A la recherche du chaos

L'objet de ce travail est l'étude parallèle de trois familles de suites, inspirées de la rotation sur le tore, au moyen des fonctions $f\colon x \longmapsto \cos(\mathrm{tArccos}(x))$, $f\colon x \longmapsto \sin(\mathrm{tArcsin}(x))$, $f\colon x \longmapsto \tan(\mathrm{tArctan}(x))$, où $t \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

Dans ces trois cas nous allons étudier les points fixes, limites éventuelles des suites, et leur caractère, attractif ou répulsif, puis les orbites périodiques, avec leur caractère; nous présenterons un codage « t-adique », qui permettra d'étudier les propriétés caractéristiques du chaos (« à la Devaney »): densité de l'ensemble des points périodiques, transitivité topologique, sensibilité aux conditions initiales, existence d'une orbite dense.

Dans le troisième cas nous étudierons aussi l'ensemble des orbites finies, c'est à dire celles pour lesquelles il existe n_0 tel que U_{n_0+1} n'est pas défini.

1 I. La suite de cosinus

Soit un entier $t \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la fonction $f\colon x \longmapsto \cos(\mathrm{tArccos}(x))$ et les suites récurrentes (U_n) définies par $\left\{\begin{array}{l} U_0 \in \{0,1\}\\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{array}\right.$.

1.1 1. Etude des points fixes de f.

Soit L un point fixe de f alors $L = \cos(\mathrm{tArccos}(L))$ où $L \in$ [-1,+1], et si on pose $\theta = \mathrm{Arccos}(L)$, ceci équivaut à $t\theta \equiv \pm\theta[2\pi]$, c'est à dire à $\left\{\begin{array}{l} \theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t\text{-}1}\right]\\ \theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t+1}\right] \end{array}\right.$ d'où les points fixes constituent l'ensemble $\Lambda = \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{t\text{-}1}\right), k = 0 \ldots \left[\frac{t\text{-}1}{2}\right]\right\} \cup \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{t+1}\right), k = 0 \ldots \left[\frac{t+1}{2}\right]\right\}$; on remarquera que $+1$ est fixe quel que soit l'entier t, tandis que -1 ne l'est que lorsque t est impair, auquel cas -1 est à la fois dans ces deux familles

Pour établir la nature de ces points fixes nous allons calculer la dérivée de f en ces points.

D'une part $\forall x \in]1,+1[$, $f'(x) = \frac{\text{-tsin(tArccos(x))}}{\text{-}\sqrt{\text{1-x}^2}} = \frac{\text{tsin(tArccos(x))}}{\text{sin(Arccos(x))}}$, or, si L$\in$]1,+1[est un point fixe de f, Arccos(L)$=\pm$tArccos$(L)[2\pi]$ et par suite, $\left|f'(L)\right| = \left|\frac{\text{tsin(Arccos(L))}}{\text{sin(Arccos(L))}}\right|$=t.

D'autre part comme f(x) s'exprime comme un polynôme (de Tchebycheff) f est de classe $\mathcal{C}^1([1,+1])$ et donc $f'(1)$ et $f'(\text{-}1)$ sont les limites de $f'(x)$ en 1 et en -1.

$\forall x \in]1,+1[$, $f'(x) = \frac{\text{-tsin(tArccos(x))}}{\text{-}\sqrt{\text{1-x}^2}} = \frac{\text{tsin(tArccos(x))}}{\text{sin(Arccos(x))}}$, pour étudier sa limite en 1^- posons $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$, x tend vers 1^- si et seulement si $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$ tend vers 0, d'où $\frac{\text{tsin(tArccos(x))}}{\text{sin(Arccos(x))}} = \frac{\text{tsin}(t\theta))}{\sin(\theta)} \sim \frac{t^2\theta}{\theta}$ qui tend vers t^2, d'où $f'(1) = t^2$.

Pour $f'(\text{-}1)$ (dans le cas où t est impair): x tend vers $(-1)^+$ si et seulement si $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$ tend vers π et $\frac{\text{tsin(tArccos(x))}}{\text{sin(Arccos(x))}} = \frac{\text{tsin}(t\theta))}{\sin(\theta)} = \frac{(\text{-}1)^{t\text{-}1}\text{tsin}(t\pi\text{-t}\theta))}{\sin(\pi\text{-}\theta)} \sim \frac{(\text{-}1)^{t\text{-}1}\text{t}(t\pi\text{-t}\theta))}{(\pi\text{-}\theta)} \sim \frac{(\text{-}1)^{t\text{-}1}t^2\theta}{\theta}$ qui tend vers t^2, d'où $f'(\text{-}1) = t^2$.

D'où le

Théorème 1. *La suite (U_n) définie par $\left\{\begin{array}{l} U_0 \in \{0,1\}\\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{array}\right.$ ne peut converger que si elle est ultimement constante (nous dirons stationnaire) et sa limite, si elle existe, appartient à $\Lambda = \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{t\text{-}1}\right), k = 0 \ldots \left[\frac{t-1}{2}\right]\right\} \cup \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{t+1}\right), k = 0 \ldots \left[\frac{t+1}{2}\right]\right\}$.*

Démonstration: le calcul de la dérivée entraîne que les points fixes sont répulsifs.

Remarque 2. Soit $U_0=\cos(\theta)$ la suite associée sera ultimement convergente si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $t^{n+1}\theta \equiv \pm t^n\theta[2\pi]$, ce qui équivaut à $\theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^n(t-1)}\right]$ ou $\theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^n(t+1)}\right]$; l'ensemble de ces points, que nous désignerons par Δ, contient bien entendu l'ensemble des points fixes Λ.

2 2. Etude des suites ultimement périodiques et des orbites

Pour simplifier nous dirons que la suite (U_n) est p-périodique lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+p} = U_n$ sans distinguer si p est la plus petite période et nous dirons que la suite (U_n) est ultimement p-périodique lorsque $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, U_{n+p} = U_n$.

2.1 a. Les suites périodiques

Soit un entier p>1, une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (U_n) soit p-périodique est $U_p = U_0$, c'est à dire, avec les notations adoptées plus haut, lorsque $\cos(t^p\theta_0) = \cos(\theta_0)$, ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l} t^p\theta_0 \equiv \theta_0[2\pi] \\ \text{ou} \\ t^p\theta_0 \equiv -\theta_0[2\pi] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \theta_0 \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^p\text{-}1}\right] \\ \text{ou} \\ \theta_0 \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^p+1}\right] \end{array}\right.$; de même la suite (U_n) est ultimement p-périodique si et seulement si il existe n_0 tel que $\left\{\begin{array}{l} \theta_0 \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^{n_0}(t^p\text{-}1)}\right] \\ \text{ou} \\ \theta_0 \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^{n_0}(t^p+1)}\right] \end{array}\right.$.

2.2 b. Les orbites périodiques

Lemme 3. *Soit* $u \in \mathbb{R}, (\text{Arccos}(\cos(u))) \equiv \pm u[2\pi]$

Pour étudier la nature de ces orbites nous allons considérer les itérations de f, nous noterons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application f k fois itérée $f \circ f \circ ... \circ f = f^k$.

Remarquons d'abord que f(1)=1 et f(-1)=±1, donc aucun de ces points ne peut appartenir à une p-orbite (pour p>1); par ailleurs nous avons vu plus haut que $\forall x \in \,]1,+1[$, $f'(x) = \frac{\text{tsin(tArccos(x))}}{\sin(\text{Arccos(x)})}$, par suite $\forall x \in \,]1,+1[, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f^{k\prime}(x)| = |f'(x)||f'(f(x))|....|f'(f^{k\text{-}1}(x))| = t^k \prod_{i=0}^{k\text{-}1} \left|\frac{\sin(\text{t}^{i+1}\text{Arccos(x)})}{\sin(\text{t}^i\text{Arccos(x)})}\right| = t^k \left|\frac{\sin(\text{tkArccos(x)})}{\sin(\text{Arccos(x)})}\right|$.

Lorsque $\theta_0 \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^p\text{-}1}\right]$, si on pose $x=\cos(\frac{2m\pi}{t^p\text{-}1})$ alors $|f^{p\prime}(x)| = t^p\left|\frac{\sin(\text{t}^p\text{Arccos(x)})}{\sin(\text{Arccos(x)})}\right| = t^p > 1$ et lorsque $\theta_0 \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^p+1}\right]$, si on pose $x=\cos(\frac{2m\pi}{t^p+1})$ alors $|f^{p\prime}(x)| = t^p\left|\frac{\sin(\text{t}^p\text{Arccos(x)})}{\sin(\text{Arccos(x)})}\right| = t^p > 1$; donc les orbites périodiques sont, elles-aussi, répulsives.

2.3 c. Un codage adapté à cette famille de suites récurrentes

Nous avons déterminé Λ l'ensemble des limites des suites convergentes et Γ la réunion des orbites des suites périodiques; le caractère répulsif de ces deux ensembles entraîne qu'une suite (U_n) ne peut-être ultimement convergente ou ultimement périodique que s'il existe un rang n_0 tel que $U_{n0} \in \Lambda \cup \Gamma$.

Comme le cosinus est un homéomorphisme de $[0, \pi]$ sur [-1,+1] au lieu de considérer les valeurs prises par la suite (U_n) nous étudierons la suite $\alpha_n = \frac{\mathrm{Arccos}(U_n)}{\pi}$ à valeurs dans [0,+1], qui est régie par la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} \in [0,+1]$,cos$\left(\pi\alpha_{n+1}\right)$=cos$(t\pi\alpha_n)$.

Posant $\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{t^k}$ où pour tout k $d_k \in \{0, ..., t\text{-}1\}$, alors $t\alpha_n = d_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{t^{k-1}}$, $t\pi\alpha_n = \pi d_1 + \pi \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{t^{k-1}}$; donc, si d_1 est pair $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{t^{k-1}}$, et si d_1 est impair $\alpha_{n+1} = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{t^{k-1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d'_k}{t^{k-1}}$, où pour tout $k \in \left[\!\left[2, +\infty \right[\!\right[, d'_k = \left(t-1\right) - d_k$.

Nous définirons donc l'application χ_t: $[0,\ 1] \longrightarrow [0,\ 1]$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{t^k} \longmapsto \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d'_k}{t^k}$, où $\begin{cases} d_1 \text{ pair} \Longrightarrow \forall k \in [\![2, +\infty[\![, d'_k = d_k \\ d_1 \text{ impair} \Longrightarrow \forall k \in [\![2, +\infty[\![, d'_k = (t\text{-}1)\text{-}d_k \end{cases}$.

(nous conviendrons d'autoriser les développements « impropres », c'est à dire tels qu'il existe n_0, $\forall n > n_0, d_n = t-1$; ceci n'entraînera pas d'ambiguité car on peut vérifier que $\chi_t\left(\sum_{k=1}^{n_1\text{-}1} \frac{d_k}{t^k} + \frac{1}{t^{n_1}}\right) = \chi_t\left(\sum_{k=1}^{n_1\text{-}1} \frac{d_k}{t^k} + \sum_{k=_{n_1+1}}^{\infty} \frac{t\text{-}1}{t^k}\right)$).

On remarquera que χ_t est bien continue et que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
{[-1,+1]} \arrow[r, "\cos(\mathrm{tArccos})"] \arrow[d, "\frac{1}{\pi}\mathrm{Arccos}"'] & {[-1,+1]} \arrow[d, "\frac{1}{\pi}\mathrm{Arccos}"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "\chi_t"'] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Les deux systèmes dynamiques, celui engendré par f:x$\longmapsto$cos(tArcos(x)) et celui engendré par χ_t, sont topologiquement conjugués; et comme χ_t est une fonction continue et affine par morceaux, de pente $\pm$t on retrouve facilement le caractère répulsif des points fixes et des orbites périodiques.

Les points fixes de χ_t sont de la forme $\frac{2k}{t\text{-}1} = \frac{2k}{t}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2k}{t^i}$, pour $k = 0 ... \left[\frac{t\text{-}1}{2}\right]$ et de la forme $\frac{2k}{t+1} = \frac{2k}{t}\left(\frac{1}{1+1/\mathrm{t}}\right) = \frac{2k}{t}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\text{-}1)^i}{t^i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2k(t\text{-}1)}{t^{2i}}$; et comme le cas « t impair et k=$\left[\frac{t-1}{2}\right]$ a été exclu) on pourra décomposer $2k(t\text{-}1) = t - 2k + (2k-1)t$, d'où on écrira $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{2k-1}{t^{2i-1}} + \frac{t-2k}{t^{2i}}\right)$, $k = 0 ... \left[\frac{t+1}{2}\right]$.

$\Big\{$Les points à orbite p-périodique sont soit de la forme $\frac{2k}{t^p\text{-}1} = \frac{2k}{t^p}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t^{\mathrm{ip}}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2k}{t^{\mathrm{ip}}}$;là aussi on décomposera $2k = \sum_{j=1}^{p} a_j t^{p-j}$, ce qui permettra d'écrire $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{t^{j+\mathrm{ip}}}\right)$, pour $k = 0 ... \left[\frac{t^p\text{-}1}{2}\right]$;

soit de la forme $\frac{2k}{t^p+1} = \frac{2k}{t^p}\left(\frac{1}{1+1/\mathrm{t}^p}\right) = \frac{2k}{t^p}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\text{-}1)^i}{t^{\mathrm{ip}}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2k(t^p\text{-}1)}{t^{2\mathrm{ip}}}$; si on pose $2k(t^p\text{-}1) = \sum_{j=1}^{2p} a_j t^{2p-j}$ alors on obtient $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{2p} \frac{a_j}{t^{j+2\mathrm{ip}}}\right)$, $k = 0 ... \left[\frac{t^p+1}{2}\right]\Big\}$.

La densité de l'ensemble des points périodiques est immédiate à partir de la forme $\frac{2k}{t^p\text{-}1}$ et $\frac{2k}{t^p+1}$.

2.4 d. La question du chaos

On rappellera que dans le cas d'une fonction continue d'un intervalle vers lui-même l'existence d'une orbite dense est suffisante pour établir le chaos [1],[2].

Lemme 4. *Quel que soit l'entier p, le réel* $y=\sum_{k=1}^{p}\frac{e_k}{t^k}$*, l'entier naturel p et le réel* $x_0=\sum_{k=1}^{p}\frac{d_k}{t^k}$*, il existe un réel* $x=x_0+\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k}$ *tel que* $f^p(x)-\sum_{k=1}^{p}\frac{e_k}{t^k}\in\left[0,\frac{1}{t^p}\right]$.

Pour rendre la question plus concrète considérons l'ensemble E_{2p} des liste $[a_1, ..., a_{2p}]$ à valeurs dans $[\![0, ..., t-1]\!]$ et les permutations de E_{2p} $\varphi_{t,1}$,..,$\varphi_{t,p}$, définies comme suit $\forall i\in[\![1, ..., p]\!]$, $\varphi_{t,i}([x_1, ..., x_{2p}])=[x'_1, ..., x'_{2p}]$, où $\left\{\begin{array}{l}\forall k\in\mathbb{N}*\cap[1,...,i], x'_k=x_k\\ x_i\equiv 0[2]\Longrightarrow\forall k\in\mathbb{N}*\cap[i+1,...,2p], x'_k=x_k\\ x_i\equiv 1[2]\Longrightarrow\forall k\in\mathbb{N}*\cap[i+1,...,2p], x'_k=t\text{-}1\text{-}x_k\end{array}\right.$; soit $[d'_1, ..., d'_{2p}]=\varphi_{t,1}$,..,$\varphi_{t,p}([d_1, ..., d_p, 0, ..., 0]$ il suffit de déterminer $d_{p+1}, ..., d_{2p}$ de la manière suivante $[d_1,...,d_{2p}]=\left(\varphi_{t,1}{}^{-1}\circ..\circ\varphi_{t,p}{}^{\text{-}1}\right)[d'_1,...,d'_p,e_1,...,e_p]$; alors $f^p(x)=\sum_{k=1}^{p}\frac{e_k}{t^k}+\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{?_k}{t^k}$ et par suite $0\leqslant f^p(x)-\sum_{k=1}^{p}\frac{e_k}{t^k}\leqslant\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{t\text{-}1}{t^k}=\frac{(t\text{-}1)}{t^{p+1}}\frac{1}{1\text{-}1/\mathrm{t}}=\frac{1}{t^p}$.

Ceci permet d'établir à la fois la transitivité topologique et l'existence d'une orbite dense.

3 II. La suite de sinus

Soit un entier $t\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, la fonction f: $x\longmapsto\sin(\mathrm{tArcsin}(x))$ et les suites récurrentes (U_n) définies par $\left\{\begin{array}{l}U_0\in\{0,1\}\\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1}=f(U_n)\end{array}\right.$.

3.1 1. Etude des points fixes de f.

Soit L un point fixe de f alors $L=\sin(\mathrm{tArcsin}(L))$ où $L\in[\text{-}1,+1]$, et si on pose $\theta=\mathrm{Arcsin}(L)$, ceci équivaut à $\left\{\begin{array}{l}t\theta\equiv\theta[2\pi]\\ \text{ou}\\ t\theta\equiv\pi\text{-}\theta[2\pi]\end{array}\right.$, c'est à dire à $\left\{\begin{array}{l}\theta\equiv 0\left[\frac{2\pi}{t\text{-}1}\right]\\ \theta\equiv\frac{\pi}{t+1}\left[\frac{2\pi}{t+1}\right]\end{array}\right.$ d'où les points fixes constituent l'ensemble $\Lambda=\left\{\sin\left(\frac{2k\pi}{t\text{-}1}\right), k=\text{-}\left[\frac{t\text{-}1}{4}\right],...,\left[\frac{t\text{-}1}{4}\right]\right\}\cup\left\{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{t+1}\right), k=\text{-}\left[\frac{t\text{-}1}{4}\right],...,\left[\frac{t\text{-}1}{4}\right]\right\}$; on remarquera que +1 et -1 sont fixes si et seulement si $t\equiv 1[4]$ (ici f, composée de deux fonctions impaires est impaire), tandis que 0 est fixe, quel que soit t.

Pour établir la nature de ces points fixes nous allons calculer la dérivée de f en ces points.

D'une part $\forall x\in]1,+1[$, $f'(x)=\frac{\mathrm{tcos(tArcsin(x))}}{\sqrt{1\text{-x}^2}}=\frac{\mathrm{tcos(tArcsin(x))}}{\mathrm{cos(Arcsin(x))}}$, or, si L∈]1,+1[est un point fixe de f, Arcsin(L)≡tArcsin$(L)[2\pi]$ ou ≡tArcsin$(L)[2\pi]$ et par suite, $\left|f'(L)\right|=\left|\frac{\mathrm{tcos(Arcsin(L))}}{\mathrm{cos(Arcsin(L))}}\right|$=t.

D'autre part comme f(x) s'exprime comme un polynôme (de Tchebycheff) f est de classe $\mathcal{C}^1([1,+1])$ et donc $f'(1)$ et $f'(\text{-}1)$ sont les limites de $f'(x)$ en 1 et en -1 (seulement lorsque $t\equiv 1[4]$, et nous poseraons t=1+4u).

$\forall x \in]1,+1[$, $f'(x)=\frac{\mathrm{tcos(tArcsin(x))}}{\sqrt{\mathrm{1\text{-}x^2}}} = \frac{\mathrm{tcos(tArcsin(x))}}{\mathrm{cos(Arcsin(x))}}$, pour étudier sa limite en 1^- posons $\theta = \mathrm{Arccsin}(x)$, x tend vers 1^- si et seulement si $\theta = \mathrm{Arcsin}(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, d'où $\frac{t\cos((1+4u)\theta))}{\cos(\theta)} = \frac{\mathrm{tsin}((1+4\mathrm{u})(\frac{\pi}{2}-\theta))}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)} \sim_{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$ qui tend vers t^2, d'où $f'(1)=\mathrm{t}^2$.

f est impaire est paire, donc f' est paire, d'où, si $t\equiv 1[4]$, $f'(\text{-}1)=\mathrm{t}^2$.

D'où le

Théorème 5. *La suite (U_n) définie par* $\begin{cases} U_0 \in \{0,1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ *ne peut converger que si elle est ultimement constante (nous dirons stationnaire) et sa limite, si elle existe, appartient à* $\Lambda = \left\{\sin\left(\frac{2k\pi}{t\text{-}1}\right), k = \text{-}\left[\frac{t\text{-}1}{4}\right], ..., \left[\frac{t\text{-}1}{4}\right]\right\} \cup \left\{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{t+1}\right), k = \text{-}\left[\frac{t\text{-}1}{4}\right], ..., \left[\frac{t\text{-}1}{4}\right]\right\}$.

Démonstration: le calcul de la dérivée entraîne que les points fixes sont répulsifs.

Remarque 6. Soit $\mathrm{U}_0=\sin(\theta)$ la suite associée sera ultimement convergente si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $t^{n+1}\theta \equiv t^n\theta[2\pi]$, ce qui équivaut à $\theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^n(t-1)}\right]$ou $t^{n+1}\theta \equiv \pi - t^n\theta[2\pi]$, ce qui équivaut à $\theta \equiv \frac{\pi}{t^n(t+1)}\left[\frac{2\pi}{t^n(t+1)}\right]$; l'ensemble de ces points, que nous désignerons par Δ, contient bien entendu l'ensemble des points fixes Λ.

4 2. Etude des suites ultimement périodiques et des orbites

Pour simplifier nous dirons que la suite (U_n) est p-périodique lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+p} = U_n$ sans distinguer si p est la plus petite période et nous dirons que la suite (U_n) est ultimement p-périodique lorsque $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, U_{n+p} = U_n$.

4.1 a. Les suites périodiques

Soit un entier p>1, une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (U_n) soit p-périodique est $U_p = U_0$, c'est à dire, avec les notations adoptées plus haut, lorsque $\sin(t^p\theta_0) = \sin(\theta_0)$, ce qui équivaut à $\begin{cases} t^p\theta_0 \equiv \theta_0[2\pi] \\ \text{ou} \\ t^p\theta_0 \equiv \pi - \theta_0[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \theta_0 \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^p\text{-}1}\right] \\ \text{ou} \\ \theta_0 \equiv \frac{\pi}{t^p+1}\left[\frac{2\pi}{t^p+1}\right] \end{cases}$; de même la suite (U_n) est ultimement p-périodique si et seulement si il existe n_0 tel que $\begin{cases} \theta_0 \equiv 0\left[\frac{2\pi}{t^{n_0}(t^{p+}\text{-}1)}\right] \\ \text{ou} \\ \theta_0 \equiv \frac{\pi}{t^{n_0}(t^p+1)}\left[\frac{2\pi}{t^{n_0}(t^p+1)}\right] \end{cases}$.

4.2 b. Les orbites périodiques

Lemme 7. *Soit* $u \in \mathbb{R}, (\mathrm{Arcsin}(\sin(u))) \equiv u[2\pi]$ *ou* $\pi - u[2\pi]$

Pour étudier la nature des orbites nous allons considérer les itérations de f, nous noterons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application f k fois itérée $f \circ f \circ ... \circ f = f^k$.

Remarquons d'abord que f(1)=1 et f(-1)=±1, donc aucun de ces points ne peut appartenir à une p-orbite (pour p>1); par ailleurs nous avons vu plus haut que $\forall x \in]1,+1[$, $f'(x)=\frac{\mathrm{tcos(tArcsin(x))}}{\mathrm{cos(Arcsin(x))}}$, par suite $\forall x \in]1,+1[, \forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f^{k\prime}(x)|=|f'(x)||f'(f(x))|....|f'(f^{k\text{-}1}(x))| = t^k\prod_{i=0}^{k\text{-}1}\left|\frac{\cos(\mathrm{t}^{i+1}\mathrm{Arcsin(x)})}{\cos(\mathrm{t}^i\mathrm{Arcsin(x)})}\right| = t^k\left|\frac{\cos(\mathrm{t}^k\mathrm{Arcsin(x)})}{\mathrm{cos(Arcsin(x))}}\right|$.

Lorsque $\theta_0 \equiv 0[\frac{2\pi}{t^p\text{-}1}]$, si on pose x=cos($\frac{2m\pi}{t^p\text{-}1}$) alors $|f^{p\prime}(x)|$=$t^p\left|\frac{\cos(\mathrm{t}^p\mathrm{Arcsin(x)})}{\cos(\mathrm{Arcsin(x)})}\right| = t^p > 1$; donc les orbites périodiques sont elles-aussi répulsives.*2ème cas !!!!!!!!

4.3 c. Un codage adapté à cette famille de suites récurrentes

Un développement en base t adapté à l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$

i. Dans le cas où t=2u, le réel $\frac{1}{2}$ s'écrit $\frac{u}{t}$ et donc tout x de $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ s'écrira x=$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k}$, où $d_1 \in [\![-u, u-1]\!]$ et $\forall k \geqslant 2, d_k \in [\![0, 2u-1]\!]$.

ii. Dans le cas où t=2u+1, le réel $\frac{1}{2}$ s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u}{t^k}$ et donc tout x de $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ s'écrira x=$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k}$, où $\forall k \geqslant 1, d_k \in [\![-u, u]\!]$.

Comme le sinus est un homéomorphisme de $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur [-1,+1] au lieu de considérer les valeurs prises par la suite (U_n) nous étudierons la suite $\alpha_n = \frac{\mathrm{Arcsin}(U_n)}{\pi}$ à valeurs dans $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, qui est régie par la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,sin$\left(\pi\alpha_{n+1}\right)$=sin$(t\pi\alpha_n)$.

Posant $\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k}$, alors $t\alpha_n = d_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$, $t\pi\alpha_n = \pi d_1 + \pi\sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$; donc

1er cas: t=2u est pair

i) si d_1 est pair, et $d_2 \in [\![0, u-1]\!]$ comme $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2}$ alors $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$.

ii) si d_1 est pair, et $d_2 \in [\![u, 2u-1]\!]$ comme $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}} > \frac{1}{2}$ alors $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d'_k}{t^{k-1}}$, où $\forall k \geqslant 2$, $d'_k = 2u-1-d_k$ (on remarquera que $d'_2 \in [\![-u, u-1]\!]$)

iii) si d_1 est impair, et $d_2 \in [\![u, 2u-1]\!]$ comme $\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1$ alors $\alpha_{n+1} = -1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$ on posera $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d'_k}{t^{k-1}}$, où $d'2 = d2 - 2u, \forall k \geqslant 3, d'_k = d_k$ (on remarquera que $d'_2 \in [\![-u, u-1]\!]$)

iv) iii) si d_1 est impair, et $d_2 \in [\![0, u-1]\!]$ comme $0 \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2}$ alors $\alpha_{n+1} = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$ on

posera $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d'_k}{t^{k-1}}$, où $d'2 = -d2 - 1$, $\forall k \geqslant 3$, $d'_k = 2u - 1 - d_k$ (on remarquera que $d'_2 \in [\![-u, u-1]\!]$)

2ème cas: t=2u+1 est impair

i) si d_1 est pair comme $\frac{-1}{2} \leqslant \frac{-1}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2}$ alors $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$.

ii) si d_1 est impair et comme $\frac{-1}{2} \leqslant \frac{-1}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2}$ alors $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d'_k}{t^{k-1}}$, où $\forall k \geqslant 2$, $d'_k = -d_k$ (on remarquera que $\forall k \geqslant 2, d'_k \in [\![-u, u]\!]$).

Nous définirons donc l'application ρ_t: $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k} \longmapsto \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d'_k}{t^{k-1}}$, où

vérifier ce qui précède:

$t = 2u$	$d_1$impair	$d_1$impair	$d_1$pair
$d_1 \in [\![-u, u-1]\!], \forall k \geqslant 2, d_k \in [\![0, 2u-1]\!]$	$d_2 \in [\![0, u-1]\!]$	$d_2 \in [\![u, 2u-1]\!]$	$d2 \in [\![0,$
	$d'2 = -d2 - 1, \forall k \geqslant 3, d'_k = 2u - 1 - d_k$	$d'2 = d2 - 2u, \forall k \geqslant 3, d'_k = d_k$	$\forall k \geqslant 2,$

$t = 2u+1$	$d_1$pair	$d_1$impair
$\forall k \geqslant 1, d_k \in [\![-u, u]\!]$		
	$\forall k \geqslant 2, d'_k = d_k$	$\forall k \geqslant 2, d'_k = -d_k$

(nous conviendrons d'autoriser les développements « impropres », c'est à dire tels qu'il existe n_0, $\forall n > n_0, d_n = t - 1$; ceci n'entraînera pas d'ambiguité car on peut vérifier que

On remarquera que ρ_t est bien continue et que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
{[-1,+1]} \arrow[r, "\sin(\mathrm{tArcsin})"] \arrow[d, "\frac{1}{\pi}\mathrm{Arcsin}"'] & {[-1,+1]} \arrow[d, "\frac{1}{\pi}\mathrm{Arcsin}"] \\
{\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]} \arrow[r, "\rho_t"'] & {\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]}
\end{tikzcd}$$

Les deux systèmes dynamiques, celui engendré par f:x$\longmapsto$sin(tArcsin(x)) et celui engendré par ρ_t, sont topologiquement conjugués.

$\Big\{$Les points à orbite p-périodique sont soit de la forme $\frac{2k}{t^p\text{-}1} = \frac{2k}{t^p}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{t^{\mathrm{ip}}}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2k}{t^{\mathrm{ip}}}$;là aussi on décomposera $2k = \sum_{j=1}^{p} a_j t^{p-j}$, ce qui permettra d'écrire $\sum_{i=0}^{\infty}\big(\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{t^{j+\mathrm{ip}}}\big)$, pour $k = -\Big[\frac{t^p\text{-}1}{4}\Big], \ldots, \Big[\frac{t^p\text{-}1}{4}\Big]$; soit de la forme $\frac{2k+1}{t^p+1} = \frac{2k+1}{t^p}\Big(\frac{1}{1+1/\mathrm{t}^p}\Big) = \frac{2k+1}{t^p}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\text{-}1)^i}{t^{\mathrm{ip}}}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(t^p\text{-}1)}{t^{2\mathrm{ip}}}$; si on pose $(2k+1\Big)(t^p+1) = \sum_{j=1}^{2p} a_j t^{2p-j}$ alors on obtient $\sum_{i=0}^{\infty}\big(\sum_{j=1}^{2p} \frac{a_j}{t^{j+2\mathrm{ip}}}\big)$, $k = -\Big[\frac{t^p\text{-}1}{4}\Big], \ldots, \Big[\frac{t^p\text{-}1}{4}\Big]\ \Big\}$.

Comme dans le I la forme $\frac{2k}{t^p\text{-}1}$ ou $\frac{2k+1}{t^p+1}$ entraîne immédiatement la densité de l'ensemble des points périodiques.

4.4 d. La question du chaos

Comme dans le I on montrera la transitivité topologique et l'existence d'une orbite dense ce qui est suffisant dans le cas d'une fonction continue d'un intervalle vers lui-même [1],[2]; ceci se fera au moyen d'un analogue au lemme 4.

5 III. La suite de tangente

Soit un entier $t \in \mathbb{N} \Big\backslash \{0, 1\}$, la fonction $f\colon x \longmapsto \tan(\mathrm{tArctan}(x))$ et les suites récurrentes (U_n) définies par $\left\{\begin{array}{l} U_0 \in \{0, 1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{array}\right.$; remarquons avant tout que, si $x = \tan\Big(\frac{(2k+1)\pi}{2t}\Big)$, f(x) n'est pas défini, ce qui nous conduira à nous demander s'il existe des cas où la suite (U_n) est non bornée.

5.1 1. Etude des points fixes de f.

Soit L un point fixe de f alors $L = \tan(t\mathrm{Arctan}(L))$ où $L \in \mathbb{R}$, et si on pose $\theta = \mathrm{Arctan}(L)$, ceci équivaut à $t\theta \equiv \theta[\pi]$, c'est à dire à $\theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{t-1}\right]$d'où les points fixes constituent l'ensemble $\Lambda = \left\{\tan\left(\frac{k\pi}{t\text{-}1}\right), \frac{-(t-1)}{2} < k < \frac{t-1}{2}\right\}$; on remarquera que +1 et -1 sont fixes si et seulement si $t \equiv 1[4]$ (ici f, composée de deux fonctions impaires est impaire), tandis que 0 est fixe, quel que soit t.

Pour établir la nature de ces points fixes nous allons calculer la dérivée de f en ces points.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathrm{t}(1+\tan^2(\mathrm{tArctan(x)}))}{1+x^2}$, or, si L∈ℝ est un point fixe de f, Arctan(L)≡tArctan$(L)[\pi]$ et par suite, $f'(L) = \frac{t(1+\mathrm{L}^2)}{1+L^2} = \mathrm{t}$.

D'où le

Théorème 8. *La suite (U_n) définie par* $\begin{cases} U_0 \in \{0,1\} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ *ne peut converger que si elle est ultimement constante (nous dirons stationnaire) et sa limite, si elle existe, appartient à* $\Lambda = \left\{\tan\left(\frac{k\pi}{t\text{-}1}\right), \text{-}\frac{t\text{-}1}{2} < k < \frac{t\text{-}1}{2}\right\}$.

Démonstration: le calcul de la dérivée entraîne que les points fixes sont répulsifs.

Remarque 9. Soit $\mathrm{U}_0 = \tan(\theta)$ la suite associée sera ultimement convergente si et seulement si il existe un entier naturel n tel que $t^{n+1}\theta \equiv t^n\theta[\pi]$, ce qui équivaut à $\theta \equiv 0\left[\frac{\pi}{t^n(t-1)}\right]$; l'ensemble de ces points, que nous désignerons par Δ, contient bien entendu l'ensemble des points fixes Λ.

6 2. Etude des suites ultimement périodiques et des orbites

Pour simplifier nous dirons que la suite (U_n) est p-périodique lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+p} = U_n$ sans distinguer si p est la plus petite période et nous dirons que la suite (U_n) est ultimement p-périodique lorsque $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, U_{n+p} = U_n$.

6.1 a. Les suites périodiques

Soit un entier p>1, une condition nécessaire et suffisante pour que la suite (U_n) soit p-périodique est $U_p = U_0$, c'est à dire, avec les notations adoptées plus haut, lorsque $\tan(t^p\theta_0) = \tan(\theta_0)$, ce qui équivaut à $t^p\theta_0 \equiv \theta_0[\pi] \iff \theta_0 \equiv 0\left[\frac{\pi}{t^p\text{-}1}\right]$; de même la suite (U_n) est ultimement p-périodique si et seulement si il existe n_0 tel que $\theta_0 \equiv 0\left[\frac{\pi}{t^{n_0}(t^p\text{-}1)}\right]$.

7 b. les orbites périodiques

Lemme 10. *Soit* $u \in \mathbb{R}, (\mathrm{Arctan}(\tan(u))) \equiv u[\pi]$

Pour étudier la nature des orbites nous allons considérer les itérations de f, nous noterons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application f k fois itérée $f \circ f \circ \ldots \circ f = f^k$.

Remarquons d'abord que f(1)=1 et f(-1)=±1, donc aucun de ces points ne peut appartenir à une p-orbite (pour p>1); par ailleurs nous avons vu plus haut que $\forall x \in \mathbb{R} / \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $f'(x) = \frac{\mathrm{t}\{1+\tan^2(\mathrm{tArctan}(x))\}}{1+\mathrm{x}^2}$, par suite pour tout x pour lequel ceci est possible,$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f^{k\prime}(x)| = |f'(x)||f'(f(x))|....|f'(f^{k\text{-}1}(x))| = t^k \prod_{i=0}^{k\text{-}1} \frac{1+\tan^2(\mathrm{t}^{i+1}\mathrm{Arctan(x)})}{1+\tan^2(\mathrm{t}^i\mathrm{Arctan(x)})} = t^k \frac{1+\tan^2(\mathrm{t}^k\mathrm{Arctan(x)})}{1+x^2}$.

Lorsque $\theta_0 \equiv 0[\frac{2\pi}{t^p\text{-}1}]$, si on pose x=tan($\frac{2m\pi}{t^p\text{-}1}$) alors $|f^{p\prime}(x)|$=$t^p\frac{1+\tan^2(\frac{t^p 2m\pi}{t^p-1})}{1+\tan^2(\frac{2m\pi}{t^p-1})} = t^p\frac{1+\tan^2(\frac{2m\pi}{t^p-1})}{1+\tan^2(\frac{2m\pi}{t^p-1})} = t^p >$ 1; donc les orbites périodiques sont elles-aussi répulsives.

7.1 c. Les suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes

Soit U_0 la suite associée aura un nombre fini de termes si et seulement si il existe un rang n_0 tel que $\theta_{n_0} = \pm\frac{\pi}{2t}$.

7.2 d. Un codage adapté à cette famille de suites récurrentes

Nous avons déterminé Λ l'ensemble des limites des suites convergentes et Γ la réunion des orbites des suites périodiques; le caractère répulsif de ces deux ensembles entraîne qu'une suite (U_n) ne peut-être ultimement convergente ou ultimement périodique que s'il existe un rang n_0 tel que $U_{n0} \in \Lambda \cup \Gamma$.

Un développement en base t adapté à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$

a. Dans le cas où t=2u, le réel $\frac{1}{2}$ s'écrit $\frac{u}{t}$ et donc tout x de $\left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$ s'écrira x=$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k}$, où $d_1 \in [\![-u, u-1]\!]$ et $\forall k \geqslant 2, d_k \in [\![0, 2u-1]\!]$, sous la condition que si d_1= -u il existe k>1 tel que d_k >0 et si d_1= u-1 il existe k>1 tel que d_k<2u-1.

b. Dans le cas où t=2u+1, le réel $\frac{1}{2}$ s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u}{t^k}$ et donc tout x de $\left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$ s'écrira x=$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k}$, où $\forall k \geqslant 1, d_k \in [\![-u, u]\!]$, sous la condition qu'il existe $k \geqslant 1, d_k < u$ et il existe $k \geqslant 1, d_k > -u$.

Comme la tangente est un homéomorphisme de $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ au lieu de considérer les valeurs prises par la suite (U_n) nous étudierons la suite $\alpha_n = \frac{\mathrm{Arctan}(U_n)}{\pi}$ à valeurs dans $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, qui est régie par la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+1} \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\tan(\pi\alpha_{n+1}\Big)$=$\tan(t\pi\alpha_n)$ (sauf si $t\pi\alpha_n \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$).

Posant $\alpha_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k}$, alors $t\alpha_n = d_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$, $t\pi\alpha_n = \pi d_1 + \pi\sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$; donc

1er cas: t=2u est pair

i) si $d_2 \in [\![-u, u-1]\!]$ (sauf (*) si $d_2 = -u$ et $\forall k \geqslant 3, d_k = 0$, ou $d_2 = u-1$ et $\forall k \geqslant 3, d_k = t-1$, auxquels cas α_{n+1} n'est pas défini) alors $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$

ii) si $d_2 \in [\![u, 2u-1]\!]$ comme $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}} > \frac{1}{2}$ alors $\alpha_{n+1} = \frac{d_2 - t}{t} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$, (on remarquera que $d_2' \in [\![-u, u-1]\!]$)

2ème cas: t=2u+1 est impair

comme $\frac{-1}{2} \leqslant \frac{-1}{t} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2}$ alors $\alpha_{n+1} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k}{t^{k-1}}$.

Nous définirons donc l'application ψ_t: $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\Big\backslash \left\{\frac{2k \pm 1}{2t}\right\} \longrightarrow \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{t^k} \longmapsto \sum_{k=2}^{\infty}\frac{d_k'}{t^k}$, où

$t = 2u$		
$d_1 \in [\![-u, u-1]\!], \forall k \geqslant 2, d_k \in [\![0, 2u-1]\!], *$	$d_2 \in [\![0, u-1[\![$	$d_2 \in [\![u, 2u-1]\!]$
	$\forall k \geqslant 2, d_k' = d_k$	$d_2' = d_2 - 2u, \forall k \geqslant 2, d_k' = d_k$

$t = 2u+1$	
$\forall k \geqslant 1, d_k \in [\![-u, u]\!]$	
	$\forall k \geqslant 2, d_k' = d_k$

(nous conviendrons d'autoriser les développements « impropres », ce qui n'entraînera pas d'ambiguité).

On remarquera que ψ_t est bien continue et que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\tan(t\mathrm{Arctan})"] \arrow[d, "\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\frac{1}{\pi}\mathrm{Arctan}"] \\
\left]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right[\setminus \left\{\frac{2k\pm1}{2t}\right\} \arrow[r, "\psi_t"'] & \left]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right[
\end{tikzcd}$$

Les deux systèmes dynamiques, celui engendré par f:x$\longmapsto$tan(tArctan(x)) et celui engendré par φ_t, sont topologiquement conjugués;

$\Big\{$Les points à orbite p-périodique sont de la forme $\frac{k}{t^p\text{-}1} = \frac{k}{t^p}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{t^{\mathrm{ip}}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{k}{t^{\mathrm{ip}}}$;là aussi on décomposera $k=\sum_{j=1}^{p} a_j t^{p-j}$, ce qui permettra d'écrire $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{a_j}{t^{j+\mathrm{ip}}}\right)$, pour $-\left(\frac{t^p\text{-}1}{4}\right)<k<\left(\frac{t^p\text{-}1}{4}\right)\Big\}$.

A nouveau la forme de ces points asssure la densité de l'ensemble des points périodiques.

Codage des points à orbite finie:

i) dans le cas où t=2u l'écriture trouvée au-dessus et l'expression de ψ_t implique que les points à orbite finie sont ceux pour lesquels il existe n_0 tel que $d_{n_0}=u-1$ et $\forall k>n_0$ $d_k=2u-1$ ou il existe n_0 tel que $d_{n_0}=u$ et $\forall k>n_0$ $d_k=0$.

ii) dans le cas où t=2u+1 l'écriture trouvée au-dessus et l'expression de ψ_t implique que les points à orbite finie sont ceux pour lesquels il existe n_0 tel que $\forall k\geqslant n_0$ $d_k=-u$ ou il existe n_0 tel que $\forall k\geqslant n_0$ $d_k=u$.

Dans ces deux cas cet ensemble de points est dense dans $\left]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

7.3 e. La question du chaos

Ici la fonction f n'est plus une fonction continue d'un segment vers lui-même, il faudra donc étudier les trois composants de la définition du chaos par Devaney: densité de l'ensemble des points périodiques, transitivité topologique, dépendance sensible aux conditions initiales.

La densité de l'ensemble des points périodiques a été établie au dessus.

La transitivité topologique se démontre en établissant un énoncé analogue à celui du lemme 4.

La dépendance sensible aux conditions initiales se démontre de même en utilisant un énoncé analogue à celui du lemme 4.

8 IV. Conclusion

Parmi les trois systèmes dynamiques étudiés, deux sont bornés, un ne l'est pas, dans les deux premiers il s'agit d'homéomorphismes d'un segment, dans le dernier il s'agit d'une application définie sur un sous-ensemble de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et à valeurs dans ce même intervalle.

Dans les trois cas, les systèmes dynamiques présentent des exemples de chaos.

1. Vellekoop and Berglund « On intervals, transitivity = chaos » Amer. Math. Monthly 101 (1994) 353-5, and also Crannell « The role of transitivity in Devaney's definition of chaos », Amer. Math. Monthly 102 (1995) 788-793) et

2. On Devaney's definition of chaos Amer. Math. Monthly 99 (1992) 332-4

and also Glasner and Weiss, Sensitive dependence on initial conditions, Nonlinearity 6 (1993) 1067-1075)..