Y a-t-il des points entiers dans ce polyèdre ?

PAR PATRICK TELLER

Avertissement 1. Dans tout ce qui suit on entendra par entiers les entiers naturels.

On considère un polyèdre défini par un système d'inéquations $\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j \leqslant b_1 \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m a_{\mathrm{nj}} x_j \leqslant b_n \\ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{+m} \end{cases}$ (*) et on désire savoir s'il contient des points à coordonnées entières.

(on suppose que les coefficients sont dans $\mathbb{N}$ [1]).

1 L'existence de points entiers

Comme dans le cas de la programmation linéaire nous allons remplacer les inégalités par des égalités en introduisant de nouvelles variables:

$$\exists X \in N^m,\ (*) \Longleftrightarrow \exists \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^{m+n} \begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j + y_1 = b_1 \\ \dots \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m a_{\mathrm{nj}} x_j + y_n = b_n \\ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{+m} \end{cases}.$$

Par suite la question de l'existence de points à coordonnées dans $\mathbb{N}$ se ramène à celle de solutions entières pour le système $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \end{pmatrix}$, ceci se fait en utilisant une base standard vectorielle associée à la famille des colonnes de la matrice $\begin{pmatrix} A & I \\ -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ [2],[3].

Exemple 2.

1) Considérons le système $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$

Ce qui s'écrit $\begin{cases} x + y_1 = 2 \\ x - y_2 = 3 \end{cases}$ et se transforme suivant [1] en le système $\begin{cases} x + y_1 + y_2 + z = 2 \\ x + z = 3 \\ y_2 + z = 0 \end{cases}$ (pour lequel on veut (x,y_1,y_2,z)$\in \mathbb{N}^3 \times \mathbb{Z}^-$)

D'où la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

A cette matrice nous associons la famille de vecteurs S: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; la base standard associée que nous obtenons [2], [3] sera S_∞: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La réduction du vecteur $\begin{pmatrix} 2\\3\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ modulo la bases standard est $\begin{pmatrix} 2\\3\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$, et non $\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\*\\...\\...\\... \end{pmatrix}$, donc il n'y a pas de point (entier) tel que $\left\{\begin{array}{l} x\leqslant 2\\ x\geqslant 3 \end{array}\right.$.

2) Inversement si on cherche des points entiers tels que $\left\{\begin{array}{l} x\leqslant 3\\ x\geqslant 2 \end{array}\right.$ la matrice est la même et ce sera la même base standard qui nous conduira à la réduction de $\begin{pmatrix} 3\\2\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 3\\2\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}=$ $2\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}$; d'où la solution x=2,$y_1$=1,$y_2$=0,z=0, c'est à dire l'entier 2.

Le seul vecteur de la base standard appartenant au noyau est $\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix}$, les seuls autres points entiers seront définis par $\left\{\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix}, \lambda\in\mathbb{Z}\right\}$, sous la condition que $\left\{\begin{array}{l} 2+\lambda\geqslant 0\\ 1-\lambda\geqslant 0\\ \lambda\geqslant 0\\ -\lambda\leqslant 0 \end{array}\right.$; ce qui conduit à $\lambda=0$ (x=2,y_1=1, d'où l'entier 2) et $\lambda=1$(x=3,y_1=0,y_2=1,z=-1, d'où l'entier 3).

Exemple 3.

1) Considérons l'inéquation $x_1+x_2\leqslant 2$

Ce qui s'écrit $x_1+x_2+y=2$, d'où la matrice $(\,1\ \ 1\ \ 1\,)$, la famille de vecteurs S: $\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$ puis à la base standard associée S_∞: $\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1 \end{pmatrix}$.

La réduction du vecteur $\begin{pmatrix} 2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ modulo S_∞ est immédiate: $\begin{pmatrix} 2\\0\\0\\0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix}$, d'où le point (2,0), mais la réduction n'est pas finie $\begin{pmatrix} 0\\2\\0\\0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\0\\2\\0 \end{pmatrix}$, nouveau point (0,2), et la réduction continue $\begin{pmatrix} 0\\0\\2\\0 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\2 \end{pmatrix}$, le point (0,0).

2) Considérons l'inéquation $2x_1+2x_2\leqslant 1$

Ce qui s'écrit $2x_1+2x_2+y=1$, d'où la matrice $(\,2\ \ 2\ \ 1\,)$,la famille de vecteurs S: $\begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$ puis la base standard associée S_∞: $\begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-2 \end{pmatrix}$.

La réduction du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ modulo S_∞ est immédiate: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui désigne directement le point (0,0); s'il y avait un autre point entier $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, avec c différent de 1, donc nul, alors il existerait une combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; mais 0=1-2y+2z est impossible pour des raisons de parité.

Remarque 4. Le point (0,...,0) étant nécessairement toujours présent il est nécessaire de trouver un moyen de déceler les autres points entiers éventuels.

2 L'existence de sommets entiers « propres »

Dans cette partie nous supposerons que le polyèdre P(*) est défini par (A,B)$\in\mathcal{M}_{\mathrm{nm}}(\mathbb{N})\times\mathcal{M}_{m1}(\mathbb{N})$

et le système $\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j + y_1 = b_1 \\ .... \\ .... \\ \sum_{j=1}^m a_{\mathrm{nj}}x_j + y_n = b_n \\ (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^{+m} \end{cases}$ (*)

Définition 5. *Sommets du polyèdre P*

Un sommet du polyèdre P est un point pour lesquel m des n+m coordonnées $(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n)$ *sont nulles.*

Théorème 6. *La recherche de sommets entiers*

Soit le polyèdre P, le sommet A défini par $x_{j(1)}=...=x_{j(t)}=y_{i(1)}=...=y_{i(m-t)}=0$ *et la forme linéaire g:*$(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) \longmapsto x_{j(1)}+...+x_{j(t)}+y_{i(1)}=...+y_{i(m-t)}$

Il est possible de déterminer le point entier de P où est atteint le minimum de g [3].

A est un point entier si et seulement si le minimum de g est égal à 0.

Bibliographie :

[1] P. Teller, Une histoire de signes, www.lalgebrisant.fr

[2] P. Teller, Version vectorielle des bases standard, www.lalgebrisant.fr

[3] P. Teller, Programmation linéaire en entiers, www.lalgebrisant.fr