Des produits infinis, des rationnels et des irrationnels quadratiques

PAR PATRICK TELLER

Résumé

Bien que ce soit l'objet d'un exercice dans [1] il est assez peu connu que tout réel $x \in \left]1, 2\right]$ est la limite (de manière unique) d'un produit infini $\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$ où la suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions: $p_0 \geqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} \geqslant p_n^2$; dans la littérature (rare), ce produit est connu sous le nom de produit de Cantor [2].

Dans le cas des rationnels de la forme $\frac{m}{m-1}$ on aura même $\frac{m}{m-1} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{m^{2^n}}\right)$, c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = p_n^2$; l'usage de la fonction $S: x \longmapsto \frac{x}{1 + E(\frac{x}{x-1})}$ permet d'établir que, quel que soit le rationnel de l'intervalle $\left]1, 2\right]$, il existe un rang r tel que $\forall n \geqslant r + 1, p_{n+1} = p_n^2$.

Par ailleurs la valeur de r est majorée par la valeur de l'entier D(x) lorsque x est irréductible, ce qui rend ce développement effectif.

Dans [2] on trouve aussi un résultat concernant les produits de Cantor relatifs aux irrationnels de la forme $\sqrt{\frac{q_0+1}{q_0-1}}$; en reprenant la même démarche nous allons déterminer pour tout réel de l'intervalle $\left]1, 2\right]$ de la forme $\sqrt{\frac{a}{b}}$ un développement en produit infini de convergence quadratique.

Ici aussi on remarquera que le développement est totalement effectif puisque ses termes sont définis par la donnée du rationnel $\frac{a}{b}$ et d'une formule de récurrence.

1 1. Le résultat classique.

Lemme 1. *Soit* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\prod_{n \in \mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{k^{2^n}}\right) = \frac{k}{k-1}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que quel que soit p, $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \prod_{n=0 \dots p} \left(1 + \frac{1}{k^{2^n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{k^{2^{p+1}}}\right)$ □

Nous allons avant tout définir la fonction S qui est le noeud de la question.

Définition 2. *La fonction S*

Pour tout réel $x \in \left]1, 2\right]$ il existe un entier $m \geqslant 2$ et un seul tel que $\frac{m+1}{m} < x \leqslant \frac{m}{m-1}$, il est défini par $m = E\left(\frac{x}{x-1}\right)$, on posera $S(x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{m}}$ c'est à dire de manière générale $S(x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{E\left(\frac{x}{x-1}\right)}}$.

Lemme 3. *La restriction de S à tout intervalle de la forme* $\left]\frac{m+1}{m}, \frac{m}{m-1}\right]$ *est une bijection croissante de* $\left]\frac{m+1}{m}, \frac{m}{m-1}\right]$ *sur* $\left]1, \frac{m^2}{m^2-1}\right]$

Démonstration. La monotonie est évidente; $S\left(\frac{m}{m-1}\right) = \frac{\frac{m}{m-1}}{1 + \frac{1}{m}} = \frac{m^2}{m^2-1}$ et la limite de S en $\frac{m+1}{m}^+$ est égale à 1; par suite si $x \in \left]\frac{m+1}{m}, \frac{m}{m-1}\right]$, $S(x) \leqslant \frac{m^2}{m^2-1}$ d'où $E\left(\frac{S(x)}{S(x)-1}\right) \geqslant m^2$. □

Proposition 4. *Quel que soit* $x \in \left]1,2\right]$ *il existe une suite unique d'entiers* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que* $p_0 \geqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} \geqslant p_n^2, x = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$.

Démonstration.

i) D'abord nous allons établir l'unicité de cette suite, si elle existe:

Soit $x \in \left]1,2\right]$ et une suite d'entiers $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $p_0 \geqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} \geqslant p_n^2, x = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$; en écrivant $x = \left(1 + \frac{1}{p_0}\right)\prod_{n\geqslant 1}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$ on en déduit $\prod_{n\geqslant 0}\left(1 + \frac{1}{{p_0}^{2^n}}\right) \geqslant x > \left(1 + \frac{1}{p_0}\right)$ d'où on déduit du lemme 1 que $\left(\frac{p_0}{p_0 - 1}\right) \geqslant x > \left(1 + \frac{1}{p_0}\right)$ et donc $p_0 = E\left(\frac{x}{x-1}\right)$ et $\frac{x}{1 + \frac{1}{p_0}} = \prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$, ce qui signifie que $S(x) = \prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)$; ce qui établit par récurrence l'unicité de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) L'existence se démontrera de même:

Soit $x \in \left]1,2\right]$ et $p_0 = E\left(\frac{x}{x-1}\right)$ alors $x = \left(1 + \frac{1}{p_0}\right)S(x)$ et $S(x) \leqslant \frac{p_0^2}{p_0^2 - 1}$, d'où $E\left(\frac{S(x)}{S(x)\text{-}1}\right) \geqslant p_0^2$, ce qui entraîne $p_1 \geqslant p_0^2$ et permet de continuer le processus.

Alors la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, par suite $(S^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, pour tout N $x = \prod_{n=0\ldots N}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)S^{N+1}(x)$ et donc $\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = x$.

Le produit infini décrit au-dessus sera appelé produit de Cantor. ☐

2 2. Le cas des rationnels.

Proposition 5. *Pour tout rationnel de la forme* $\frac{m}{m-1}$ *on a l'égalité* $\frac{m}{m-1} = \prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1 + \frac{1}{m^{2^n}}\right)$

voir lemme 1.

Définition 6. *Soit un rationnel* $\frac{p}{q} \in \left]1,2\right]$, *où* $p \wedge q = 1$, *nous appellerons différence de* $\frac{p}{q}$, *noté* $D(\frac{p}{q})$, *l'entier p-q>0.*

Lemme 7. *Pour tout rationnel* $\frac{p}{q} \in \left]1,2\right]$, $D(S(\frac{p}{q})) \leqslant D\left(\frac{p}{q}\right)$; *il n'y a égalité que si et seulement si* $D\left(\frac{p}{q}\right) = 1$.

Démonstration. Soit x$=\frac{p}{q} \in \left]1,\ 2\right]$ et $m = E\left(\frac{x}{x-1}\right)$ alors $m \leqslant \frac{p/q}{p/q - 1} < m+1$, d'où $m \leqslant \frac{p}{p-q} < m+1 \Longleftrightarrow$ mp-m$q \leqslant p <$ mp + p-mq-q et en particulier mp-m$q \leqslant p$; d'autre part $S(p/q) = \frac{p/q}{1 + 1/m} = \frac{\text{mp}}{q(m+1)}$, d'où $D(S(p/q)) \leqslant$ mp -mq-q; on en déduit que $D(S(p/q))$-$D\left(\frac{p}{q}\right) \leqslant$ mp-mq-q-p+q$\leqslant$mp-mq-p$\leqslant 0$.

Et il ne peut y avoir égalité que lorsque mp-m$q = p$, c'est à dire $m = \frac{p/q}{p/q - 1}$, ce qui est équivalent à $\frac{p}{q} = \frac{m}{m\text{-}1}$. ☐

Proposition 8. *Quel que soit le rationnel* $x \in \left]1,2\right]$ *il existe deux entiers (r,t) tels que* $S^r(x) = \frac{t}{t\text{-}1}$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que D est strictement décroissante à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tant qu'elle n'a pas atteint la valeur 1. ☐

Théorème 9.

Quel que soit $x \in \left]1,2\right]$ *il existe une suite unique d'entiers* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que* $p_0 \geqslant 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} \geqslant p_n^2, x = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{1}{p_n}\right)$.

x est rationnel si et seulement si $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in [\![0,r]\!], p_{n+1} \geqslant p_n^2, \forall n \geqslant r+1, p_{n+1} = p_n^2$.

Démonstration.

La première partie est démontrée dans la proposition 4.

Si x est rationnel et si r est comme dans la proposition 8. il existe une suite d'entiers $(m_0, \ldots, m_r)$ telle que $m_0 \geqslant 2, \forall i \in \{0, \ldots, r-1\}$, $m_{i+1} \geqslant m_i^2$ (cf 1) et $\frac{x}{\prod_{i=0,\ldots,r\text{-}1}\left(1+\frac{1}{m_i}\right)} = \mathrm{S}^r(x) = \frac{m_r}{m_r\text{-}1}$.

Par ailleurs on vérifie aisément que $\frac{m_r}{m_r\text{-}1} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{1}{m_r^{2^n}}\right)$.

Ce qui permet de conclure que $x = \prod_{i=0,\ldots,r\text{-}1} \left(1+\frac{1}{m_i}\right) \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{1}{m_r^{2^n}}\right)$.

La réciproque est immédiate. □

Remarque 10. Comme $\mathrm{D}(\mathrm{S}(\frac{p}{q})) < D\left(\frac{p}{q}\right)$ tant que l'entier $D\left(\frac{p}{q}\right) > 1$ la valeur de r est majorée par l'entier D(x) donc le résultat est tout à fait effectif.

3 3. Le cas des irrationnels quadratiques.

Proposition 11. *Si* $x \in \left]1,2\right]$ *est de la forme* $\sqrt{\frac{m+k}{m-k}}$ *où m est un entier, il existe une suite unique d'entiers* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tels que* $q_0 \geqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = 2q_n^2 - k^{2^n}, x = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right)$.

Démonstration. Le cas où k=1 est traité dans [2], la démonstration du cas général s'en inspire.

i) Remarquons que si $q_{n+1} = 2q_n^2 - k^{2^{n+1}}$ alors, en posant $a_n = k^{2^n}$ et $a_{n+1} = k^{2^{n+1}} = a_n^2$, $\left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right)\left(1+\frac{k^{2^{n+1}}}{q_{n+1}}\right) = \frac{(q_{n+1}+a_n^2)(q_n+a_n)}{q_n q_{n+1}} = \frac{(2q_n^2)(q_n+a_n)}{q_n q_{n+1}} = \frac{2q_n(q_n+a_n)}{q_{n+1}} = \frac{2q_n(q_n^2-{a_n}^2)}{q_{n+1}(q_n-a_n)} = \frac{q_n(2q_n^2-2{a_n}^2)}{q_{n+1}(q_n-a_n)} = \frac{q_n(q_{n+1}-{a_n}^2)}{q_{n+1}(q_n-a_n)} = \frac{q_n(q_{n+1}-a_{n+1})}{q_{n+1}(q_n-a_n)} = \frac{\left(1-\frac{k^{2^{n+1}}}{q_{n+1}}\right)}{\left(1-\frac{k^{2^n}}{q_n}\right)}$; d'où $\prod_{n=0\ldots N-1} \left\{\left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right)\left(1+\frac{k^{2^{n+1}}}{q_{n+1}}\right)\right\} = \frac{\left(1-\frac{k^{2^N}}{q_N}\right)}{\left(1-\frac{k}{q_0}\right)}$.

ii) Comme $\forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = 2q_n^2 - k^{2^{n+1}}$, nous allons poser pour tout n $\mathrm{U}_n = \frac{q_n}{k^{2^n}}$, la suite (U_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 2U_n^2 - 1$ et, comme $\sqrt{\frac{q_0+k}{q_0-k}} \leqslant 2$, alors $U_0 \geqslant \frac{5}{3}$ et il est aisé de montrer que (U_n) tend vers l'infini et donc $\left(1-\frac{k^{2^N}}{q_N}\right)$ tend vers 1.

iii) Alors $\prod_{n=0\ldots N} \left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right) \prod_{n=1\ldots N} \left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right) = \frac{\left(1-\frac{k^{2^N}}{q_N}\right)}{\left(1-\frac{k}{q_0}\right)}$ tend vers $\frac{1}{\left(1-\frac{k}{q_0}\right)}$ et $\left(1+\frac{k}{q_0}\right) \prod_{n=0\ldots N} \left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right) \prod_{n=1\ldots N} \left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right)$ tendra vers $\frac{\left(1+\frac{k}{q_0}\right)}{\left(1-\frac{k}{q_0}\right)} = \frac{q_0+k}{q_0-k}$, d'où le résultat. □

Comme tout rationnel peut s'écrire $\frac{q_0+k}{q_0-k}$ dès que ses numérateur et dénominateur sont de même parité donc le résultat s'applique à tout rationnel et il est effectif puisque les facteurs de ce produit sont définis par q_0 et k .

Remarque 12. Si on pose V_n=1 / U_n alors $\sqrt{\frac{q_0+k}{q_0-k}} - \prod_{n=0\dots N}\left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right) = \sqrt{\frac{q_0+k}{q_0-k}}(1 - \sqrt{1-\frac{k^{2^{N+1}}}{q_N^2}} = \frac{V_N^2}{1+\sqrt{1-V_N^2}}\sqrt{\frac{q_0+k}{q_0-k}}$ et, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \frac{V_n^2}{2-V_n^2}$, ce qui entraîne $V_{n+1} \sim \frac{V_n^2}{2}$; on peut en déduire que la convergence du produit $\prod_{n=0\dots N}\left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right)$ vers $\prod_{n\in N}\left(1+\frac{k^{2^n}}{q_n}\right)$ est quadratique.

Bibliographie:

[1]: Emile Ramis, Claude Deschamps, Jacques Odoux, Analyse, Exercices avec solutions, 1, Masson, 1984.

[2]: Daniel Duverney, Number Theory: An Elementary Introduction Through Diophantine Problems, World Scientific, coll. Monographs in Number Theory (no 4), 2010.