Une question de signes

PAR PATRICK TELLER

L'utilisation de bases standard (ou bases de Grobner) d'idéaux de polynômes en plusieurs indéterminées pour la recherche de solutions entières (et positives) de systèmes d'équations linéaires à coefficients entiers est assez naturelle dans le cas de coefficients positifs et fait intervenir des séries de Laurent (c'est à dire des polynômes avec des degrés « négatifs ») [1].

Dans l'optique d'introduire un traitement plus « élémentaire », sous forme vectorielle [2], il est utile de trouver un artifice pour transformer les systèmes possédant des coefficients négatifs en systèmes équivalents ne contenant que des coefficients positifs; cela se fera en prenant comme point de départ une idée de Traverso-Conti [1] et en introduisant (plutôt que des exposants négatifs) une équation supplémentaire.

1 Equations linéaires définies par une matrice à coefficients de signes quelconques

On considère cette fois une matrice A à coefficients entiers ($A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nm}}(\mathbb{Z})$) et un vecteur B$\in \mathcal{M}_{n1}(N)$, on recherche s'il existe les m-uplets $X \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{N})$ tels que AX=B.

Notre démarche sera nspirée de Conti et Traverso [1] , bien que de manière lointaine.

Théorème 1. *Etude d'un système d'équations linéaires à coefficients entiers de signes quelconques (1)*

Soit une matrice A à coefficients entiers ($A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nm}}(\mathbb{Z})$) et un vecteur B$\in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{N})$, l'existence de m-uplets $X \in N^m$ tels que AX=B est équivalente à celle de m+1 uplets X'$\in \mathbb{N}^m \times \mathbb{Z}^-$pour un système A'X'=B', facile à déduire de A et de B.

Démonstration.

Pour « absorber » les coefficients négatifs dans les équations nous allons (à la suite de Conti-Traverso) opérer comme suit:.

Pour chaque j on posera $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ \dots \\ a_{\mathrm{nj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{1j} \\ a'_{2j} \\ \dots \\ \dots \\ a'_{\mathrm{nj}} \end{pmatrix} + \alpha_j \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \dots \\ \dots. \\ -1 \end{pmatrix}$ où les coefficients sont supérieurs ou égaux à zéro.

Ce qui permet de réécrire chacune des équations:

$\sum_{j=1}^m a_{\mathrm{ij}} x_j = b_i$ s'écrit $\sum_{j=1}^m a'_{\mathrm{ij}} x_j + (-\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j) = b_i$

Le système AX=B est donc équivalent au système $\begin{cases} \sum_{j=1}^m a'_{1j} x_j + z = b_1 \\ \sum_{j=1}^m a'_{2j} x_j + z = b_2 \\ \dots\dots \\ \sum_{j=1}^m a'_{\mathrm{nj}} x_j + z = b_n \\ \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j + z = 0 \end{cases}$

Attention, nous attendons des solutions dans $\mathbb{N}$ pour les x_i, pas pour z qui sera nécessairement un entier négatif.

$\square$

2 Equations linéaires définies à coefficients de signes quelconques

On considère maintenant une matrice A à coefficients entiers ($A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nm}}(\mathbb{Z})$) et un vecteur B$\in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{Z})$, on recherche s'il existe les m-uplets $X \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbb{N})$ tels que AX=B.

Pour nous ramener au cas précédent il suffira de mutiplier par -1 chacune des équations dans laquelle le second membre est négatif.

Bibliographie :

[1] P.Conti et C.Traverso (1991), Buchberger algorithm and integer programming, pp. 130-139 in Proceedings AAECC-9 (New-Orleans), Springer, LNCS 539

[2] P. Teller, Version vectorielle des bases standard. www.lalgebrisant.fr