\mathrm{F}(z_1...., z_{t_1})$ qui entraine, d'après le lemme 22, $\sum_{0\leqslant p_2 \leqslant d_2-1} x_{2,\mathrm{jp}_2} A_2^{p_2} \in \mathrm{W_2F}(z_2, ..., z_{t_1})$, d'ou les x_{2,jp_2} sont nuls.

etc...

Ce qui établit le résultat. □

D'où, en fin de compte:

Théorème 27.

La dimension de $\mathbb{K}[I,\ A,\ W]$ est égale à $\sum_{k=1....t_1} d_k$ et une base en est (I,A,...,A^{d_1-1}, W, WA, ..., WA^{d_2-1}, ..., $\mathbb{W}$, WA, ..., $\mathrm{WA}^{d_{t_1}-1}$)

Ce résultat est original; il améliore la majoration du Théorème de Gerstenhaber, il étend le Théorème de Laffey établi dans le seul cas « homogène » (c'est à dire lorsque les indices z_1,z_2,... sont tous égaux). La base proposée est à comparer avec [1].

Théorème 28. *Condition nécessaire et suffisante pour que la dimension de K[I,A,W] soit égale à n.*

L'Algèbre K[I,A,W] est de dimension maximale si et seulement si A est admissible.

Démonstration.

La condition est nécessaire comme l'établit le Théorème 25; la proposition 20 établit qu'elle est suffisante .

L'exemple 28 montre que ceci n'est pas équivalent à « $A_{1,1}$ cyclique »

□

Remarque 29.

Ce résultat généralise la condition nécessaire et suffisante établie seulement dans le cas « homogène », c'est à dire lorsque les blocs $\mathrm{A}_{j,j}$ sont tous de même taille (et donc égaux) [3],[5]; dans ces hypothèses la condition se résume à « $\mathrm{A}_{1,1}$ cyclique », on voit que la situation est plus complexe dans le cas général.

Exemple 30.

On trouvera ici un exemple de matrice A, telle que $\mathrm{A}_{1,1}$ n'est pas cyclique mais K[I,A,W] est de dimension n:

(%i3) `m:matrix([1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,0,1,1],[0,0,0,1]);`

$$(\%o3)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i4) `m.m;`

$$(\%o4)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5) `w:matrix([0,0,1,0],[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,0,0]);`

$$(\%o5)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) `m.w;`

$$(\%o6)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) `a*ident(4)+b*m+c*m.m+d*w;`

$$(\%o7)\quad \begin{pmatrix} c+b+a & 0 & d+2\,c+b & 3\,c+b \\ 0 & c+b+a & 0 & 2\,c+b \\ 0 & 0 & c+b+a & d+2\,c+b \\ 0 & 0 & 0 & c+b+a \end{pmatrix}$$

(%i8) `linsolve([a+b+c,b+2*c+d,b+2*c,b+3*c],[a,b,c,d]);`

$$(\%o8)\quad [a=0, b=0, c=0, d=0]$$

(%i9)

Exemple 31.

Ici le degré du polynome minimal de A_{11} est 2; les degrés des polynomes réducteurs sont $d_1 = 3, d_2 = 2, d_1 = 1$ et la dimension de $\mathbb{K}[I, A, W]$ est 6=3+2+1.

(%i4) `m:matrix([1,1,0,0,0,11,12],[0,1,0,0,0,21,25],[0,0,1,1,0,33,37],[0,0,0,1,0,51,54],[0,0,0,0,1,1,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,1]);`

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i5) (m-ident(7));
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i6) (m-ident(7)).(m-ident(7));
```

(%o6) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));
```

(%o7) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i9) w:matrix([0,0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0],
      [0,0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0]);
```

(%o9) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) a*ident(7)+b*m+c*m.m+d*w+e*m.w+f*m.m.w+g*w.w+h*m.w.w+i*m.m.w.w;
```

(%o10) $(c+b+a, 2\,c+b, 0, 0, f+e+d, 2\,f+e+43\,c+11\,b, i+h+g+49\,c+12\,b; 0, c+b+a, 0, 0, 0, f+e+d+42\,c+21\,b, 50\,c+25\,b; 0, 0, c+b+a, 2\,c+b, 0, 117\,c+33\,b, 128\,c+37\,b; 0, 0, 0, c+b+a, 0, 102\,c+51\,b, 108\,c+54\,b; 0, 0, 0, 0, c+b+a, 2\,c+b, f+e+d; 0, 0, 0, 0, 0, c+b+a, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, c+b+a)$

```
(%i13) linsolve([a+b+c,2*c+b,f+e+d,2*f+e+43*c+11*b,i+h+g+49*c+12*b,117*c+33*b,
       128*c+37*b,102*c+51*b,108*c+54*b],[a,b,c,d,e,f,g,h,i]);
```

(%o13) $[a=0, b=0, c=0, d=\%r3, e=-2\%r3, f=\%r3, g=-\%r2-\%r1, h=\%r2, i=\%r1]$

(%i14)

La résolution annonce 3 degrés de liberté, donc le rang du système est 9-3=6; ce qui détermine la dimension de l'Algèbre étudiée.

3. UNE BASE DE $\mathbb{K}[I, A, W]$

La démonstration du Théorème 26 nous fournit une procédure pour la détermination d'une base de $\mathbb{K}[A, W]$

i) trouver d_1 L:[I,A,...,A$^{d_1-1}$]

ii) trouver d_2 L:L@[W$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_k \end{pmatrix}$, M_k base de $\mathbb{K}[I, A_1, W_1]$....

.....

4. L'ENSEMBLE DES MATRICES FRACTALES ADMISSIBLES (EN CHANTIER)

Il est immédiat que l'ensemble des matrices cycliques est un ouvert dense de l'ensemble F des matrices fractales.

Théorème 32. *L'ensemble des matrices fractales admissibles est un ouvert dense de F*

Démonstration.

Pour tout k$\in\{0, ..., p-1\}$ nous désignons par A'$_k$ la matrice A^k, privée de ses lignes secondaires; A est admisssible si et seulement si les matrices (I,A'$_1$, ...,A'$_{p-1}$) sont linéairement indépendantes; ce qui définit un ouvert.

La densité découle de celle de l'ensemble des matrices cycliques, qui sont, comme vu plus haut, admissibles. □

Paris, Juin 2018-révisé Septembre 2018

Bibliographie:

[1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, Linear Multilinear Algebra 27 (1990), 147-157

[2] M. Gerstenhaber, « *On dominance and varieties of commuting matrices* », *Ann. Math.*, vol. 73,1961, p. 324-348

[3] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011.

[4] P.Teller, http://lalgebrisant.fr/images/MatricesCommutantes/LeCommutantesttrigonalisable.pdf

[5] T.J. Laffey, S.Lazarus, Two-generated Commutative Matrix Subalgebras, Linear Algebra and its Applications, 147, 1991, p249-273.

[6] M.G. Neubauer, D.J. Saltman, Two-Generated Commutative Subalgebras of $\mathcal{M}_n(F)$, Journal of Algebra, 164, pp.545-562, 1994.

[7] P.Teller, http://lalgebrisant.fr/LuniversDesMatricesFractales.pdf

[8] H. Shapiro