Fantaisies discrètes

par Patrick Teller

15 février 2021

Cette note a été suggérée par le calcul du nombre de multiplications nécessaire pour multiplier deux matrices triangulaires strictes : si on considère deux matrices triangulaires supérieures strictes (A,B)$\in\mathcal{M}_n(K)^2$ le nombre de multiplications (hors optimisation éventuelle) est égal à $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j) = \binom{n+1}{3}$, que l'on peut aussi noter $\sum_{j=0}^{n} j(n-j)$.

L'idée naïve consistait à rechercher des ensembles dont le cardinal n'est pas polynomial, comme, par exemple, l'ensemble des permutations qui est en n!.

La question restera posée: qu'est-ce qui permet le caractère polynomial ? qu'est-ce qui impose un cardinal « au-dessus de polynomial » ? que veut dire « au-dessus » ? Ce sera pour une autre fois.

1 La base de Z[X] qui convient au calcul discret

Définition 1. *Les polynômes de Newton*

On appellera polynômes de Newton les polynômes suivants $N_n(X)=\frac{X(X-1)\ldots\ldots(X-n+1)}{n!}$

(on pourra écrire par abus de langage $N_n(X)=\binom{X}{n}$*)*

Proposition 2.

Les polynômes de Newton constituent une base de Z[X]

$\forall a\in\mathbb{N}, \forall n\in Z, N_n(a)\in Z$

$\forall\ P(X)\in\mathbb{Q}[X], \forall a\in\mathbb{N}, P(a)\in\mathbb{Z}\Longrightarrow\exists(n_i)\in\mathbb{Z}^{\deg(P)+1}, P(X)=\sum n_i N_i(X)$

Définition 3. *Dérivation discrète*

On appellera dérivation discrète l'endomorphisme Δ *défini par* $(\Delta P)X=P(X+1)-P(X)$

Proposition 4. *Dérivation et Primitivation des polynômes de Newton*

$\forall n\in\mathbb{N}, \Delta N_{n+1}=N_n$ *et, ce qui sera utile pour nos calculs,* $\sum_{k=0}^{t} N_z(k) = N_{z+1}(t+1)$

Démonstration.

Le premier résultat se lit d'ordinaire $\binom{a+1}{b+1}=\binom{a}{b+1}+\binom{a}{b}$

Le second découle du premier. □

Théorème 5. *Intégration par parties discrète*

Soit (P,Q) un couple de polynômes de valuation non nulle, $\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(\Delta P)(k)Q(k)+\sum_{k=0}^{n} P(k)(\Delta Q)(k)=P(n)Q(n)$.

Théorème 6. *Produit de Convolution discret de polynômes de Newton*

Soit (a,b) des entiers strictement positifs,$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} N_a(n-k)N_b(k)=N_{a+b+1}(n+1)$

Démonstration.

Elle peut se faire en passant par les fonctions génératrices, elle peut aussi se faire en dénombrant les suites strictement croissantes à a+b+1 éléments de l'intervalle [1,n+1] classées suivant leur a+1 ième élément $\square$

On rappellera

Lemme 7. $\forall n\in\mathbb{N},\forall p\leqslant n,\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} n-k \\ p-k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n+1 \\ p \end{pmatrix}$ *vu + haut*

2 Le produit des partitions

D'où les définitions suivantes:

Définition 8. *Soit un couple d' entiers strictement positifs (n,z) on appellera z-partition de n toute liste [*x_1*,..*x_z*] d'entiers strictement positifs tels que* $\sum_{i=1}^{z} x_i=n$.

On désignera par $P_z(n)$ *l'ensemble des z-partitions de n et par* $\Omega_z(n)$ *la somme* $\sum_{[x_1,..x_z]\in P_z(n)}$ $x_1..x_z$.

Exemple 9.

Le cas le plus simple est z=1, alors $\Omega_1(n)=n$.

Pour z=2 et n⩾2, $P_2(n)=\{[1,n-1],[2,n-2],...,[n-1,1]\}$ et $\Omega_2(n)=\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)=\sum_{k=0}^{n}k(n-k)=n\sum_{k=0}^{n}k-\sum_{k=0}^{n}k^2=n\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{6}(3n-2n-1)=\frac{n(n+1)(n-1)}{6}=\begin{pmatrix} n+1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Théorème 10.

$\forall(z,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N},\Omega_z(n)=N_{2z-1}(n+z-1)$

Démonstration.

Le résultat se montrera par récurrence; il est vrai pour z=1.

Supposons le vrai pour z , alors $\forall n\in\mathbb{N}\ \Omega_z(n)=N_{2z-1}(n+z-1)$*, soit* $n>z,\Omega_{z+1}(n)=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\Omega_z(k)=\sum_{k=0}^{n}N_1(n-k)N_{2z-1}(k+z-1)=N_{2z+1}(n+z)$*; par ailleurs pour* $n\leqslant z\ \Omega_{z+1}(n)=0$*, donc*

$\forall n\in\mathbb{N}\ \Omega_{z+1}(n)=N_{2z+1}(n+z)$ $\square$

On remarquera que la relation de récurrence est $\forall z\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}\Omega_{z+1}(n)=\sum_{k=0}^{n}(n-k)\Omega_z(k)$*, un produit de convolution.*

3 La somme des produits des carrés des partitions

Définition 11.

On désignera par $P_z(n)$ *l'ensemble des z-partitions de n et par* $\Phi_z(n)$ *le produit des carrés* $\prod_{[x_1,..x_z]\in P_z(n)}x_1^2..x_z^2$.

Exemple 12.

Le cas le plus simple est z=1, alors $\Phi_1(n)=n^2$.

Pour z=2 et n⩾2, P$_2$(n)=$\{[1,n-1],[2,n-2],...,[n-1,1]\}$ et

à revoir

$\Phi_2(n)=\prod_{k=1}^{n-1}(k^2(n-k)^2)$; il s'agit d'un produit de convolution.

$=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2)=\frac{\text{(n-1)n(2n-1)}}{3}=2\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{n(n-1)(n+1)}{6}\right)=2\left(\begin{array}{c}n\\3\end{array}\right)+2\left(\begin{array}{c}n+1\\3\end{array}\right).$

Théorème 13.

Démonstration.

Pour appliquer le résultat sur les produits de convolution il est nécessaire d'écrire $\Phi_1(n)=n^2$ *comme combinaison linéaire de polynômes de Newton:* $n^2=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\left(\begin{array}{c}n\\2\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}n+1\\1\end{array}\right)=2N_2(n)+2N_2(n+1)$.

Par suite $\Phi_2(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\Phi_1(k)\Phi_1(k)=\sum_{k=0}^{n}\Phi_1(k)\Phi_1(k)=\sum_{k=0}^{n}(N_2(k)+N_2(k+1))(N_2(n-k)+N_2(n-k+1))=\sum_{k=0}^{n}(N_2(k)N_2(n-k)+N_2(k)N_2(n-k+1)+N_2(k+1)N_2(n-k)+N_2(k+1)N_2(n-k+1))=N_5(n+1)+2N_5(n+2)+N_5(n+3)$.

On en déduit facilement que $\forall z\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N},\Phi_z(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{array}{c}z\\k\end{array}\right)N_{3z-1}(n+k)$ □

On remarquera que la relation de récurrence est $\forall z\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N},\ \Phi_{z+1}(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\Phi_1(k)\Phi_z(n-k)$, encore un produit de convolution.

4 Un peu moins limpide: le cas de la somme des carrés des produits

Définition 14.

On désignera par $P_z(n)$ *l'ensemble des z-partitions de n et par* $\Gamma_z(n)$ *la somme des carrés* $\sum_{[x_1,..x_z]\in P_z(n)}x_1^2+..+x_z^2$.

.

Lemme 15.

Le nombre de z-partitions d'un entier p est égal à $\left(\begin{array}{c}p-1\\z-1\end{array}\right)$

Proposition 16. $\forall z\in\mathbb{N}^*,\Gamma_{z+1}(n+1)=\sum_{k=1}^{n+1-z}\left(k^2\left(\begin{array}{c}n-k\\z-1\end{array}\right)+\Gamma_z(n-k+1)\right)$

Théorème 17.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\Gamma_z(n)\in\mathbb{Z}[n]$

On comprendra en lisant les cas z=1,z=2,z=3 que l'expression explicite de $\Gamma_z(n)$ *semble compliquée et qu'il est sage d'en rester au résultat qualitatif.*

Démonstration.

A titre exploratoire voici les premiers calculs:

$\Gamma_1(n)=n^2=\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}$

$\Gamma_2(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}\Gamma_1(n-k+1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+\frac{n(n+1)(n-1)}{3}=2\binom{n+2}{3}+2\binom{n+1}{3}$; *d'où* $\Gamma_2(n)=2\binom{n+1}{3}+2\binom{n}{3}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma_3(n+1)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^2\binom{n-k}{1}+\Gamma_2(n-k+1)\right)=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n-k}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\Gamma_2(n-k+1)=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{k+1}{2}+\binom{k}{2}\right)\binom{n-k}{1}+2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-k+2}{3}+\binom{n-k+1}{3}\right)=\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{4}+2\left(\sum_{u=3}^{n+1}\binom{u}{3}+\sum_{u=2}^{n}\binom{u}{3}\right)=\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{4}+2\binom{n+2}{4}+2\binom{n+1}{4}=3\binom{n+2}{4}+3\binom{n+1}{4}$,

c'est à dire $\Gamma_3(n)=3\binom{n+1}{4}+3\binom{n}{4}$.

Supposons que $\Gamma_z(n)=z\binom{n+2}{z+1}+z\binom{n+1}{z+1}$

$\forall z\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma_{z+1}(n)=\sum_{k=1}^{n-z+1}\left(k^2\binom{n-k}{z-1}+\Gamma_z(n-k+1)\right)=\sum_{k=0}^{n-z+1}k^2\binom{n-k}{z-1}+\sum_{k=1}^{n-z+1}\Gamma_z(n-k+1)=\sum_{k=0}^{n-z+1}\binom{k+1}{2}\binom{n-k}{z-1}+\sum_{k=0}^{n-z+1}\binom{k}{2}\binom{n-k}{z-1}+\sum_{u=z}^{n}\Gamma_z(u)=\binom{n+2}{z+2}+\binom{n+1}{z+2}+\sum_{u=z}^{n}z\left(\binom{u+1}{z+1}+\binom{u}{z+1}\right)=\binom{n+2}{z+2}+\binom{n+1}{z+2}+z\left(\binom{n+2}{z+2}+\binom{n+1}{z+1}\right)=(z+1)\binom{n+2}{z+2}+(z+1)\binom{n+2}{z+2}$.

Ce qui établit par récurrence que pour tout entier z $\Gamma_z(n)=z\binom{n+1}{z+1}+z\binom{n}{z+1}=zN_{z+1}(n+1)+$ z$\mathrm{N}_{z+1}(n)$.

□

On remarquera que la relation de récurrence est

$\forall z\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N},\Gamma_{z+1}(n)=\sum_{k=1}^{n-z+1}k^2\binom{n-k}{z-1}+\sum_{k=1}^{n-z+1}\Gamma_z(n-k+1)\Big)$, c'est à dire un produit de convolution + une primitivation; deux opérations qui conservent la « polynomialité ».

Paris, le 15 février 2021

Au passage:

Si nous définissons les deux matrices infinies suivantes:

Soit M la matrice infinie dont les colonnes représentent dans la base canonique de $\mathbb{Z}[X]$ les polynomes $\Omega_1,\Omega_2,\ldots\ldots$; M possède un infinité de colonnes mais chacune ne contient que des zéros à partir d'un certain rang.

Soit P la matrice infinie ($\mathrm{p}_{i,j}$) définie comme suit $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}p_{i,j}=\max(i-j,0)$; P possède une infinité de lignes mais chacune ne contient que des zéros à partir d'un certain rang.

Les calculs précédents ont impliqué la formule suivante M=PM.

..

…

n,