

# Complément aux Théorèmes de Gerstenhaber et Laffey

PATRICK TELLER

RÉSUMÉ.

Les matrices de Weyr sont un substitut, récemment redécouvert ([3],[4],[7]), aux matrices de Jordan; de même que toute matrice nilpotente est semblable à une somme directe de blocs de Jordan nilpotents, toute matrice nilpotente est aussi semblable à une somme directe de blocs de Weyr nilpotents.

Contrairement au commutant d'une matrice en blocs de Jordan [4] qui possède une forme assez inconfortable le commutant d'une matrice en blocs de Weyr est un ensemble de matrices qui possèdent une forme intéressante, de type fractal; on trouvera les définitions générales sur les matrices fractales dans [7].

Les propriétés des matrices fractales nous permettent des démonstrations élémentaires des Théorèmes de Gerstenhaber et de Laffey-Lazarus sur la dimension de l'Algèbre commutative engendrée par deux matrices. ([2],[5]).

Le Théorème de Gerstenhaber établit que si A et B sont deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB=BA$  la dimension de  $\mathbb{K}[I, A, B]$  est inférieure ou égale à n avec égalité lorsque l'une des deux (au moins) est cyclique (non derogatory); nous démontrons cette même inégalité et établissons une condition **nécessaire et suffisante** d'égalité dans le cas où B est une matrice de Weyr, ce qui permet de définir et décrire les matrices « admissibles ».

L'article de Laffey et Lazarus étudie l'égalité dans le seul cas d'une partition  $(z_1, \dots, z_{t_1})$  où  $z_1 = \dots = z_{t_1}$  et retrouve la forme d'une famille génératrice de  $\mathbb{K}[I, A, B]$  que l'on doit à [1]; nous explicitons dans le cas d'une partition quelconque les exposants intervenant dans ces deux présentations.

$\mathbb{K}$  désigne un corps algébriquement clos.

## 1. ETUDE ALGEBRIQUE D'UNE ALGEBRE DE MATRICES FRACTALES

On considère ici une matrice de Weyr  $W=W(z_1, \dots, z_{t_1})$  et l'algèbre  $F=F(z_1, \dots, z_{t_1})$ .

### 1.1. L'anneau F.

**Proposition 1.** *L'idéal WF*

L'ensemble  $WF=\{WM, M \in F\}$  est un idéal (bilatère).

**Démonstration.**

découle du fait que F est le commutant de W. □

**Théorème 2.**

*Soit une matrice fractale A, l'ensemble des polynomes P(X) tels que  $P(A) \in WK[A, W]$  est un idéal, non réduit à  $\{0\}$ ; on appellera polynome réducteur le générateur unitaire de cet idéal.*

**Démonstration.**

Il suffit de remarquer que  $WK[A, W]$  est un idéal et que le polynome minimal de A convient; on en déduit donc que le polynome réducteur de A divise son polynome minimal.

Le polynome réducteur de la matrice A sera noté  $\Delta_A$ . □

### 1.2. L'espace vectoriel F.

**Définition 3.** *Domaine admissible, Classes, Espace admissible, Origines et Extrémités*

Nous allons considérer les matrices fractales comme des éléments de  $\mathbb{K}^{n^2}$ , dont la structure est celle de matrices triangulaires par blocs, en rapport avec la partition associée.

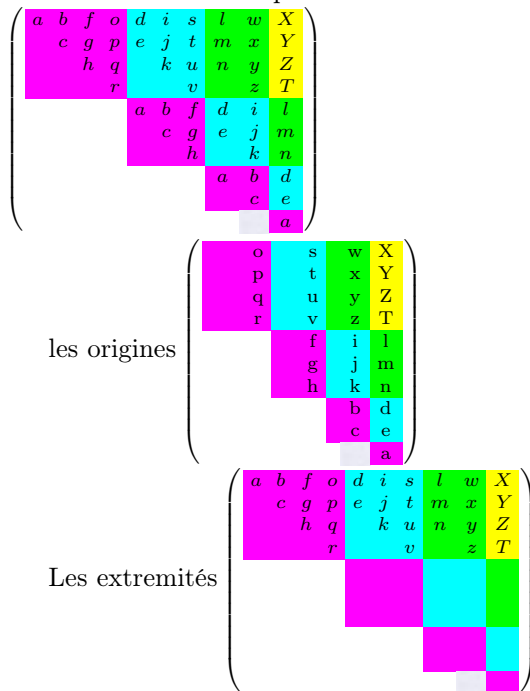
On pourra repérer sur l'exemple suivant que les cases marquées d'un zéro sont nécessairement nulles, tandis que les cases colorées (de l'exemple) **peuvent** être de valeur non nulle (ou pas); on les appellera admissibles.

On appellera « domaine admissible » l'ensemble des cases admissibles (DA); si M est une matrice fractale ses termes non nuls se trouvent dans le domaine admissible.

On remarquera aussi que pour chaque matrice fractale certaines cases doivent porter la même valeur, ce qui définit une relation d'équivalence parmi les cases du domaine admissible (par exemple ligne1-colonne1 avec ligne 5-colonne5 et ligne9-colonne9 dans la première matrice de l'exemple ci-dessous); les classes seront appelées « paquets », elles constituent une base de F; chaque paquet possède une origine (la case dont le numéro de ligne est le plus grand) et une extrémité (la case dont le numéro de ligne est le plus petit)

#### Exemple 4.

les cases correspondant à une même classe portent des lettres identiques



L'espace quotient de DA par la relation d'équivalence sera appelé « espace admissible », c'est un espace vectoriel dont les paquets constituent une base.

Tout espace vectoriel de matrices fractales, en particulier tout espace vectoriel  $\mathbb{K}[I, A, W]$ , est isomorphe à un sous-espace vectoriel de l'espace admissible.

On appellera support d'une matrice  $A=(a_{ij})$ , l'ensemble des cases telles que  $a_{ij} \neq 0$  et support d'un sous-espace vectoriel F la réunion des supports des  $A \in F$ .

Un sous-espace vectoriel de l'espace admissible ou une matrice fractale sera dit(e) plein(e) lorsque son support est égal au domaine admissible.

### 1.3. Aspect « Graphique ».

**Définition 5.** *lignes et colonnes, primaires et secondaires*

Soit une matrice fractale  $M=(M_{i,j})_{(i,j)\in\{1,..,t_1\}^2}$  , pour chaque  $j\leq t_1$  on note  $M_{j,j} = \begin{pmatrix} M_{j+1,j+1} & * \\ 0 & N_{j,j} \end{pmatrix}$ , avec  $M_{t_1+1,t_1+1}=0$ .

On appellera primaires les lignes et les colonnes de M qui apparaissent dans les matrices  $N_{j,j}$ .

**Exemple 6.**

les lignes primaires  $\begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & iiiii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ , ici lignes 4,6,7 et 8

les colonnes primaires  $\begin{pmatrix} a & aa & aaa & aaaa & b & bb & bbb & i \\ 0 & c & cc & ccc & f & ff & fff & ii \\ 0 & d & dd & ddd & g & gg & ggg & iii \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & h & hh & iiiii \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & aa & aaa & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & cc & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & dd & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ , ici colonnes 4,6,7 et 8

**Remarque 7.**

Une matrice fractale M est déterminée par les extrémités de ses paquets c'est à dire sa première ligne (de blocs):  $M_{11}, \dots, M_{1t_1}$ ; elle est aussi déterminée par leurs origines.

**1.4. Caractérisation de l'idéal engendré par W.**

**Remarque 8.**

On voit aisément que si une matrice fractale appartient à l'idéal WF ses blocs diagonaux  $M_{jj}$  sont nuls, de même que toutes ses lignes primaires.

D'où la

**Définition 9. propriété M**

On dira qu'une matrice  $M \in \mathbb{K}[I, A, W]$  possède la propriété M lorsque ses blocs diagonaux  $M_{jj}$  sont nuls, de même que toutes ses lignes primaires.

L'exemple suivant illustre le fait, immédiat, que toute matrice M de  $WK[I, A, W]$  possède la propriété M.

```
(%i19) W:matrix([0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],
```

```
(%o19) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
```

```
(%i23) N:matrix([a,b,d,u,f,g],[0,c,h,v,j,k],[0,0,1,0,q,r],[0,0,0,a,b,u],[0,0,0,0,c,v],[0,0,0,0,0,0],
```

```
(%o23) \begin{pmatrix} a & b & d & u & f & g \\ 0 & c & h & v & j & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & q & r \\ 0 & 0 & 0 & a & b & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}
```

```
(%i24) N.W;
```

$$(\%024) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ possède la propriété M mais n'appartient pas à } W\mathbb{K}[I, A, W].$$

## 1.5. Une caractérisation de l'appartenance à l'idéal $W\mathbb{K}[I, A, W]$ .

### 1.5.1. On suppose l'Algèbre $\mathbb{K}[I, A, W]$ pleine .

#### Théorème 10.

Soit une matrice fractale  $A$  telle que l'Algèbre  $\mathbb{K}[I, A, W]$  est pleine, une matrice  $M$  de  $\mathbb{K}[I, A, W]$  appartient à l'idéal  $W\mathbb{K}[I, A, W]$  si et seulement si elle possède la propriété  $M$ .

#### Démonstration.

On sait déjà que  $W\mathbb{K}[I, A, W]$  est inclus dans l'espace vectoriel des matrices de  $\mathbb{K}[I, A, W]$  qui possèdent la propriété  $M$ , il suffit donc de montrer que ces deux sous-espaces vectoriels ont la même codimension dans  $\mathbb{K}[I, A, W]$ .

1) Soit  $M \in \mathbb{K}[I, A, W]$  dénombrons les contraintes indépendantes à satisfaire pour posséder la propriété  $M$ :

i) dans le bloc  $M_{1,1}$  il faut annuler tous les termes (sauf ceux qui sont nuls par définition):  $z_1^2 - \{(z_1 - z_2)z_2 + \dots + (z_{t_1-1} - z_{t_1})z_{t_1}\} = z_1^2 - \sum_{i=1 \dots t_1} (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$  conditions

ii) dans chaque ligne de blocs (hors les blocs diagonaux dont les éléments sont déjà décomptés dans  $M_{1,1}$ ) il faut annuler tous les termes apparaissant dans des cases relevant à la fois d'une ligne primaire et d'une colonne primaire :  $(z_i - z_{i+1})\{(z_{i+1} - z_{i+2}) + \dots + (z_{t_1-1} - z_{t_1}) + z_{t_1} - z_{t_1+1}\} = (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$  termes à annuler

Ce qui représente  $\sum_{i=1 \dots t_1} (z_i - z_{i+1})z_{i+1}$  conditions.

D'où au total la codimension de l'espace vectoriel des matrices qui possèdent la propriété  $M$  est  $z_1^2$ .

2)

Considérons  $\psi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}[I, A, W]$  défini par  $M \mapsto MW$ , de bord directeur  $(0, M_{1,1}W_{1,2}, \dots, M_{1,t_1-1}W_{t_1-1,t_1})$ ; les éléments du noyau sont caractérisés par la propriété suivante: dans chaque  $M_{1,j}$  les  $z_{j+1}$  premières colonnes sont nulles; ce qui signifie que le noyau « correspond » aux  $z_j - z_{j+1}$  dernières colonnes de chaque  $M_{1,j}$ .

Par suite la dimension du noyau de  $\psi$  est  $z_1(z_1 - z_2 + z_2 - z_3 + \dots + z_{t_1} - z_{t_1+1}) = z_1^2$ , ce qui constitue la codimension de l'image, c'est à dire de  $W\mathbb{K}[I, A, W]$ .

Par suite l'espace des matrices de  $\mathbb{K}[I, A, W]$  qui possèdent la propriété  $M$  est égal à l'idéal  $W\mathbb{K}[I, A, W]$ . □

**Théorème 11.** Soit une matrice fractale  $M = (M_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, t_1\}^2}$  pour chaque  $j \leq t_1$  on désigne par  $\rho_j$  le polynôme minimal de  $N_{jj}$  et  $\mu_q = \rho_q \dots \rho_{t_1-1} \rho_{t_1}$  et  $\mu = \mu_1$ .

Alors la matrice  $\mu(M)$  possède la propriété  $M$ .

En particulier les blocs  $\mu(M_{j,j})$  de même que les lignes primaires toutes entières sont nuls.

On remarquera que le degré de  $\mu$  est inférieur ou égal à la somme des tailles des  $N_{j,j}$ , c'est à dire la taille de  $M_{11}$ , c'est à dire  $p$ .

**Démonstration.** la partie concernant les blocs de la diagonale est immédiate.

Le reste se démontre par récurrence à partir de la remarque suivante:

Pour toute matrice fractale

lorsque sur une diagonale de blocs le bloc supérieur est de taille  $(u,v)$  et le bloc inférieur est de taille  $(u',v')$ , si  $v > v'$  les  $u-u'$  dernières coordonnées des  $v'$  premières colonnes sont nulles; il s'agit donc des éléments des colonnes secondaires dans les lignes primaires: d'où, dans  $\rho_i(M)$ , qui est une matrice fractale, **les lignes primaires** numérotées  $\sum_{k=1\dots i} z_k - z_{i+1} + 1, \dots, \sum_{k=1\dots i} z_k$  (c'est à dire celles qui contiennent le bloc  $\rho_i(N_{ii}) = 0$ ) **contiennent des zéros dans les colonnes secondaires**, elles ont donc l'allure suivante  $(\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & \rho_i(N_{ii})=0 & 0 & * & 0 & * & \dots & * & 0 \end{matrix})$ , où la partie mauve est nulle parce que la matrice est triangulaire supérieure par blocs, et dans la partie verte les zéros corespondent à notre remarque.

et, si nous supposons que dans  $\rho_{i+1}(M) \dots \rho_{t_1}(M)$  les colonnes ont l'allure suivante

$$\begin{pmatrix} * \\ \dots \\ \dots \\ * \\ *_{ij} \\ * \\ 0 \\ * \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est à dire **les lignes primaires** de numéro supérieur ou égal à  $\sum_{k=1\dots i} z_k + 1$  sont nulles (la partie bleue), ce qui traduit l'hypothèse de récurrence, on voit clairement qu'après le produit  $\rho_i(M)\rho_{i+1}(M)\dots\rho_{t_1}(M)$  les lignes primaires numérotées  $\sum_{k=1\dots i} z_k - z_{i+1} + 1, \dots, \sum_{k=1\dots i} z_k$  sont nulles.

Il suffit, pour initialiser, de traiter le cas de  $\rho_{t_1}(M_{t_1,t_1})$  qui est immédiat. □

**Exemple 12.**

```
(%i5) m:matrix([1,9,8,8,13,4,5],[0,2,8,8,3,4,5],[0,0,8,8,0,40,51],[0,0,7,8,0,4,5],[0,0,0,0,1,9,13],[0,0,0,0,0,2,3],[0,0,0,0,0,0,1]);
```

```
(%o5) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i6) m-ident(7);
```

```
(%o6) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 8 & 13 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 0 & 40 & 51 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i7) (m-ident(7)).(m-2*ident(7));
```

```
(%o7) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 176 & 184 & 14 & 505 & 669 \\ 0 & 0 & 112 & 120 & 0 & 383 & 499 \\ 0 & 0 & 98 & 104 & 0 & 312 & 466 \\ 0 & 0 & 91 & 98 & 0 & 308 & 399 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i8) (m-ident(7)).(m-2*ident(7)).(m.m-16*m+8*ident(7));
```

$$\begin{matrix}
 (%o8) \\
 (%i9)
 \end{matrix}
 \left( \begin{array}{ccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & -98 & -1242 & 236 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -236 & -414 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -98 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)$$

**Exemple 13.** le cas d'une Algèbre pleine

Les matrices fractales qui vérifient la propriété M:

$$\begin{matrix}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & d & i & s & l & w & X \\
 0 & 0 & 0 & 0 & j & t & m & x & Y \\
 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & y & Z \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 0 & 0 & d & i & l \\
 0 & 0 & 0 & j & t & m \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{cc|c}
 0 & 0 & d \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{c}
 d \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

Les matrices fractales appartenant à  $W.K[A, W]$

$$\begin{matrix}
 \left( \begin{array}{cccc|cccc|c}
 a & b & f & o & d & i & s & l & w & X \\
 c & g & p & e & j & t & m & x & Y \\
 h & q & r & k & u & n & y & Z & T \\
 & & & v & z & & & & & 
 \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{cccc|cccc|c}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 0 & 0 & 0 & a & b & d \\
 0 & 0 & 0 & c & g & e \\
 0 & 0 & 0 & h & k & n \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a & b & d \\
 0 & 0 & 0 & c & g & e \\
 0 & 0 & 0 & h & k & n \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a & b & d \\
 0 & 0 & 0 & c & g & e \\
 0 & 0 & 0 & h & k & n \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right)
 \end{matrix}$$

#### Théorème 14.

Si  $A$  est une matrice fractale  $A$  pour laquelle l'Algèbre  $\mathbb{K}[I, A, W]$  est pleine, le polynôme réducteur est de degré inférieur ou égal à  $z_1=p$ .

#### Démonstration.

Il suffit d'appliquer les Théorèmes 10 et 11.

Remarquons que dans le cas d'une Algèbre  $\mathbb{K}[I, A, W]$  pleine le polynome réducteur  $\Delta_A$  est un multiple du polynome minimal de  $A_{11}$  puisqu'il en est annulateur; par ailleurs, comme chacun des polynomes minimaux  $\rho_j$  divise son polynome caractéristique, leur produit  $\mu_1$  divise le produit des polynomes caractéristiques des blocs  $N_j$ , c'est à dire le polynome caractéristique de  $A_{11}$ ; et comme  $\Delta_A$  divise  $\mu_1$ ,  $\Delta_A$  divise le polynôme caractéristique de  $A_{11}$ .

Donc il est de degré inférieur ou égal à  $z_1=p$ .  $\square$

#### 1.5.2. Lorsque l'Algèbre $\mathbb{K}[I, A, W]$ n'est pas pleine.

Le Théorème 11 n'est plus applicable.

Cependant la matrice fractale  $A$  est, trivialement, la limite d'une suite  $(A_t)$  de matrices pleines, par suite les l'Algèbres  $\mathbb{K}[I, A_t, W]$  sont pleines; pour chacune désignons par  $\Delta_t$  son polynome réducteur alors  $\forall t \in \mathbb{N}, \exists Q_t \in \mathbb{K}[X, Y], \Delta_t(A_t) = WQ_t(A_t, W)$ .

Par ailleurs les polynomes  $\Delta_t$  sont de degré inférieur ou égal à  $z_1$  et ont pour racines les valeurs propres des matrices  $A_t$  correspondantes, une application immédiate du Théorème de Gershorin montre que leurs coefficients aussi sont bornés; par suite, quitte à se restreindre à une sous-suite, on peut supposer que la suite des polynômes  $\Delta_t$  converge; on notera que, ces polynômes étant unitaires, si leur suite converge ils sont de degré constant et égal à celui de sa limite.

De même les polynômes  $Q_i(X, Y)$  sont aussi de degré borné (tant par rapport à  $X$  qu'à  $Y$ ), d'où l'existence d'un polynôme  $\Delta_A$  unitaire de degré minimal, inférieur ou égal à  $z_1$  tel que  $\Delta_A(A) \in W\mathbb{K}[I, A, W]$ .

Remarquons aussi que  $\Delta_A(A)$  doit vérifier la propriété M et donc  $\Delta_A$  doit être un multiple du polynôme minimal de la matrice  $A_{11}$ ; par ailleurs, par passage à la limite,  $\Delta_A$  doit diviser le polynôme caractéristique de la matrice  $A_{11}$ .

**Remarque 15.** Polynôme réducteur de  $A$  et polynôme minimal de  $A_{11}$ .

Le polynôme réducteur de  $A$  n'est pas forcément égal au polynôme minimal de  $A_{11}$  comme le prouve l'exemple suivant.

D'autre part la démonstration précédente montre que lorsque  $A_{11}$  est cyclique ces deux polynômes sont égaux.

(nous appellerons « cyclique » toute matrice dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique; en anglais « non derogatory »)

**Exemple 16.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme minimal de  $A_{11}$  est  $(X - 1)^2$ , mais le polynôme réducteur de  $A$  est  $(X - 1)^3$ ; comme on peut le constater dans la session suivante de Maxima:

$$(\%i9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(\%o9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i10) m: %;

$$(\%o10) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i11) (m-ident(7));

$$(\%o11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i12) (m-ident(7)).(m-ident(7));

$$(\%o12) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i13) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));

$$(\%o13) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i14)

En résumé

**Théorème 17.**

Soit  $A$  une matrice fractale, l'idéal  $I = \{P \in K[X], P(A) \in \text{WK}[I, A, W]\}$  est engendré par un polynôme unitaire  $\Delta_A(X)$  qui vérifie  $\pi_{A_{11}}(X) | \Delta_A(X) | \chi_{A_{11}}(X)$ .

Son degré est donc inférieur ou égal à  $z_1$ .



## 2. LA DIMENSION DE L'ALGÈBRE UNITAIRE ENGENDRÉE PAR DEUX MATRICES QUI COMMUTENT

### 2.1. Quelques outils pour l'étude ultérieure.

Soit une matrice de Weyr  $W(z_1, \dots, z_{t_1})$

**Définition 18.** Réduction d'ordre  $k$  d'une matrice de  $F(z_1, \dots, z_{t_1})$

Soit une matrice  $M=(M_{i,j})$  de  $F(z_1, \dots, z_{t_1})$  on désignera sous le nom de réduite d'ordre  $k$  la matrice  $M_k=(M_{i,j})_{i \geq k, j \geq k}$ .

**Proposition 19.** Expression algébrique de la réduction

Soit une matrice  $M=(M_{i,j})$  de  $F(z_1, \dots, z_{t_1})$ ,  ${}^tW^k M W^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{k+1} \end{pmatrix}$

**Démonstration.**

Il suffit d'établir le résultat pour  $k=1$ , ce qui se fait en appliquant la relation  ${}^tW_{i,i+1} A_{ij} W_{j,j+1} = A_{i+1,j+1}$ .  $\square$

**Définition 20.** Matrice fractale admissible

Une matrice fractale  $A$  sera dite admissible lorsque son polynome réducteur est de degré  $z_1$ .

**Proposition 21.**

$A$  est admissible si et seulement ses réduites le sont.

**Démonstration.**

Dans le cas d'une algèbre pleine on remarquera que pour tout  $k > 1$   $\Delta_A$  divise  $\rho_1 \dots \rho_{k-1} \Delta_{A_k}$ , donc s'il existe  $k$  tel que le polynome réducteur de la matrice  $A_k$  est de degré strictement inférieur à  $z_k$  le polynome réducteur de  $A$  est de degré strictement inférieur à  $z_1 = p$ .

La réciproque est évidente.

Le cas d'une algèbre non-pleine se traite en appliquant la technique du 1.5.2.  $\square$

**Définition 22.** Liste des polynomes réducteurs d'une matrice fractale

Soit  $A=(A_{ij})$  et pour tout  $k \in \{1, \dots, t_1\}$   $A_k=(A_{ij})_{i > k, j > k}$ , on désignera par  $(\Delta_1, \dots, \Delta_{t_1})$  les polynomes réducteurs des réduites  $A_k$  et par  $d_k$  leur degrés respectifs.

**Lemme 23.** Avec les notations ci-dessus

$$A W^{k-1} \in W^k F \implies A_k \in W_k F$$

**Démonstration.**

$$A W^{k-1} = Z W^k \implies ({}^tW)^{k-1} A W^{k-1} = ({}^tW)^{k-1} Z W^{k-1} W \iff A_k = Z_k W_k \quad \square$$

### 2.2. Etude de la dimension de $K[I, A, W]$ .

**Théorème 24.**

Soient  $(A, W) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ , où  $AW=WA$  alors  $\dim(K[I, A, W]) \leq \sum_{k=1 \dots t_1} d_k$ .

Le Théorème améliore la majoration établie historiquement par Gerstenhaber ([2]), dans l'esprit de la Géométrie Algébrique, et qui a reçu par la suite de nombreuses démonstrations, soit dans cet esprit soit plus élémentaires et longues... (dont [1] etc..).

**Démonstration.**

La démonstration se fera par récurrence sur  $t_1$ .

0) Si  $t_1=1$  le résultat est immédiat:  $A=A_{1,1}$  et  $W=I$ ; il suffit d'invoquer le Théorème de Cayley-Hamilton.

1) On admet le résultat vrai jusqu'à  $t_1-1$ .

On pose  $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & C \\ 0 & A_{21} \end{pmatrix}$ , où  $A_{11} \in \mathcal{M}_{z_1}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , et  $W = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{1,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$ ,  $\widetilde{W}_{1,2} = (W_{1,2}, 0, \dots, 0)$   
 et  $W_2 = \begin{pmatrix} 0 & W_{2,3} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & W_{3,4} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & W_{t_1-1, t_1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  est aussi une matrice de Weyr de partition associée

$(z_2, \dots, z_{t_1})$ ,  $A_2 W_2 = W_2 A_2$ , d'où  $\dim(\mathbb{K}[I, A_2, W_2]) \leq \sum_{k=2, \dots, t_1} d_k$  par application de l'hypothèse de récurrence.

2)  $\mathbb{K}[I, A, W] = \text{Vect}(I, A, \dots, A^{d_1-1}) \oplus W\mathbb{K}[I, A, W]$ .

3) Remarquons que pour  $k \geq 0$   $W^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{1,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}^{k+1} A^q = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{1,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1}^q & * \\ 0 & A_2^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{W}_{1,2} \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W_2^k A_2^q \end{pmatrix}$ .

4) Donc la dimension de  $\text{Vect}(W^{k+1} A^q, q \geq 0, k \geq 0)$  est inférieure ou égale à celle de  $\text{Vect}(W_2^k A_2^q, q \geq 0, k \geq 0)$ , qui est égale à celle de  $\mathbb{K}[I, A_2, W_2]$ .

D'où la dimension de  $\mathbb{K}[I, A, W]$  est inférieure ou égale à  $\sum_{k=1, \dots, t_1} d_k \leq n$ .

Le résultat s'étend sans difficulté, dans le cas algébriquement clos, à toute Algèbre commutative engendrée par 2 matrices. Ce qui constitue le Théorème de Gerstenhaber; on comparera avec [3] qui reprend le schéma de la démonstration du [1] (mais) dans le cadre des matrices de Weyr.

Par ailleurs l'inégalité  $\dim(\mathbb{K}[I, A, W]) \leq \sum_{k=1, \dots, t_1} d_k$  est une amélioration conséquente du même Théorème; nous y reviendrons plus loin.  $\square$

Nous allons maintenant établir une minoration de la dimension de l'Algèbre  $\mathbb{K}[I, A, W]$

### Proposition 25.

La famille  $(I, A, \dots, A^{d_1-1}, W, WA, \dots, WA^{d_2-1}, \dots, W, WA, \dots, WA^{d_{t_1}-1})$  est libre

### Démonstration.

Supposons  $\sum_{1 \leq j \leq t_p, 0 \leq p_j \leq d_j-1} x_{j,p_j} W^{j-1} A^{p_j} = 0$ .

On en déduit:  $\sum_{0 \leq p_1 \leq d_1-1} x_{1,jp_1} A^{p_1} \in WF$ , d'où les  $x_{1,jp_1}$  sont nuls.

d'où il vient  $\sum_{0 \leq p_2 \leq d_2-1} x_{2,jp_2} WA^{p_2} \in W^2F(z_1, \dots, z_{t_1})$  qui entraîne, d'après le lemme 24,  $\sum_{0 \leq p_2 \leq d_2-1} x_{2,jp_2} A_2^{p_2} \in W_2F(z_2, \dots, z_{t_1})$ , d'où les  $x_{2,jp_2}$  sont nuls.  
 etc...

Ce qui établit le résultat.  $\square$

D'où, en fin de compte:

### Théorème 26.

La dimension de  $\mathbb{K}[I, A, W]$  est égale à  $\sum_{k=1, \dots, t_1} d_k$  et une base en est  $(I, A, \dots, A^{d_1-1}, W, WA, \dots, WA^{d_2-1}, \dots, W, WA, \dots, WA^{d_{t_1}-1})$

Ce résultat est original; il améliore la majoration du Théorème de Gerstenhaber, il étend le Théorème de Laffey établi dans le seul cas « homogène » (c'est à dire lorsque les indices  $z_1, z_2, \dots$  sont tous égaux). La base proposée est à comparer avec [1].

**Théorème 27.** Condition nécessaire et suffisante pour que la dimension de  $\mathbb{K}[I, A, W]$  soit égale à  $n$ .

L'Algèbre  $\mathbb{K}[I, A, W]$  est de dimension maximale si et seulement si  $A$  est admissible.

### Démonstration.

Découle du Théorème 27.

L'exemple 17 montre que ceci n'est pas équivalent à «  $A_{1,1}$  cyclique »

□

### Remarque 28.

Ce résultat généralise la condition nécessaire et suffisante établie seulement dans le cas « homogène », c'est à dire lorsque les blocs  $A_{j,j}$  sont tous de même taille (et donc égaux) [3],[5]; dans ces hypothèses la condition se résume à «  $A_{1,1}$  cyclique », on voit que la situation est plus complexe dans le cas général.

### Exemple 29.

On trouvera ici un exemple de matrice  $A$ , telle que  $A_{1,1}$  n'est pas cyclique mais  $K[I,A,W]$  est de dimension  $n$ :

(%i3) `m:matrix([1,0,1,1],[0,1,0,1],[0,0,1,1],[0,0,0,1]);`

(%o3) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i4) `m.m;`

(%o4) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5) `w:matrix([0,0,1,0],[0,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,0,0]);`

(%o5) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) `m.w;`

(%o6) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) `a*ident(4)+b*m+c*m.m+d*w;`

(%o7) 
$$\begin{pmatrix} c+b+a & 0 & d+2c+b & 3c+b \\ 0 & c+b+a & 0 & 2c+b \\ 0 & 0 & c+b+a & d+2c+b \\ 0 & 0 & 0 & c+b+a \end{pmatrix}$$

(%i8) `linsolve([a+b+c,b+2*c+d,b+2*c,b+3*c],[a,b,c,d]);`

(%o8)  $[a=0, b=0, c=0, d=0]$

(%i9)

### Exemple 30.

Ici le degré du polynome minimal de  $A_{11}$  est 2; les degrés des polynomes réducteurs sont  $d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 1$  et la dimension de  $K[I, A, W]$  est  $6=3+2+1$ .

(%i4) `m:matrix([1,1,0,0,0,11,12],[0,1,0,0,0,21,25],[0,0,1,1,0,33,37],[0,0,0,1,0,51,54],[0,0,0,0,1,1,0],[0,0,0,0,0,1,0],[0,0,0,0,0,0,1]);`

$$(\%o4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5) (m-ident(7));

$$(\%o5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 33 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i6) (m-ident(7)).(m-ident(7));

$$(\%o6) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i7) (m-ident(7)).(m-ident(7)).(m-ident(7));

$$(\%o7) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i9) w:matrix([0,0,0,0,1,0,0], [0,0,0,0,0,1,0], [0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0],  
[0,0,0,0,0,0,1], [0,0,0,0,0,0,0], [0,0,0,0,0,0,0]);

$$(\%o9) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i10) a\*ident(7)+b\*m+c\*m.m+d\*w+e\*m.w+f\*m.m.w+g\*w.w+h\*m.w.w+i\*m.m.w.w;

(%o10) (c+b+a, 2c+b, 0, 0, f+e+d, 2f+e+43c+11b, i+h+g+49c+12b; 0, c+b+a, 0, 0, 0, f+e+d+42c+21b, 50c+25b; 0, 0, c+b+a, 2c+b, 0, 117c+33b, 128c+37b; 0, 0, 0, c+b+a, 0, 102c+51b, 108c+54b; 0, 0, 0, 0, c+b+a, 2c+b, f+e+d; 0, 0, 0, 0, 0, c+b+a, 0; 0, 0, 0, 0, 0, 0, c+b+a)

(%i13) linsolve([a+b+c, 2\*c+b, f+e+d, 2\*f+e+43\*c+11\*b, i+h+g+49\*c+12\*b, 117\*c+33\*b, 128\*c+37\*b, 102\*c+51\*b, 108\*c+54\*b], [a, b, c, d, e, f, g, h, i]);

(%o13)  $[a=0, b=0, c=0, d=%r3, e=-2%r3, f=%r3, g=-%r2-%r1, h=%r2, i=%r1]$

(%i14)

La résolution annonce 3 degrés de liberté, donc le rang du système est  $9-3=6$ ; ce qui détermine la dimension de l'Algèbre étudiée.

## 3. L'ENSEMBLE DES MATRICES FRACTALES ADMISSIBLES (EN CHANTIER)

Il est immédiat que l'ensemble des matrices cycliques est un ouvert dense de l'ensemble  $F$  des matrices fractales.

**Théorème 31.** *L'ensemble des matrices fractales admissibles est un ouvert dense de  $F$*


**Démonstration.**

Pour tout  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  nous désignons par  $A'_k$  la matrice  $A^k$ , privée de ses lignes secondaires;  $A$  est admissible si et seulement si les matrices  $(I, A'_1, \dots, A'_{p-1})$  sont linéairement indépendantes; ce qui définit un ouvert.

La densité découle de celle de l'ensemble des matrices cycliques, qui sont, comme vu plus haut, admissibles.  $\square$

Paris, Juin 2018-révisé Septembre 2018

## Bibliographie:

- [1] J. Barria and P. R. Halmos, Vector bases for two commuting matrices, *Linear Multilinear Algebra* 27 (1990), 147-157 
- [2] M. Gerstenhaber, « *On dominance and varieties of commuting matrices* », *Ann. Math.*, vol. 73, 1961, p. 324-348
- [3] K.C.O'Meara, J.Clark, C. Vinsonhalter, *Advanced Topics in Linear Algebra*, Oxford University Press, 2011.
- [4] P.Teller, <http://lalgebrisant.fr/images/MatricesCommutantes/LeCommutantestrigonalisable.pdf>
- [5] T.J. Laffey, S.Lazarus, Two-generated Commutative Matrix Subalgebras, *Linear Algebra and its Applications*, 147, 1991, p249-273.
- [6] M.G. Neubauer, D.J. Saltman, Two-Generated Commutative Subalgebras of  $\mathcal{M}_n(F)$ , *Journal of Algebra*, 164, pp.545-562, 1994.
- [7] P.Teller, <http://lalgebrisant.fr/LuniversDesMatricesFractales.pdf>
- [8] H. Shapiro