Les zéros et l'infini, une étude élémentaire des matrices non-négatives

Patrick Teller

21 septembre 2024

Résumé

Il y a deux manières d'étudier les matrices non-négatives "générales" : les associer à des Graphes ([1]) ou leur appliquer l'outillage de l'Algèbre Linéaire ([4]). Le travail qui suit a pris une autre direction : étudier exclusivement le comportement des termes nuls (les "zéros") dans les puissances successives d'une matrice M non-négative ; ce point de vue est le symétrique de l'étude des termes non nuls ([5]) et on pourra comparer les résultats.

Dans le cas où la diagonale de la matrice M est positive les zéros seront de deux types : périssables (destinés à disparaître, comme le nom le suggère) et persistants (nuls pour toute puissance de M). Nous montrerons que les zéros persistants sont les obstacles à l'irréductibilité et que, dans le cas primitif, c'est la "durée de vie" des zéros périssables qui détermine l'exposant de primitivité. Dans le cas où la diagonale de M n'est pas positive (c'est à dire lorsque certains termes de la diagonale sont nuls) apparaîtra la question d'une périodicité éventuelle.

L'essentiel concernera le cas des matrices non-négatives à diagonale positive, le paragraphe 6 étendra ou adaptera les résultats de diagonale positive au cas de diagonale non-positive.

Le paragraphe 2 introduit le point de vue topologique nécessaire pour étudier les ensembles de zéros parmi les cases de la matrice ; dans le cas de zéros périssables un majorant du nombre d'itérations nécessaires pour que les zéros périssables soient éliminés jouera un rôle analogue à celui de l'exposant dans le cas primitif. Le paragraphe 3 s'intéresse aux zéros persistants et aux configurations rassemblant de telles cases. Le paragraphe 4 établit l'équivalence entre matrice non-négative réductible et matrice contenant des zéros persistants, menant à une caractérisation et à un point de vue original pour la réduction de telles matrices. Le paragraphe 5 concerne la recherche effective de configurations de zéros persistants. Le paragraphe 6 a pour objet d'étendre les résultats au cas des matrices non-négatives à diagonale non-positive.

1 Définitions et conventions de base

Nous appellerons tableau de $n \times n$ un ensemble de cases vierges et dans lesquelles nous conviendrons de la possiblité d'inscrire des valeurs, que nous désigneront aussi comme "états" et nous appellerons matrice ce tableau ainsi rempli ; la distinction entre tableau, "vierge", et matrice , "remplie", est de toute première importance parce que nous nous intéressons à l'évolution des valeurs affichées dans ces cases. Comme nous sommes essentiellement intéressés par les zéros des matrices étudiées, nous serons souvent conduits à étudier simplement le cas des matrices à coefficients dans 0,1 avec les règles de calcul que l'on devine :$1+1=1+0=0+1=1, 0+0=0, 0*0=0*1=0, 1*1=1$. ([4])

Si M désigne une matrice non-négative on désignera par $m_{(i,j)}$ la valeur affichée en (i,j) et par $m_{(i,j)}^{[t]}$ la valeur affichée dans la même case de la matrice M^t ; nous dirons aussi que la case (i,j) est dans l'état $m_{(i,j)}^{[t]}$ à l'instant t.

La jème colonne d'une matrice M sera désignée par $M^{(j)}$, à ne pas confondre avec M^j qui représente la puissance j de la matrice, tandis que la ième ligne sera désignée par $M_{(i)}$.

Afin d'éviter des complications dues au langage nous emploierons les termes "non négatif" pour signifier "supérieur ou égal à 0" et "positif" pour "strictement positif".

Nous ne préciserons plus que, jusqu'au paragraphe 5 inclus les matrices considérées sont non négatives et à diagonale positive.

2 Un regard topologique

Définition 1. *Support des zéros d'une matrice*

Soit une matrice M à n lignes et colonnes on appelle support des zéros de M, que l'on notera Z(M), l'ensemble des cases $(i,j) \in [1,..,n]^2$ qui sont dans l'état zéro.

Définition 2. *Distance entre points de $[1,..,n]^2$, distance de Hausdorff de deux parties de $[1,..,n]^2$ associée à cette distance*

Soient $(x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2))$ on désignera leur distance par $d(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|$.

Soient deux parties A et B de $[1,..,n]^2$, on appellera distance de Hausdorff de A et B la borne inférieure de $\{\epsilon, \forall a \in A, \exists b \in B, d(a,b) < \epsilon\}$ et de $\{\epsilon, \forall b \in B, \exists a \in A, d(a,b) < \epsilon\}$ (nous admettrons qu'il s'agit d'une distance sur l'ensemble des parties du tableau $[1,..,n]^2$.

Proposition 1. *Une suite $(Z_t, t \in \mathbb{N}^*)$ de parties de $[1,..,n]^2$ converge au sens de Hausdorff si et seulement si il existe t_0, tel que $\forall t \geq t_0, Z_t = Z_{t_0}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que dans notre cas la distance de Hausdorff est nécessairement un entier non négatif. $\square$

Définition 3. *Soient $M \in U_n$ et la case $(i,j) \in [1,..,n]^2$, dans l'état zéro pour t, on dira qu'il s'agit d'un zéro persistant lorsque $\forall k \in \mathbb{N}^*, m_{(i,j)}^{[k]} = 0$, ce sera un zéro périssable lorsque $\exists t_0 \in \mathbb{N}^*, \forall t > t_0, m_{(i,j)}^{[k]} \neq 0$, on dira que ce zéro est périodique lorsque la case affiche de manière périodique la valeur zéro.*

Nous verrons que les zéros d'une matrice non négative relèvent nécessairement de l'une de ces catégories.

Lemme 1. *Soit $M \in U_n$, $m_{(u,v)}^{[t]} > 0 \Rightarrow m_{(u,v)}^{[t+1]} > 0$.*

Démonstration. Par définition, $m_{(u,v)}^{[t+1]} = m_{(u,v)}^{[t]} m_{(v,v)} + \sum_{k \neq v} m_{(u,k)}^{[t]} m_{(k,v)}$, or chacun des termes du membre de droite est non négatif, sauf $m_{(v,v)}$ et $m_{(u,v)}^{[t]}$ qui sont positifs.

Donc dans le cas d'une matrice à diagonale positive il ne peut apparaître de zéros, mais ils peuvent disparaître. □

Théorème 1. *La suite des supports de zéros est décroissante*

Soit $M \in U_n$ la suite $(Z(M^t), t \in \mathbb{N}^*)$ est décroissante et il existe t_0 tel que $\forall t \geq t_0, Z(M^t) = Z(M^{t_0})$.

Démonstration. Avant tout $\forall t \in \mathbb{N}^{+*}, m_{(i,j)}^{[t+1]} = \sum_{k \ \in [1,..,n]} m_{(i,k)}^{[t]} m_{(k,j)}$, cette somme de termes non négatifs ne peut être nulle que si et seulement si chacun des termes est nul. Or la diagonale de M est positive donc $m_{(j,j)}$ n'est pas nul, par suite, si $m_{(i,j)}^{[t+1]}$ est nul, alors $m_{[i,j]}^{[t]} m_{(j,j)}$ est nul, d'où $m_{(i,j)}^{[t]} = 0$ ce qui signifie que si (i,j) appartient à $(Z(M^{[t+1]}))$ alors (i,j) appartient aussi à $(Z(M^t))$, d'où la suite $(Z(M^t, t \in \mathbb{N}^*)$ est décroissante au sens de l'inclusion. Comme c'est une suite à valeurs dans un ensemble fini, elle est alors convergente.

Enfin nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'une suite convergente pour la distance de Hausdorff dans l'ensemble des parties de $[1,..,n]^2$ est constante à partir d'un certain rang. □

Il est possible de décrire plus précisément le phénomène de la disparition des zéros périssables.

Proposition 2. $Z(M^t) = Z(M^{t+1})$ *implique que* $(Z(M^s), s \geq t)$ *est constante*

Démonstration. Soit M et un entier t tel que $<Z(M^t) = Z(M^{t+1})$. Nous allons montrer qu'alors $Z(M^s, s \geq t)$ est constante

Soit, pour commencer, un couple (i,j) qui appartient à $Z(M^{t+1})$, ce qui se traduit par l'égalité $m_{(i,j)}^{[t+1]} = 0$, d'où $\sum_k m_{(i,k)}^{[t]} m_{(k,j)} = 0$, c'est à dire $\forall k \in [1,..,n], m_{(i,k)}^{[t]} = 0 \vee m_{(k,j)} = 0$.

L'hypothèse $Z(M^t) = Z(M^{t+1})$ entraîne que, quel que soit k $m_{(i,k)}^{[t]} = 0 \Longleftrightarrow m_{(i,k)}^{[t+1]} = 0$, d'où $\sum_k (m_{(i,k)}^{[t+1]}) m_{(k,j)}) = 0$; c'est à dire $m_{(i,j)}^{[t+2]} = 0.$, ce qui établit l'inclusion $Z(M^{t+1}) \subset Z(M^{t+2})$; l'inclusion réciproque se démontre de la même manière. D'où il découle, par une récurrence immédiate que la suite $(Z(M^s), s \geq t)$ est constante. □

Ce qui signifie que si M possède p zéros à l'instant $t = 0$, comme il ne peut y avoir de stagnation de l'ensemble des zéros périssables que lorsque leur ensemble devient constant, alors lorsque $t = p$ ces p zéros doivent avoir disparu.

Théorème 2. *La disparition des zéros périssables*

Soit $M \in U_n$ et m le degré du polynome minimal de M alors la suite $(Z(M^s), s \geq m-1)$ est constante et l'ensemble des zéros de M^{m-1} est identique à celui des zéros persistants de M.

Démonstration. La suite $(Z(M^i)$ est décroissante donc $Z(M^m) \subset Z(M^{m-1}) = \bigcap_{i=1}^{m-1} Z(M_i)$ et d'autre part $M^m = \sum a_i M^i$, où $X^m - \sum a_i X^i$ est le polynôme minimal de M d'où $Z(M^m) = Z(M^{m-1})$. Alors quel que soit (i,k) $m_{(i,k)}^{[m-1]} = 0 \Longleftrightarrow m_{(i,k)}^{[m]}$=0. Par suite pour tout couple (i,j) $\sum_k m_{(i,k)}^{[m-1]} m_{(k,j)} = 0 \Longleftrightarrow \sum_k (m_{(i,k)}^{[m]}) m_{(k,j)}) = 0$. D'où $m_{(i,k)}^{[m-1]} = 0 \Longleftrightarrow m_{(i,k)}^{[m]} = 0$, c'est à dire $Z(M^{m-1}) = Z(M^m)$.

D'où il découle, par une récurrence immédiate que la suite $(Z(M^s, s \geq m-1)$ est constante ; par suite les zéros périssables auront nécessairement disparu au plus tard dans $Z(M^{m-1})$. Et à partir de cette puissance de M les seuls zéros seront persistants et seront ceux de M. $\square$

Ce résultat pourra être comparé, dans le cas à diagonale positive, avec des résultats de [1] sur l'exposant d'une matrice primitive

3 A la recherche des zéros persistants

Il est clair qu'un zéro en soi n'est ni persistant ni périssable, ce qui crée des zéros persistants relève de configurations de cases affichant l'état zéro ; nous recherchons donc des configurations de zéros persistants.

La détermination de l'état d'une case à l'instant $t+1$ en fonction de l'instant t met en jeu deux matrices A et A^t, ce qui nous contraint, pour déterminer A^{t+1} à considérer simultanément deux tableaux A et A^t, nous allons plutôt étudier la sous-suite $(A^{2^t})_t \in N)$ dans laquelle le terme qui suit A^{2^t} est tout simplement son carré, c'est-à-dire le résultat du produit de A^{2^t}, par lui-même, ce qui ne met donc en jeu chaque fois qu'une seule matrice : A^{2^t}. Par ailleurs nous avons vu que la suite des supports de zéros des puissances de A est décroissante donc le zéro d'une case (i,j) sera persistant pour la suite $(A^t)_t \in N)$ si et seulement il est persistant pour la sous-suite$(A^{2^t})_t \in N)$.

Dans ce qui suit, pour alléger l'écriture, nous désignerons A^{2^t} par M et $A^{2^{t+1}}$ par M^2.

Définition 4. *Soit (i,j) un zéro de M on dira que c'est un zéro d'ordre supérieur ou égal à 2 lorsque $m_{(i,j)} = m_{(i,j)}^{[2]} = 0$. Dans ce cas on posera $I_1 = \{k \in [1,..,n], m_{(k,j)} = 0\}$ et $I_2 = \{k \in [1,..,n], m_{(k,j)} = 1\}$. I_1 représente les indices des cases de la colonne $M^{(j)}$ qui sont dans l'état zéro à l'instant $t = 1$ et I_2 représente les indices des cases de la ligne $M_{(i)}$ à l'état zéro pour $t = 1$).*

Définition 5. *Soit M une matrice à n lignes et colonnes, I et J des sous-ensembles de $[1,..,n]$ on désignera par $M_{(I,J)}$ la matrice obtenue en supprimant dans M les lignes dont l'indice n'appartient pas à I et les colonnes dont l'indice n'appartient pas à J.*
$M_{(I,J)}$ sera appelée sous-matrice essentiellle lorsque (I,J) est une partition de $[1,..,n]$ en deux parties non vides.

.

Proposition 3. *Toute sous-matrice essentielle nulle est une configuration de zéros persistants.*

Démonstration. Supposons que $M_{(I,J)} = 0$, posons $M = (a_{(u,v)})$ où $a_{(u,v)} = 0$ lorsque $u \in I \wedge v \in J$.

L'état de la case (u,v) de $M_{(I,J)}$ en $t = 2 =$ est égal à $\sum_{k\in[1,..,n]} a_{(u,k)}a_{(k,v)}$, qui se décompose en $\sum_{k\in I} a_{(u,k)}a_{(k,v)} + \sum_{k\in J} a_{(u,k)}a_{(k,v)}$. Si $k \in I$, $a_{(k,v)} = 0$ donc $\sum_{k\in I_1} a_{(u,k)}a_{(k,v)} = 0$ et, de même, si $k \in I$, $a_{(u,k)} = 0$ et il en découle que $\sum_{k\in J} a_{(u,k)}a_{(k,v)} = 0$. D'où $M_{(I,J)} = 0$ entraine que $M^{(2)}_{(I,J)} = 0$ et une récurrence immédiate établira que la nullité de $M_{(I,J)} = 0$ entraine que $\forall t, M^t_{(I,J)} = 0$.

Par suite les cases des sous-matrices essentielles nulles sont des configurations de zéros persistants ; il en sera de même pour les réunions, (disjointes ou non) de sous-matrices essentielles nulles. □

Considérons une matrice non-négative M qui ne contient pas de zéros périssables (le Théorème 2 permet, tout en éliminant les zéros périssables, de conserver intact l'ensemble des zéros persistants).

Soit une case (i,j) qui affiche un zéro persistant, elle est en particulier en l'état zéro pour $t = 1$ et $t = 2$, alors $m^{[2]}_{(i,j)} = m_{(i,i)}m_{(i,j)} + m_{(i,j)}m_{(j,j)} + \sum_{(k\neq i\wedge k\neq j)} m_{(i,k)}m_{(k,j)}$; comme les zéros ne peuvent pas appartenir à la diagonale principale, ceci signifie que $m^{[2]}_{(i,j)}$ ne peut s'annuler que si $m_{(i,j)}$ s'annule ainsi que la somme $\sum_{(k\neq i\wedge k\neq j)} m_{(i,k)}m_{(k,j)}$.

Considérons les ensembles d'entiers I_1 et I_2 introduits dans la définition 4, la somme $\sum_{k\in[1,..,n]} m_{(i,k)}m_{(k,j)}$ se décompose en $\sum_{k\in I_1} m_{(i,k)}m_{(k,j)} + \sum_{k\in I_2} m_{(i,k)}m_{(k,j)}$.

Si $k \in I_1$, $m_{(k,j)} = 0$ donc $m^{[2]}_{(i,j)} = \sum_{k\in I_2} m_{(i,k)}m_{(k,j)} = 0$ et, comme si $k \in I_2$, $m_{(k,j)} \neq 0$ et il en découle que $\forall k \in I_2 m_{(i,k)} = 0$. Si on raisonne de même pour chaque entier u tel que $m^{[2]}_{(u,j)} = 0$ alors $\forall (u,k) \in I_1 \times I_2, m(u,k) = 0$; de plus, par construction, (I_1, I_2) constitue une partition de $[1,..,n]$, d'où la sous-matrice essentielle $M_{(I_1,I_2)}$ est nulle. En conséquence la configuration de zéros (persistants) considérée contient les cases de la sous-matrice essentielle $M_{(I_1,I_2)}$. D'où, en tenant compte de la proposition 2,

Proposition 4. *Toute configuration de zéros persistants est une réunion de cases de sous-matrices essentielles.*

On désignera sous le nom de "procédure de la proposition 3" la recherche de la nullité de la sous-matrice essentielle $M_(I_1, I_2)$.

Remarque 1. *On remarquera que la configuration n'est pas définie par le zéro de la case* (i, j) *mais par un ensemble de zéros (dont les abscisses constituent* I_1*) sur la colonne* $M^{(j)}$ *; il aurait été aussi légitime de nous appuyer sur* $\{k \in [1, .., n], m^{[2]}_{(i,k)} = 0\}$.

Soit la matrice M (dont on pourra vérifier que tous les zéros sont persistants.

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1
3	0	0	1	1	0
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0

La démarche appliquée dans la proposition 3 nous fournit les sous-matrices essentielles suivantes :
$M_{(3,4,5),(1,2)}, M_{(1,3,4,5),(2)}, M_{(1,5),(2,3,4)}, M_{(1,5),(2,3,4)}, M_{(1,3,4,5),(2)}$, qui sont nulles et dont la réunion des cases coïncide avec l'ensemble des zéros persistants, mais ne comporte pas les deux sous-matrices essentielles de taille 4×1, dont la présence peut se lire sur le tableau ; on retiendra l'absence d'unicité dans la détermination des sous-matrices essentielles nulles. Considérons maintenant la matrice N, dans laquelle un zéro périssable a été ajouté dans la case $(2, 4)$.

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0

Les sous-matrices à considérer restent les mêmes, sauf la quatrième : $M_{(1,5),(2,3,4)}$ devenant $M_{(1,2,5),(3,4)}$; celle-ci s'avérera non nulle, ce qui fait que la démarche de la proposition 3 ne pourra mettre en évidence la sous-matrice $M_{(1,5),(2,3,4)}$. Ce qui confirme de ne réserver l'usage de la procédure de la proposition 3 qu'aux cas où il "ne reste plus que des zéros persistants".

4 Zéros et matrices réductibles

Rappelons la définition des matrices non-négatives réductibles qui possède saussi une caractérisation par les graphes[1,2]

Définition 6. *Matrices réductibles*

$M \in \mathcal{M}_n(R^{*+})$ *est dite réductible s'il existe une matrice de permutation* P *telle que* ${}^tPMP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ *où* $(B, D) \in \mathcal{M}_p(R^{+*}) \times \mathcal{M}_{n-p}(R^{+*})$ *et* $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(R^{+*})$*. Une matrice irréductible est une matrice qui n'est pas réductible.*

Aux diverses caratérisations de la réductabilité (ou de l'irréductibilité) [1] nous ajouterons la suivante :

Théorème 3. *Une matrice non-negative M est réductible si et seulement si elle possède une sous-matrice essentielle nulle $M_{(I,J)}$ [2]*

Démonstration. Soient M et une sous-matrice essentielle nulle $M_{(I,J)}$. Pour montrer l'existence d' une matrice de permutation P telle que ${}^tPMP$ est de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, nous allons la produire comme produit de transpositions.
Une partie de [1,..,n] sera appelée "segment initial" si son minimum est égal à 1 et si elle est connexe dans $[1,..,n]$, elle sera appelée "segment final" si son maximum est égal à n et si elle est connexe dans $[1,..,n]$. On rappelle que I indexe les lignes de $M_{(I,J)}$ et J indexe les colonnes de $M_{(I,J)}$.

Tant que I n'est pas un segment final (et J n'est pas un segment initial) effectuons sur les colonnes de M la transposition $P = (min(I), max(\complement_{[1,..,n]}I)$ qui se traduit par $I : I - min(I) + max(J)\ J : J - max(J) + min(I)$.

Comme le minimum de I croit strictement (et celui de J décroit strictement) la procédure s'arrête ; à ce moment I est un segment final, J est un segment initial, les zéros de la sous-matrice essentielle sont regroupés en un bloc sud-ouest. De plus nous avons aussi obtenu P comme composée de transpositions.

Pour être plus précis, nous avons montré que l'image de la sous-matrice essentielle nulle par la suite de conjugaisons est le bloc Sud-Ouest de la matrice conjuguée ; si B ou D comporte des zéros on appliquera la procédure à B et/ou à D. Réciproquement soit une matrice non-négative M, pour laquelle il existe une matrice de permutation P vérifiant $M = P \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} {}^tP$. Les cases du bloc Sud-Ouest de la matrice $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ affichent des zéros persistants, et la conjugaison par la matrice de permutation P ne fait que déplacer les termes de la matrice, donc M possède des zéros persistants et, par suite possède (au moins) une sous-matrice essentielle nulle. □

Remarque 2. *M sera réductible ou pas suivant la présence ou non de sous-matrices essentielles nulles. Dans le cas où il existe une sous-matrice essentielle nulle elle détermine une matrice de permutation P telle que* $M = P \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} {}^tP$. *Si B et D sont irréductibles M est réduite, sinon on recommence sur B et/ou D.*

5 Recenser les sous-matrices essentielles nulles

Il n'est possible de recenser les matrices essentielles nulles que lorsqu'il n'y a pas de zéros périssables, d'où le protocole

— Elever M à une puissance assez grande pour éliminer les zéros périssables

— Appliquer la procédure de la proposition 3 pour déterminer les sous-matrices essentielles nulles.

Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1ère étape : $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; comme $M^2 = M^3$ les zéros restants sont les zéros persistants de M.

seconde étape : Les configurations de zéros persistants, c'est à dire les matrices essentielles nulles, sont :
$M_{(2),(1,3,4,5)}, M_{(1),(2,3,4,5)}, M_{(1,2,4),(3,5)}, M_{(1,2),(3,4,5)}, M_{(1,2,3,4),(5)}$.
La complexité est supérieure à celle des méthodes utilisant les graphes, par contre elle est plus élémentaire.

6 Le cas de diagonale non positive

Rappelons que dans le cas d'une matrice non négative dont la diagonale contient des zéros la suite des supports de zéros peut ne pas être monotone.

Théorème 4. *Soit $M \in U_n$, dont la diagonale n'est pas positive, les zéros de la suite des matrices (M^t) sont périssables, persistants ou ultimement périodiques.*

Démonstration. Nous avons vu qu'il existe un entier p tel que les matrices $(M^t, t > p))$ ne possèdent plus de zéros périssables ; comme la suite $(Z(M^t), t > p)$ est à valeurs dans un ensemble fini il existe $p < t_0 < t_1$ tels que $Z(M^{t_0}) = Z(M^{t_1})$. Nous prendrons le plus petit couple (t_0, t_1) qui vérifie cette propriété. Nous allons montrer qu'alors $Z(M^{t_0+1}) = Z(M^{t_1+1})$. Soit, pour commencer, un couple (i,j) qui appartient à $Z(M^{t_0+1})$, ce qui se traduit par l'égalité $m^{[t_0+1]}_{(i,j)} = 0$, d'où $\sum_k m^{[t_0]}_{(i,k)} m_{(k,j)} = 0$, c'est à dire $\forall k \in [1,..,n], m^{[t_0]}_{(i,k)} = 0 \vee m_{(k,j)} = 0$.

L'hypothèse $Z(M^{t_0}) = Z(M^{t_1})$ entraîne que, quel que soit $k, m^{[t_0]}_{(i,k)} = 0 \iff m^{[t_1]}_{(i,k)} = 0$, d'où $\sum_k (m^{[t_1]}_{(i,k)}) m_{(k,j)}) = 0$; c'est à dire $m^{[t_1+1]}_{(i,j)} = 0.$, ce qui établit l'inclusion $Z(M^{t_0+1}) \subset Z(M^{t_1+1})$; l'inclusion réciproque se démontre de la même manière. D'où il découle, par une récurrence immédiate que la suite $(Z(M^t), t \geq t_0)$ est périodique de période $t_1 - t_0$. Or si on désigne par $P(M^t)$ le support des zéros persistants qui est constant $(Z(M^t), t \geq t_0) = P(M^t) \cup Q(M^t)$ (union disjointe), où $Q(M^t)$ désigne le support des zéros à la présence périodique.

Ce qui établit que les zéros de la suite (M^t) sont périssables, persistants ou ultimement périodiques.

Bien entendu si $t_1 = t_0 + 1$ la suite "ultimement périodique de période 1" est tout simplement constante à partir de t_0. $\square$

Exemple : Reprenons la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Reproduisons la suite des supports de zéros $Z(M) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \\ & 0 & & & 0 \end{pmatrix}$,$Z(M^2) =$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & 0 & \end{pmatrix}$,$Z(M^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, $Z(M^4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & & & 0 \\ & & & 0 & \end{pmatrix}$,

$Z(M^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$.

On voit que $Z(M^3) = Z(M^5)$.
D'où la composante périodique pour $k > 2$:

$$\forall k \cong 1 \pmod 2 \ Z'''(M^k) = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$\forall k \cong 0 \pmod 2 \ Z'''(M^k) = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & 0 & & & 0 \\ & & & 0 & \end{pmatrix}.$$

De même on isole facilement la composante persistante : $Z'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$,

Donc les zéros des deux dernières lignes sont périodiques Remarquons que si l'état zéro d'une case (i, j), relativement à A, est périodique de période t alors cet état est un zéro persistant relativement à A^t.

Nous pouvons maintenant interpréter les notions d'irréductibilité et de primitivité de matrices non-négatives (sans condition sur la diagonale) à la lumière de la classification des zéros.

Théorème 5. *Une matrice non-négative est irréductible si et seulement elle ne possède pas de zéros persistants.*

Démonstration. Il suffit de reprendre le raisonnement du Théorème 3, y compris dans le cas où la diagonale n'est pas positive. □

Rappelons la

Définition 7. *Une matrice non négative M est dite primitive lorsqu'il existe un entier m tel que $M^m > 0$ et le plus petit m pour lequel cette inégalité est vraie est appelé exposant de M..*

A la lumière des résultats précédents on voit que

Théorème 6. *Une matrice non-négative M est primitive si et seulement si ses zéros sont périssables (l'absence de zéros persistants se traduit par l'irréductibilité).*

D'une part nous avons vu que des zéros périodiques ne peuvent advenir que dans le cas de matrices non-négatives à diagonale non-positive, d'autre part il a été prouvé ([4],III, corollaire 1.1) qu'une matrice non-négative, de trace positive et irréductible est primitive donc

Théorème 7. *Une matrice non-négative et irréductible qui possède des zéros périodiques a forcément une diagonale nulle.*

L'exposant d'une matrice primitive M, Exp(M), a été défini comme le plus petit entier m tel que M^m est positive ; sachant que les zéros d'une matrice primitive sont périssables on peut dire que Exp(M) est le plus petit entier m tel que M^m ne possède plus de zéros périssables. Par suite on peut définir l'exposant étendu d'une matrice non-négative M, noté EExp(M), comme le plus petit entier m, s'il existe, tel que M^m ne possède que des zéros persistants ; dans le cas irréductible l'exposant étendu coïncide avec l'exposant, d'où le Théorème suivant qui étend le résultat de [3] :

Théorème 8. *Soit une matrice non-négative M, de taille n, irréductible et de diagonale positive alors M^{m-1} est positive*

Démonstration. Comme M est irréductible elle ne possède pas de zéro persistant, donc , comme sa diagonale est positive, elle ne possède que des zéros périssables ; par suite (Théorème 2) M^{m-1} ne possède pas de zéros, donc est positive. □

6.1 Réductibilité et réduction

Soit une matrice M non-négative et de diagonale non-positive, posons $N = M+I_n$, N est une matrice non-negative et sa diagonale est positive,ce qui permet de lui appliquer les résultats des sections précédentes. D'autre part,

Proposition 5. *Soient M une matrice non-négative et à diagonale non-positive et $N = Id + M$, M est réductible si et seulement N l'est.*

Démonstration. Soit P une matrice de permutation $M = P\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}^t P \Leftrightarrow N = Id + \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}^t P \Leftrightarrow N = P\begin{pmatrix} Id+B & C \\ 0 & Id+D \end{pmatrix}^t P$ (parce que B et D sont carrées). □

Par suite la réductibilité de M est bien équivalente à celle de N, à laquelle on pourra appliquer ce qui concerne les matrices non-négatives à diagonale positive.

Exemple Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sa diagonale n'est pas positive, on pose donc $N = Id+M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Le bloc Nord-Est de N est la réunion de trois configurations de zéros persistants donc ces neuf zéros sont persistants ; au passage on remarquera que ces trois configurations ($M_{(2),(1,3,4,5)}$, $M_{(1,2),(3,4,5)}$ et $M_{(1,2,3),(4,5)}$) ne sont pas disjointes.

Le simple calcul de N^3 montre que les quatre autres zéros sont périssables, par suite N n'est pas irréductible et M non plus.

6.2 Les zéros persistants

Soit M, non-négative et dont la diagonale contient des zéros ; on pose $N = I+M$ et on distingue deux cas. Si $i = j$ et si $m_{(i,i)} = 0$ $n_{(i,i)} = 1+m_{(i,i)}$ donc la case (i,i) de M peut être de manière persistante dans l'état zéro sans que ce soit le cas pour N. Sinon la formule du binôme, $N^p = \sum_{k\in[0,..,p]} \binom{p}{k} M^k$, entraîne que si la case (i,j) de la matrice M est dans l'état zéro, il en sera de même pour N, la réciproque de cette afirmation étant vraie aussi parce qu'une somme de nombres non-négatifs n'est nulle que si et seulement si chacun est nul.

Définition 8. *On appellera support des zéros de la diagonale l'ensemble* $Z_{diag}(M^t) = \left\{i, m^t_{(i,i)} > 0\right\}$

Lemme 2. *La suite* $(Z_d(M^{2^k}), k)$ *est décroissante*

Démonstration. il suffit de remarquer que, pour tout i, si $m^t_{(i,i)} > 0$ alors $m^{2t}_{(i,i)} > 0$. □

Par conséquent la suite $(Z_{diag}(M^{2^t}), t)$ est convergente et on notera sa limite $Z_{(diag,M)}$.

Références

1 R.A. Brualdi,H.J. Ryser, Combinatorial Matrix Theory, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1991.

2 R.A. Brualdi, Matrices permutation equivalent to irreducible matrices and applications, Linear Multilin. Alg. vol 7, PP1-12.

3 J.C. Holladays, R. Varga, On Powers of Non-negative Matrices, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 9, No. 4 (Aug., 1958), pp. 631-634.

4 H.Minc, Nonnegative Matrices, Wiley Interscience Publications, 1988.

5 S. Schwarz, L'application des demi-groupes à l'étude des matrices non-négatives, Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, Tome 20 (1966-1967) no. 1, Exposé no. 2.