La dimension d'une algèbre commutative engendrée par trois matrices n'a pas le majorant espéré

Patrick Teller

21 avril 2025

On sait depuis longtemps [1],[2] que dans le cas de deux matrices commutantes A et B de taille n, la dimension de $C[A, B]$ est inférieure ou égale à n ; de nombreuses démonstrations en ont été fournies, s'appuyant soit sur la Géométrie Algébrique [1],[2], soit sur des techniques d'Algèbre linéaire, soit sur la Théorie des Modules. On sait que le résultat n'est pas vrai dans le cas de l'algèbre engendrée par des matrices commutantes en nombre supérieur ou égal à quatre et des résultats ont été développés dans [8]. On trouvera dans [7] un panorama assez riche sur les divers aspects du problème.
Le cas de trois matrices est resté ouvert, cependant on savait qu'il était décidable [6]. Personnellement j'ai longtemps essayé, sans succès, de prouver la véracité de la "conjecture", encouragé par l'insuccès des recherches de contre-exemples. J'ai pensé que les outils développés dans [4] (les "matrices fractales") additionnés à ceux de la Géométrie Algébriques pouvaient être utiles, ce sont eux qui m'ont permis de construire le contre-exemple qui suit. La question est résolue : une algèbre commutative engendrée par trois matrices de $M_n(C)$ n'est pas nécessairement de dimension inférieure ou égale à n.

Voici un contre-exemple : Soient les matrices A,B,W suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 12498159/4060225 & 30789743/8120450 & 15 & 16 & 17 \\ 0 & 22 & 15025969/812045 & 83337583/3248180 & 25 & 365373889/3248180 & 7 \\ 0 & 0 & 7412142/812045 & 3755311/812045 & 0 & 45698569/1624090 & 41322955/324818 \\ 0 & 0 & 0 & 2234/155 & 0 & 24402/155 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 166 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$., On vérifie que A,B,W commutent et que les éléments suivants, qui appartiennent à l'algèbre engendrée par A, B, W, sont linéairement indépendants : $I, A, B, AB, A^2, B^2, A^3, AW$ S'ouvrent de nouvelles questions : nature de l'ensemble des triplets de matrices commutantes pour lesquelles la dimension excède n, autres caractéristiques de ces matrices, ...

Références :

[1] M. Gerstenhaber , On dominance and varieties of commuting matrices, Annals of Mathematics, 73(1961)

[2] R. Guralnick, A note on commuting pairs of Matrices, Linear and Multilinear Algebra, 31,1992

[3] R. Mneimne, Elements de géometrie, Action de Groupe, Cassini, 1997

[4] K O'Meara, J Clark, C. Vasconcelos Advanced Topics in Linear Algebra, Oxford University Press, 2011

[5] K. O'Meara, The Gerstenhaber problem for commuting triples of matrices is "decidable, Communications in Algebra, Vol 48,2002, n°2.

[6] K 0'Meara,J. Holbrook, A computing strategy and programs to resolve the Gerstenhaber Problem for commuting triples of matrices, arXiv :2006.08588

[7] B Sethuraman, The Algebra generated by three commuting Matrices, http :www.csun.edu/articleRMS

[8] K.Sivic, Varieties of triples of commuting matrices, PHD Thesis, Ljubljana, 2001.

patrick.teller@free.fr