Une résolution dynamique

PAR PATRICK TELLER

Soit une matrice triangulaire inférieure régulière T$\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et un vecteur colonne V; la procédure suivante permet de déterminer de manière dynamique l'expression de V comme combinaison linéaire des colonnes de T.

On désignera par T$_j$ (j=1,..,n) les colonnes de T et par T$_{\mathrm{ij}}$ (i=1,..,n; j=1,..,n) les éléments de la matrice, par D=$\prod_{i=1}^n T_{\mathrm{ii}}$ le déterminant de T; on notera V=$\begin{pmatrix} v_1 \\ .... \\ v_n \end{pmatrix}$ et $J_i = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ (le 1 se trouve dans la i-ème ligne)

Procédure:

C:$\left(\, I_{n+1} \, \right)$, W:$\left(\, T, V \, \right)$

Pour i de 1 à n

Calculer d$_i$=pgcd(T$_{\mathrm{ii}}$,w$_i$i) ;C:C.$\begin{pmatrix} I_n & -\frac{w_i}{d_i} J_i \\ 0 & \frac{T_{\mathrm{ii}}}{d_i} \end{pmatrix}$;W:W.C.

fin

A la fin W=$\left(\, T, 0 \, \right)$ et C=$\begin{pmatrix} I_n & -\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{d_i} J_i \\ 0 & \prod_{i=1}^n \frac{T_{\mathrm{ii}}}{d_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{d_i} J_i \\ 0 & \frac{D}{\prod_{i=1}^n d_i} \end{pmatrix}$ donc $\frac{D}{\prod_{i=1}^n d_i}$V=$\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{d_i}$ T$_i$

Démonstration:

(par récurrence sur i)

Pour i=1 la première coordonnée de W-$\left(\frac{w_1}{T_{\mathrm{ii}}}\right)T_1$ est nulle; pour ne conserver que des coefficients entiers on écrira W:$\frac{T_{11}}{d_1}$W-$\left(\frac{w_1}{d_1}\right)T_1$

Supposons que W a ses i-1 premières coordonnées nulles, alors dans le calcul de $\frac{T_{\mathrm{ii}}}{d_i}$W-$\left(\frac{w_i}{d_i}\right)T_i$, comme T est triangulaire inférieure, les i-1 premières coordonnées restent nulles et la ième le devient.

D'où W=(T,0) et $\frac{D}{\prod_{i=1}^n d_i}$V-$\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{d_i}$ T$_i$=0 donc $\frac{D}{\prod_{i=1}^n d_i}$V=$\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{d_i}$ T$_i$.

cqfd.

A partir de là on peut construire une famille génératrice du noyau de la matrice $\left(\, T, V \, \right)$ ou de manière plus générale d'une matrice (T,V$_1$, ...,V$_p$).

Bien sûr c'est aussi un moyen d'inverser T en appliquant cette procédure l'un après l'autre aux vecteurs de la base canonique.

Paris le 26/11/2016